Елизарова Екатерина Юрьевна

старший преподаватель

Красильникова Светлана Владимировна

студентка

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина»

г. Нижний Новгород, Нижегородская область

DOI 10.31483/r-96806

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА КАК ОСНОВА ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Аннотация*: данная статья посвящена численному дифференцированию, которое является основой для вычислительных методов, рассматриваемых как в школьном, так и в вузовском курсе математики. Авторами рассмотрены формулы приближенного дифференцирования как альтернативного способа дифференциации функций. Особое внимание уделяется исследованию области применимости данных формул, решаемых в MS Excel.*

Ключевые слова*: численные методы, численное дифференцирование, интерполяционные формулы Ньютона.*

Актуальность данной темы «Интерполяционные формулы Ньютона как основа численного дифференцирования» заключается в противоречии между широкой применимостью сложного дифференциального исчисления в различных науках, таких, как экономика, физика, астрономия, и недостаточной проработанностью вопроса о методах вычисления значения производной дискретно заданной функции.

И. Ньютон и Г. Лейбниц являются основоположниками дифференциального исчисления. Оно было создано в XVII веке на основе следующих задач:

– о разыскании касательной к произвольной линии;

– о разыскании скорости при произвольном законе движения [1].

Различные методы численного дифференцирования обширно применяются на практике, когда численно нужно решить одно или несколько дифференциальных уравнений. Методы численного дифференцирования используются в тех случаях, когда нужно отыскать какую-либо производную, поиск которой аналитически затруднен или элементарно невыполним, если функция задана таблично. В таких случаях исходную функцию y (x) замещают, аппроксимируют более простой функцией φ(x) и считают, собственно, что приближенно верно равенство: y(x) = φ'(x) [3].

В этой работе, мы расскажем о первой и второй интерполяционных формулах Ньютона, как они выводятся и для чего они необходимы. Кроме этого будут рассмотрены конкретные примеры нахождения приближённого значения производной функции по заданным табличным данным.

Рассмотрим *первую интерполяционную формулу Ньютона*.

Пусть задана функция y=f(x) на отрезке $[x_{0,} x_n]$, который разбит на n одинаковых отрезков (случай равноотстоящих значений аргумента). Δx= h= const. Для каждого узла x_0, $x_1 = x_0 + h, ..., x_n = x_0 + n \cdot h$ определены значения функции в виде: $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1, ..., f(x_n)=y_n$.

Конечные разности первого порядка имеют следующий вид:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

…….

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Конечные разности второго порядка имеют следующий вид:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

…..

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

Аналогично определяются конечные разности высших порядков:

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0$$

$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1$$

……

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_{i,}\ i = 0,1,\ldots,n\text{-}k$$

Заметим, что конечные разности функций удобно располагать и подсчитывать в таблицах, например, с помощью MS Excel.

Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ для равностоящих значений независимых переменных: $x_n = x_0 + n\cdot h$, где h – шаг интерполяции. Необходимо найти полином $P_n(x)$ степени не выше n, принимающий в точках (узлах) x_i значения: $P_n(x_i) = y_i$, i=0,..,n. Запишем интерполирующий полином в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x\text{-}x_0) + a_2(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1) + \cdots + a_n(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_{n\text{-}1})$$

Задача построения многочлена сводится к определению коэффициентов a_i из условий:

$$P_n\,(x_0)= y_0$$

….

$$P_n\,(x_n)= y_n$$

Полагаем в интерполирующий полиноме $x = x_0$, тогда, т.к. второе, третье и другие слагаемые равны 0, $P_n\ (x_0) = y_0 = a_0$ $a_0 = y_0$. Найдем коэффициент a_1. При $x = x_1$ получим:

$$P_n(x_1) = y_1 = y_0 + a_1(x_1\text{-}x_0);$$

$$y_1 = y_0 + a_1(x_1\text{-}x_0)$$

$$a_1 = \frac{y_1\text{-}y_0}{x_1\text{-}x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

Для определения a_1 составим конечную разность второго порядка. При $x = x_1$ получим:

$$P_n(x_2) = y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_2\text{-}x_0) + a_2(x_2\text{-}x_0)(x_2\text{-}x_1) = y_0 + 2\Delta y_0 + a_2 2h^2,$$

$$a_2 = \frac{y_2\text{-}y_0\text{-}2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{y_2\text{-}y_0\text{-}2y_1 + 2y_0}{2h^2} = \frac{y_2\text{-}2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{(y_2\text{-}y_1)\text{-}(y_1\text{-}y_0)}{2h^2}$$

$$= \frac{\Delta y_1\text{-}\ \Delta y_1}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}$$

Аналогично можно найти другие коэффициенты. Общая формула имеет вид.

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}, k = 1..n$$

Подставляя эти выражения в формулу полинома, получаем:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x\text{-}x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x\text{-}x_0)\ldots(x\text{-}x_{n\text{-}1})$$

где x_i,y_i – узлы интерполяции; x – текущая переменная; h – разность между двумя узлами интерполяции h – величина постоянная, т.е. узлы интерполяции равноотстоят друг от друга.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x\text{-}x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x\text{-}x_0)\ldots(x\text{-}x_{n\text{-}1})$$

Этот многочлен называют интерполяционным полиномом Ньютона для интерполяции в начале таблицы (интерполирование «вперед») или первым полиномом Ньютона. Для практического использования этот полином записывают в преобразованном виде, вводя обозначение $t = \frac{(x\text{-}x_0)}{h}$, тогда

$$P_n(x) = y_0 + t\cdot\Delta y_0 + \frac{t(t\text{-}1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t\text{-}1)\ldots(t\text{-}n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0$$

Эта формула применима для вычисления значений функции для значений аргументов, близких к началу интервала интерполирования. Для получения выражения для приближённого дифференцирования по первой интерполяционной формуле Ньютона, необходимо исходную первую интерполяционную формулу Ньютона продифференцировать [2; 4].

$$P_n(x) = y_0 + t\cdot\Delta y_0 + \frac{t\cdot(t\text{-}1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{t(t\text{-}1)(t\text{-}2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_0 + \frac{t\cdot(t\text{-}1)(t\text{-}2)(t\text{-}3)}{4!}\cdot\Delta^4 y_0 \ldots + \frac{t(t\text{-}1)\ldots(t\text{-}n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0$$

Производя перемножение биномов выражения, получим:

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t^2\text{-t}}{2}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{t^3\text{-}3t^2 + 2t}{6}\cdot\Delta^3 y_0 + \frac{t^4\text{-}6t^3 + 11t^2\text{-}6\text{t}}{24}\cdot\Delta^4 y_0 + \frac{t^5\text{-}10t^4 + 35t^3\text{-}50t^2 + 24t}{120}\cdot\Delta^5 y_0 + \cdots$$

Так как $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dt}$, то

$$f'(x) = \frac{1}{h}[\Delta y_0 + \frac{2t\text{-}1}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2\text{-}6t + 2}{6} \cdot \Delta^3 y_0 + \frac{2t^3\text{-}9t^2 + 11t\text{-}3}{12} \cdot \Delta^4 y_0 + \cdots$$

Рассмотрим иллюстрацию применения формул на примере.

Пример 1. Вычислим приближенное значение производной функции f (x) = sin(x) в точке *x* = 0,62, с использованием формулы, основанной на первой интерполяционной формуле Ньютона. Найдем абсолютную погрешность результата.

Пусть задана точка *x* = 0,62 и функция, заданная с помощью следующей таблицы.

Таблица

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
Sin(x)	0,5646	0,6442	0,7174	0,7833	0,8415	0,8912	0,9320

Определим к какому концу таблицы, заданная точка *x* располагается ближе. Так как точка располагается ближе к началу интервала интерполирования, то для нахождения производной воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона:

$$f'(x) = \frac{1}{h}[\Delta y_0 + \frac{2t\text{-}1}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2\text{-}6t + 2}{6} \cdot \Delta^3 y_0 + \frac{2t^3\text{-}9t^2 + 11t\text{-}3}{12} \cdot \Delta^4 y_0 + \ \ldots$$

Составим таблицу конечных разностей. Для удобства подсчета предлагается использовать программу Excel (рис. 1).

yi	Δy0	Δ2y0	Δ3y0	Δ4y0	Δ5y0	Δ6y0
y0	0,0796	-0,0064	-0,0009	0,0005	-0,0009	0,0017
y1	0,0732	-0,0073	-0,0004	-0,0004	0,0008	
y2	0,0659	-0,0077	-0,0008	0,0004		
y3	0,0582	-0,0085	-0,0004			
y4	0,0497	-0,0089				
y5	0,0408					
y6						

Рис. 1

Рассчитаем приближенное значение производной функции f (x) = sin(x) в точке x = 0,62. Полагая, что x_0 =0,6, x = 0,62, h (шаг интерполяции) = 0,1, найдем $t = \frac{(x\text{-}x_0)}{h}$. Подставляя в формулу исходные данные, получим t = 0,2.

$$f'(0{,}62) = \frac{1}{0{,}1}[0{,}0796 + \frac{2*0{,}2-1}{2}\cdot(\text{-}0{,}0064) + \frac{3(0{,}2)^2\text{-}6+2}{6}\cdot(\text{-}0{,}0009) + \frac{2\cdot(0{,}2)^3\text{-}9\cdot(0{,}2)^2+11\cdot(0{,}2)\text{-}3}{12}\cdot(\text{-}0{,}0005)$$

Для подсчета приближенного значения производной также воспользуемся программой Excel. В результате получим, что

$$f'(0{,}62) = 0{,}8133433$$

Вычислим абсолютную погрешность результата. Учитывая, что

$$f\,‘(x) = cos(x)$$

то $f’\,(0{,}62) = 0{,}813878$. Абсолютная погрешность результата будет равна

Δ = |0,813878– 0,8133433| = 0,0005351

Таким образом, можно сделать вывод, что между производной, найденной по формуле Ньютона и производной, найденной стандартным способом, существует минимальная погрешность.

Рассмотрим в*торую интерполяционную формулу Ньютона* [4].

Второй интерполяционный полином Ньютона применяется для нахождения значений функций в точках, расположенных в конце интервала интерполирования. Запишем интерполяционный многочлен в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x\text{-}x_n) + a_2(x\text{-}x_n)(x\text{-}x_{n\text{-}1}) + \cdots + a_n(x\text{-}x_n)(x\text{-}x_{n\text{-}1})\ldots(x\text{-}x_1)$$

Коэффициенты a_0, a_1,...,a_n определяем из условия: $P_n(x_i) = y_i$ i=0,...,n. Полагаем в интерполяционном многочлене x = x_n, тогда

$$P_n(x_n) = a_0$$

$$P_n(x_n) = y_n = a_0,$$

$$a_0 = y_n$$

Полагаем x=x_{n-1}, тогда:

$$P_n(x_{n\text{-}1}) = y_{n\text{-}1} = y_n + a_1(x_{n\text{-}1}\text{-}x_n), h = x_n\text{-}x_{n\text{-}1}$$

Следовательно, $a_1 = \frac{y_n\text{-}y_{n\text{-}1}}{h} = \frac{\Delta y_{n\text{-}1}}{h}$.

Полагаем $x=x_{n-2}$, тогда

$$P_n(x_{n\text{-}2}) = y_{n\text{-}2} = y_n + \frac{\Delta y_{n\text{-}1}}{h}(x_{n\text{-}2}\text{-}x_n) + a_2(x_{n\text{-}2}\text{-}x_n)(x_{n\text{-}2}\text{-}x_{n\text{-}1}), (1)$$

$$y_{n\text{-}2} = y_n + \frac{\Delta y_{n\text{-}1}}{h}(\text{-}2h) + a_2 * 2h^2 = y_n\text{-}2\Delta y_{n\text{-}1} + a_2 2h^2,$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n\text{-}2}}{2!\,h^2}$$

Аналогично можно найти другие коэффициенты многочлена:

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_{n\text{-}3}}{3!\,h^3}$$

….

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}$$

Подставляя эти выражения в формулу (1), получим вторую интерполяционную формулу Ньютона или многочлен Ньютона для интерполирования «назад».

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n\text{-}1}}{h}(x\text{-}x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n\text{-}2}}{2!\,h^2}(x\text{-}x_n)(x\text{-}x_{n\text{-}1})$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_{n\text{-}3}}{3!\,h^3}(x\text{-}x_n)(x\text{-}x_{n\text{-}1})(x\text{-}x_{n\text{-}2}) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x\text{-}x_n)(x\text{-}x_{n\text{-}1}) \ldots (x\text{-}x_1),$$

Введем обозначения:

$$\frac{x\text{-}x_n}{h} = t \text{ или } x = x_n + th$$

$$\frac{x\text{-}x_{n\text{-}1}}{h} = \frac{x\text{-}(x_n\text{-}h)}{h} = t + 1$$

$$\frac{x\text{-}x_{n\text{-}2}}{h} = \frac{x\text{-}(x_{n\text{-}1}\text{-}2h)}{h} = t + 2$$

….

$$\frac{x\text{-}x_1}{h} = \frac{x(x_n\text{-}2h)}{h} = t + n\text{-}1$$

Произведя замену, получим

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n\text{-}1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n\text{-}2} + \cdots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n\text{-}1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Это вторая формула Ньютона для интерполирования «назад» [3 ; 4]. Для получения выражения для приближённого дифференцирования по второй интерполяционной формуле Ньютона, необходимо исходную вторую интерполяционную формулу Ньютона продифференцировать.

$$P_n(x) = y_{\text{n}} + t\cdot\Delta y_{\text{n-1}} + \frac{t(t+1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_{\text{n-2}} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_{\text{n-3}} + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\cdot\Delta^4 y_{\text{n-4}} + \cdots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n\text{-}1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0$$

Производя перемножение биномов выражения, получим:

$$P_n(x) = y_{\text{n}} + t\cdot\Delta y_{\text{n-1}} + \frac{t^2+\text{t}}{2}\cdot\Delta^2 y_{\text{n-2}} + \frac{t^3+3t^2+2t}{6}\cdot\Delta^3 y_{\text{n-3}} + \frac{t^4+6t^3+11t^2+6\text{t}}{24}\cdot\Delta^4 y_{\text{n-4}} + \frac{t^5+10t^4+35t^3+50t^2+24t}{120}\cdot\Delta^5 y_{\text{n-5}} + \cdots$$

Так как $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dt}$ то

$$f'(x) = \frac{1}{h}[\Delta y_{\text{n-1}} + \frac{2t+1}{2}\cdot\Delta^2 y_{\text{n-2}} + \frac{3t^2+6\text{t}+2}{6}\cdot\Delta^3 y_{\text{n-3}} + \frac{2t^3+9t^2+11\text{t}+3}{12}\cdot\Delta^4 y_{\text{n-4}} + \cdots]$$

Проиллюстрируем вычисление производной функции на основе второй интерполяционной формулы Ньютона.

Пример 2. Вычислим приближенное значение производной функции f (x) = cos(x) в точке x = 1,59, с использованием формулы, основанной на второй интерполяционной формуле Ньютона. Найдем абсолютную погрешность результата.

Пусть функция задана в следующей табличной форме.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
cos(x)	0,8415	0,8912	0,932	0,9636	0,9854	0,9975	0,9996

Определим к какому концу таблицы, заданная точка x располагается ближе. Так как точка располагается ближе к концу интервала интерполирования, то для нахождения производной воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона:

$$f'(x) = \frac{1}{h}[\Delta y_{\text{n-1}} + \frac{2t+1}{2} \cdot \Delta^2 y_{\text{n-2}} + \frac{3t^2+6t+2}{6} \cdot \Delta^3 y_{\text{n-3}}$$
$$+ \frac{2t^3+9t^2+11t+3}{12} \cdot \Delta^4 y_{\text{n-4}} \dots]$$

Составим таблицу конечных разностей с помощью таблиц Excel.

yi	Δy0	Δ2y0	Δ3y0	Δ4y0	Δ5y0	Δ6y0
y0	0,0497	-0,0089	-0,0003	-0,0003	0,001	-0,0021
y1	0,0408	-0,0092	-0,0006	0,0007	-0,0011	
y2	0,0316	-0,0098	1E-04	-0,0004		
y3	0,0218	-0,0097	-0,0003			
y4	0,0121	-0,01				
y5	0,0021					
y6						

Так как $x_0 = 1{,}0$, x = 1,59, h (шаг интерполяции) = 0,1 и t = 5,9

$$f'(1{,}59) = \frac{1}{0{,}1}[0{,}0021 + \frac{2 \cdot 5{,}9+1}{2} \cdot (-0{,}01) + \frac{3 \cdot (5{,}9)^2 + 6 \cdot 5{,}9 + 2}{6} \cdot (-0{,}0003)$$
$$+ \frac{2 \cdot (5{,}9)^3 + 9 \cdot (5{,}9)^2 + 11 \cdot (5{,}9) + 3}{12} \cdot (-0{,}0004)$$

Для подсчета приближенного значения производной также воспользуемся программой Excel.

$$f'(1{,}59) = -0{,}953898$$

Вычислим абсолютную погрешность результата. Учитывая, что

$$f'(x) = -sin(x)$$

то $f'(1{,}59) = -0{,}99982$. Абсолютная погрешность результата будет равна $\Delta = |0{,}99982 - 0{,}953898| = 0{,}04592$

Таким образом, можно сделать вывод, что между производной, найденной по формуле Ньютона и производной, найденной стандартным способом, существует минимальная погрешность.

Мы рассмотрели первую и вторую формулы Ньютона и выяснили для чего они используются, проиллюстрировав на примерах. Материал, представленный в данной статье, может быть использован в занятиях по математике: здесь содержится не только расширенный материал по дифференцированию функций, но приведены примеры, иллюстрирующие возможность включения обучаемых в процесс формирования навыков работы с MS Excel. Также данные статьи может быть рекомендован всем желающим, которые хотят усовершенствовать свои математические знания.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.; СПб.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 632 с.

2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.

3. Лимонникова Е.В. Вычислительная математика. – Северодвинск: Севмашвтуз, 2010. – 36 с.

4. Моделирование в электроэнергетике: интерполяционный многочлен в форме Ньютона [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://simenergy.ru/math-analysis/digital-processing/79-newton-polynomial (дата обращения: 01.11.2020).