

Руденко Виктория Алексеевна

канд. экон. наук, научный сотрудник

ФГБУН «Центральный экономико-

математический институт РАН»

г. Москва

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КОПУЛА-ФУНКЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЫ

Аннотация: в данной работе приведен анализ использования математического аппарата копула-функций в моделях стохастической границы. Показана необходимость расширения стандартного класса моделей стохастической границы с помощью моделирования зависимости случайных компонент ошибки. Описаны различные области экономики, в которых применяются указанные расширенные модели.

Ключевые слова: стохастическая граница, копула-функции, эффективность, независимость случайных величин.

Введение

На сегодняшний день математический аппарат копула-функций используется во множестве различных областей экономики. С его помощью появляется возможность моделирования совместных функций распределения случайных величин, для которых известны лишь их маржинальные функции распределения. В частности, копула-функции используются для описания взаимосвязи в случайных составляющих ошибки в моделях стохастической границы.

Материал и методы исследования

В соответствии с ([1] с. 3–18; [4] с. 113–130) копула-функцией будем называть функцию $C(u_1, u_2, \dots, u_k)$, определенную на единичном k -мерном кубе $I^k = [0;1]^k$ (т.е. $u_i \in [0;1]$, $i = 1, 2, \dots, k$), если она обладает следующими свойствами:

- 1) область значений функции – единичный интервал $[0;1]$;
- 2) если $u_i = 0$ хотя бы для одного значения $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, то $C(u_1, u_2, \dots, u_k) = 0$;

3) $C(1,\dots,1,u_i,1,\dots,1)=u_i$ для всех $u_i \in [0;1]$;

4) $C(u_1,u_2,\dots,u_k)$ является k -возрастающей функцией в том смысле, что для всех $(a_1,a_2,\dots,a_k) \in [0;1]^k$ и $(b_1,b_2,\dots,b_k) \in [0;1]^k$ с $a_i \leq b_i$ справедливо равенство:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_k=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_k} C(u_{1i_1}, u_{2i_2}, \dots, u_{ki_k}) \geq 0, \text{ где } u_{j1} = a_j \text{ и } u_{j2} = b_j \text{ для всех } j \in \{1,2,\dots,k\}.$$

Широкое использование копула-функций обусловлено справедливостью теоремы Склара, доказательство которой можно найти в ([10] с. 1–14; [6]; [4] с.113–130):

Пусть $H(\cdot)$ – k -мерная функция распределения с частными распределениями F_1, \dots, F_k . Тогда существует k -мерная копула-функция $C(\cdot)$ такая, что для всех действительных x_1, x_2, \dots, x_k выполнено:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_k) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_k(x_k)) \quad (1)$$

Если все частные функции распределения непрерывны, то копула-функция определена единственным образом. Обратно, если $C(\cdot)$ – копула-функция, а F_1, \dots, F_k – функции распределения, то функция $H(\cdot)$, определяемая выражением (1), является совместной функцией распределения с частными распределениями F_1, \dots, F_k .

Эта теорема была опубликована в 1959 году, но несмотря на свою внешнюю простоту и лаконичность стала активно применяться при решении исследовательских задач не так давно, что можно связать со стремительным развитием вычислительных мощностей компьютеров в последние десятилетия.

Что касается теории стохастической границы, то ее развитие началось с публикации работы ([2] с. 377–396) в 1976 году. Авторы впервые рассматривали модель вида:

$$y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i,$$

где y_i – выпуск продукции i -й компании, x_i – вектор входных данных, β – вектор параметров. При этом предполагается, что ошибка ε_i представлена в виде суммы двух случайных величин $\varepsilon_i = v_i + u_i$, где v_i – независимые одинаково

распределенные случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma_v^2)$, а случайные величины u_i независимы от v_i и удовлетворяют условию $u_i \leq 0$. Основное внимание уделяется случаю, когда в качестве распределения величин $-u_i$ используется усеченное в нуле нормальное распределение $N^+(0, \sigma_u^2)$. Кроме того, можно рассматривать и другие варианты, например, когда величины $-u_i$ имеют показательное распределение. Стохастической границей является величина $f(x_i, \beta) + v_i$, которая достигается в случаях, когда случайная компонента неэффективности u_i равна нулю.

Результаты исследования

Существует множество работ по исследованию стохастической границы в различных экономических моделях.

Тем не менее, значимыми недостатками теории всегда были отсутствие возможности фактического разделения и наблюдения компонент ошибки, а также предположение об их независимости, позволяющее упростить вычисления при построении оценок. В последнее время технические и вычислительные возможности программного обеспечения существенно увеличились. В связи с этим, необходимость в условии независимости компонент ошибки отпала, а их возможную зависимость многие исследователи стали описывать с помощью аппарата копула-функций. Так, в работе ([1] с. 3–18) с помощью смоделированных данных показано, что в случае наличия высокой корреляции случайных составляющих ошибки, оценки технической эффективности, найденные по классическим моделям с использованием предположения о независимости, могут оказаться практически противоположными истинным значениям. Тем не менее, в других наших работах при исследовании эффективности регионов РФ на реальных данных таких существенных различий в моделях выявлено не было, хотя модели с копулами стабильно имели более высокие значения функции правдоподобия. На сегодняшний день мы продолжаем анализировать эффективность регионов РФ как с помощью копула-моделей, так и с помощью классических методов построения стохастической границы. Полученные результаты

свидетельствуют о возможности применения предположения о независимости компонент ошибки при решении задач оценивания основных параметров модели. Кроме того, в большинстве случаев классические модели подходят и для ранжирования объектов по уровню их эффективности. Однако в задачах поиска максимально точных непосредственных значений технических эффективностей, следует использовать копула-функции.

В современной научной литературе описание зависимости компонент с помощью копул в моделях стохастической границы применяется в различных сферах, не только для оценки эффективности регионов. Еще несколько лет назад было не так много публикаций, в которых аппарат копула-функций применяется в моделях стохастической границы. Так, наиболее известными были работы К. Амслер, А. Прохорова, П. Шмидта [3, с. 5–6] и П. Ши, Б. Жанг [9, с. 11–15], в которых анализируется зависимость компонент неэффективности во времени на панельных данных. В [7, с. 1–14; 5, с. 3757–3773] изучены модели с множеством выпусков в предположении зависимости компонент неэффективности между различными показателями выпуска. М.Д. Смит [11, с. 172–192] оценивал зависимость компонент случайного шума и неэффективности.

Начиная с 2014 года, использование копул для оценки технической эффективности в моделях стохастической границы стало довольно частым. Так, в работе [8, с. 31–41] копула-функции используются для поиска стохастической границы и значений технической эффективности цифровых моделей. Интересными являются исследования Sriboonchitta. Например, в [12, с.151–162] авторы используют концепцию стохастической границы в производстве для анализа проблемы ценообразования на фондовых рынках. При этом они моделируют зависимость случайных составляющих ошибки с помощью различных копул и показывают, что такая «расширенная модель стохастической границы» позволяет получить более точные оценки при проведении финансового анализа.

В большинстве существующих работ модели с копулами признаются более подходящими для получения корректных оценок. Выбор, как правило, делается либо простым сравнением значений функций правдоподобия, либо с использо-

ванием каких-либо информационных критериев, что является более корректным подходом, так как за счет введения копула-функций в модель в обязательном порядке добавляются новые параметры, подлежащие оценке, что усложняет вычисления.

На сегодняшний день эпидемия 2020 года привела к образованию множества новых задач, которые можно решать с помощью использования расширенных моделей стохастической границы. В частности, в региональном анализе, при наличии корректных данных для исследования, важной задачей будет оценка эффективности работы регионов в различных отраслях: здравоохранении, промышленности, образовании и т. п.

Выводы

Таким образом, исходя из проведенного анализа публикаций, можно сделать вывод о возможности применения аппарата копула-функций для расширения класса моделей стохастической границы и решения различного рода задач с его использованием. При этом следует учитывать значительное усложнение вычислений в расширенном классе моделей и оценивать целесообразность его использования для каждой конкретной задачи по отдельности.

Список литературы

1. Айвазян С.А. Исследование зависимости случайных составляющих стохастической производственной функции при оценке технической эффективности / С.А. Айвазян, М.Ю. Афанасьев, В.А. Руденко // Прикладная эконометрика, 2014. – №2 (34). – С. 3–18.
2. Aigner D.J., T. Amemiya, and D.J. Poirier. On the Estimation of Production Frontiers: Maximum likelihood estimation of the parameters of discontinuous density function // International economic review. – 1976. – Vol. 17. №2. – P. 377–396.
3. Amsler Ch., Prokhorov A., Schmidt P. Using copulas to model time dependence in stochastic frontier models // Econometric Reviews. – 2009. – №33 (5–6), Special Issue in Honor of Les Godfrey
4. Благовещенский Ю. Н. Основные элементы теории копул // Прикладная эконометрика. – 2012. – №26 (2). – С. 113–130.

5. Carta A., Steel M.F.G. Modelling multi-output stochastic frontiers using copulas // Computational Statistics & Data Analysis. – 2012. – №56 (11). – P. 3757–3773
6. Joe H. Multivariate models and dependence concepts. – London: Chapman Hall, 1997.
7. Lai H.P., Huang C. Maximum likelihood estimation of seemingly unrelated stochastic frontier regressions // Journal of Productivity Analysis. – 2013. – №40 (1). – P. 1–14.
8. Najjari V., Bal H., Oztürk F., Alp I., Stochastic frontier models by copulas and an application // UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics. – Vol. 78 (1). – P. 31–41.
9. Shi P., Zhang B. An Empirical Research on Technological Efficiency & its Influential Factors of Low Carbon Enterprises in China // Management Science and Engineering. – 2011. – 5 (3). – P. 11–15.
10. Sklar A. Random variables, distribution functions, and copulas: Personal look backward and forward // Lecture notes. Monograph series. – 1996. – №28. – P. 1–14
11. Smith M.D. Stochastic frontier models with dependent error components // The Econometrics Journal. – 2008. – №11 (1). – P. 172–192.
12. Tibprasorn P., Autchariyapanitkul K., Chaniam S., Sriboonchitta S. A copula-based stochastic frontier model for financial pricing // IUKM 2015: Integrated uncertainty in knowledge modeling and decision making. – 2015. – P. 151–162.