Садовников Николай Владимирович

Шипанова Елена Викторовна

Султанова Галия Алиевна

РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ КУРСАНТОВ ВОЕННОГО ВУЗА

***Аннотация**: показана взаимосвязь фундаментальности и профессионально-военной направленности обучения курсантов военного вуза упрощению логических функций, состоящих в отыскании тупиковых, а затем минимальных ее форм. Удобным методом минимизации, позволяющим упростить поиск склеивающихся членов, является использование диаграмм Вейча. Затрагивается вопрос о двойственных функциях и о полноте и замкнутости системы логических функций.*

***Ключевые слова**: минимальная форма логических функций, дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), конъюнктивная нормальная форма (КНФ) булевых функций, импликанта, простая импликанта, тупиковая форма булевых функций, диаграмма Вейча, принцип двойственности, функционально полная система, алгебра Жегалкина, замкнутый класс функций.*

***Abstract**: the relationship between the fundamentality and professional orientation of cadets of military university of simplification logical functions is shown, which consist in finding dead-end, and then minimal forms of it. A convenient minimization method to simplify the search for gluing terms is the use of Veitch diagrams. The question of dual functions and the completeness and closeness of the system of logical functions is discussed.*

***Keywords**: minimal form of logical functions, disjunctive normal form (DNF), conjunctive normal form (CNF) of boolean functions, implicant, simple implicant, dead-end form of boolean functions, Veitch diagram, duality principle, functionally complete system, Zhegalkin algebra, closed class of functions.*

1.1. Методы получения тупиковых и минимальных дизъюнктивных нормальных форм

Очередной этап упрощения логических функций заключается в отыскании *тупиковых*, а затем *минимальных* форм. В некоторых случаях (см. Взаимосвязь фундаментальности и военно-профессиональной направленности изучения элементов математической логики в военном вузе) в сокращенной ДНФ содержатся лишние импликанты, которые могут быть опущены без изменения значений функции. Найдем сокращенную ДНФ функции, заданной в совершенной ДНФ:

$$f(A,B,C) = ABC \vee A\overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C}.$$

Проведя операции склеивания и поглощения, получим: $f(A,B,C) = AC \vee \overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B}$.

Нетрудно убедиться, что в полученной сокращенной ДНФ импликанту $\overline{B}C$ *можно исключить*. Действительно, умножив $\overline{B}C$ на $A \vee \overline{A} = 1$ и применив операцию поглощения, получим: $f(A,B,C) = AC \vee A\overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B} = AC \vee \overline{A}\overline{B}$.

Определение. Дизъюнкция простых импликант, ни одну из которых исключить нельзя, называется *тупиковой* ДНФ заданной булевой функции.

Некоторые булевы функции имеют *несколько тупиковых форм*. Тупиковые формы, содержащие наименьшее количество букв, будут *минимальными*.

Теорема.

Всякая минимальная ДНФ булевой функции является тупиковой.

Доказательство. Пусть минимальная ДНФ некоторой функции имеет вид $f = q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_n$, где $q_1,...,q_n$ – элементарные произведения.

Покажем, что каждое из этих произведений является простой импликантой заданной функции. Предположим, что элементарное произведение q_1 – непростая импликанта. Тогда q_1 можно представить в виде произведения простой импликанты p и некоторого остаточного элементарного произведения q_1' такого, что $q_1 = p \cdot q_1'$.

Простая импликанта по определению входит в данную функцию, поэтому можно записать: $f = p \vee q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_n = p \vee pq_1' \vee q_2 \vee ... \vee q_n$.

Т. к. простая импликанта p поглощает элементарное произведение pq_1', получим:

$$f = p \vee q_2 \vee ... \vee q_n .$$

Это выражение содержит меньше букв, чем исходное (член p имеет меньше букв, чем q_1), и, следовательно, предположение о том, что q_1 – непростая импликанта, неверно. Поэтому *все члены минимальной формы булевой функции являются простыми импликантами*.

Совершенно очевидно, что минимальная форма булевой функции не содержит лишних импликант. Итак, минимальная ДНФ содержит только простые импликанты, ни одну из которых исключить нельзя, а по определению такая форма является тупиковой, что и доказывает теорему.

Из этой теоремы следует, что для отыскания минимальных ДНФ достаточно получить все тупиковые формы заданной функции и выбрать среди них минимальные.

Рассмотрим *2 метода отыскания* тупиковых форм булевых функций.

1-й метод – метод испытания членов.

Отметим следующее *свойство произвольной* (в частном случае сокращенной) *ДНФ*: если из этой формы исключить один или несколько членов, то полученное после этого выражение будет обращаться в нуль на тех же наборах, что и исходное выражение. Это связано с тем, что дизъюнктивная форма обращается в нуль только в том случае, когда все ее члены равны нулю. Однако при исключении члена может оказаться, что на тех наборах, на которых исключенный член равнялся единице (а следовательно, вместе с ним и дизъюнкция равнялась единице в виду соотношения $1 \vee x = 1$), оставшееся выражение будет равно единице. Но если проверкой установить, что при исключении члена полученное выражение равно единице на этих наборах, то можно утверждать, что все нули и единицы обоих выражений совпадают и, следовательно, исключенный член лишний.

Таким образом, *чтобы испытать некоторый член*, следует исключить его из сокращенной ДНФ и подставить в оставшееся выражение такие значения переменных, которые обращают исключенный член в единицу. Если при этом выражение будет тождественно равно единице, то испытываемый член является лишним.

Применение этого правила связано с некоторыми особенностями, которые будут выявлены на следующих примерах.

Пример 1. Найти тупиковые формы функции, заданной в сокращенной ДНФ: $f(A,B,C)=\bar{A}\bar{B}\vee AC\vee\bar{B}C$.

1. Испытаем член $\bar{A}\bar{B}$, для чего подставим в выражение $AC\vee\bar{B}C$ значения переменных $A=0$, $B=0$ (при этом $\bar{A}\bar{B}=\bar{0}\cdot\bar{0}=1$): $0\cdot C\vee\bar{0}\cdot C=C$. Т. к. это выражение не равняется тождественно единице, то член $\bar{A}\bar{B}$ исключать нельзя.

2. Испытаем член AC. Подставляя в выражение $\bar{A}\bar{B}\vee\bar{B}C$ значения $A=1$, $C=1$ ($AC=1\cdot 1=1$), убеждаемся, что его исключить нельзя: $0\cdot\bar{B}\vee\bar{B}\cdot 1=\bar{B}$.

3. Испытаем член $\bar{B}C$, для чего подставим в выражение $\bar{A}\bar{B}\vee AC$ значение переменных $B=0$, $C=1$ ($\bar{B}C=\bar{0}\cdot 1=1$). $\bar{A}\cdot 1\vee A\cdot 1=\bar{A}\vee A=1$. Полученное выражение тождественно равно единице, поэтому член $\bar{B}C$ лишний и его можно исключить.

Вывод: функция $f(A,B,C)=\bar{A}\bar{B}\vee AC\vee\bar{B}C$ имеет одну тупиковую форму, которая и является минимальной: $f(A,B,C)=\bar{A}\bar{B}\vee AC$.

Пример 2. Упростить булеву функцию.

$$f(A,B,C,D)=\overset{1}{\bar{A}BCD}\vee\overset{2}{\bar{A}\bar{B}CD}\vee\overset{3}{A\bar{B}CD}\vee\overset{4}{A\bar{B}\bar{C}D}\vee\overset{5}{A\bar{B}\bar{C}\bar{D}}\vee\overset{6}{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}}.\ (*)$$

Функция задана в совершенной ДНФ, поэтому, проведя операции склеивания и поглощения, получаем:

$1^*-2^*=\bar{A}CD\quad(по\ B)$,

$2-3^*=\bar{B}CD\quad(по\ A)$,

$3-4^*=A\bar{B}D\quad(по\ C)$,

$4-5^*=A\bar{B}\bar{C}\quad(по\ D)$,

$5-6^*=\bar{B}\bar{C}\bar{D}\quad(по\ A)$.

Сокращенная ДНФ заданной функции имеет вид:

$f(A,B,C,D)=\bar{A}CD\vee\bar{B}CD\vee A\bar{B}D\vee A\bar{B}\bar{C}\vee\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. (**)

Найдем тупиковые формы.

1. Проверим первый член $\bar{A}CD$, подставляя в выражение $\bar{B}CD\vee A\bar{B}D\vee A\bar{B}\bar{C}\vee\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ значения переменных $A=0$, $C=1$, $D=1$($\bar{A}CD=\bar{0}\cdot1\cdot1=1$), получаем: $\bar{B}\cdot1\cdot1\vee0\cdot\bar{B}\cdot1\vee0\cdot\bar{B}\cdot\bar{1}\vee\bar{B}\cdot\bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{B}$. Первый член исключить нельзя.

2. Проверим второй член $\bar{B}CD$. $B=0$, $C=1$, $D=1$.

$\bar{A}\cdot1\cdot1\vee A\cdot1\cdot1\vee A\cdot0\cdot0\vee1\cdot0\cdot0=\bar{A}\vee A=1$; член $\bar{B}CD$ – лишний.

3. Проверим третий член $A\bar{B}D$. $A=1$, $B=0$, $D=1$:

$0\cdot C\cdot1\vee1\cdot C\cdot1\vee1\cdot1\cdot\bar{C}\vee1\cdot\bar{C}\cdot0=C\vee\bar{C}=1$; член $A\bar{B}D$ – лишний.

4. Аналогично найдем, что четвертый член $A\bar{B}\bar{C}$ можно исключить, а член $\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ исключить нельзя.

Т. о., выражение (**) имеет *3 лишних члена*: $\bar{B}CD$, $A\bar{B}D$, $A\bar{B}\bar{C}$.

Однако *одновременно исключить все лишние члены нельзя*. Вначале следует исключить *один из них и вновь провести испытание членов* полученного выражения.

Исключив из выражения (**) член $\bar{B}CD$, получим:

$f(A,B,C,D)=\bar{A}CD\vee A\bar{B}D\vee A\bar{B}\bar{C}\vee\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. (***)

Вновь проверяем наличие лишних членов, испытывая только те, которые были лишними при первой проверке, т. е. члены $A\bar{B}D$ и $A\bar{B}\bar{C}$.

Проверим член $A\bar{B}D$. Подставляя в выражение $\bar{A}CD\vee A\bar{B}\bar{C}\vee\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ значения $A=1$, $B=0$, $D=1$, получим: $\bar{1}\cdot C\cdot1\vee1\cdot\bar{0}\cdot\bar{C}\vee\bar{0}\cdot\bar{C}\cdot\bar{1}=\bar{C}$. Член $A\bar{B}D$ исключить нельзя, хотя при первой проверке, т. е. при наличии члена $\bar{B}CD$ (тоже лишнего), он был лишним. Поэтому если в некотором выражении имеется несколько лишних членов, то исключение любого из них не меняет значений функции, но одновременное исключение нескольких лишних членов может привести к такому изменению.

Проверим член $A\bar{B}\bar{C}$. $A=1$, $B=0$, $C=0$. Подставим эти значения в выражение $\bar{A}CD\vee A\bar{B}D\vee\bar{B}\bar{C}\bar{D}=0\cdot1\cdot D\vee1\cdot1\cdot D\vee1\cdot1\cdot\bar{D}=D\vee\bar{D}=1$. Член $A\bar{B}\bar{C}$ можно исключить. Т. о., выражение (***) содержит только один лишний член $A\bar{B}\bar{C}$. Поэтому *первая* тупиковая форма заданной функции будет иметь вид:

$$f(A,B,C,D)=\bar{A}CD\vee A\bar{B}D\vee\bar{B}\bar{C}\bar{D}.\ (****)$$

Исключив из выражения (**) член $A\bar{B}D$ и испытывая каждый член выражения

$$f(A,B,C,D)=\bar{A}CD\vee\bar{B}CD\vee A\bar{B}\bar{C}\vee\bar{B}\bar{C}\bar{D},\ (*****)$$

можно убедиться, что оно не содержит лишних членов. Поэтому выражение (*****) является *второй* тупиковой формой данной функции.

Наконец, исключив из выражения (**) член $A\bar{B}\bar{C}$ и поверив оставшиеся, найдем, что член $\bar{B}CD$ лишний, в результате чего вновь приходим к выражению (****).

Итак, функция $f(A,B,C,D)$ имеет 2 тупиковых формы, определяемые выражениями (****) и (*****). *Тупиковая форма (****)* содержит меньше букв, чем (*****), и поэтому *является минимальной*.

Если сокращенная ДНФ содержит большое число членов, то рассмотренный метод отыскания тупиковых форм оказывается громоздким. В этом случае применяют второй метод.

2-й метод -- метод импликантных матриц.

Рассмотрим этот метод на предыдущем примере 2. Требуется найти минимальные ДНФ функции, совершенная ДНФ которой определяется выражением:

$$f(A,B,C,D)=\overset{1}{\bar{A}BCD}\vee\overset{2}{\bar{A}\bar{B}CD}\vee\overset{3}{A\bar{B}CD}\vee\overset{4}{A\bar{B}\bar{C}D}\vee\overset{5}{A\bar{B}\bar{C}\bar{D}}\vee\overset{6}{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}}.\ (*)$$

Построим для этой функции *импликантную матрицу,* представляющую собой таблицу, в вертикальные и горизонтальные входы которой записываются все конституенты единицы и все простые импликанты заданной функции соответственно. Для каждой импликанты найдем конституенты единицы, которые ею поглощаются, т. е. те конституенты, собственной частью которых является данная импликанта. Например, импликанта $\bar{A}CD$ поглощает конституенты $\bar{A}BCD$ и $\bar{A}\bar{B}CD$, импликанта $\bar{B}CD$ поглощает конституенты $\bar{A}\bar{B}CD$ и $A\bar{B}CD$, и т. д.

Клетки импликантной матрицы, образованные пересечением строк с импликантами и столбцов (колонок) с поглощаемыми ими конституентами, отметим крестиком.

Таблица 1

Импликантная матрица

№	Простые импли-канты	Конституенты единицы					
		$\overline{A}BCD$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$
1	$\overline{A}CD$	+	+				
2	$\overline{B}CD$		+	+			
3	$A\overline{B}D$			+	+		
4	$A\overline{B}\,\overline{C}$				+	+	
5	$\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$					+	+

Чтобы получить минимальную ДНФ заданной функции, достаточно найти минимальное число импликант, которые совместно накрывают крестиками все колонки импликантной матрицы.

Из таблицы следует, что в минимальную ДНФ обязательно должны войти импликанты $\overline{A}CD$ и $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$, т. к. только они накрывают крестиками первую и шестую колонки таблицы.

Кроме того, импликанта $\overline{A}CD$ накрывает вторую, а импликанта $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ – пятую колонки. Поэтому остается накрыть только третью и четвертую колонки таблицы. Для этого можно выбрать пары импликант $\overline{B}CD$ - $A\overline{B}D$ или $A\overline{B}D$ - $A\overline{B}\,\overline{C}$, или одну импликанту $A\overline{B}D$.

Если выбрать указанные пары импликант, члены $\overline{B}CD$ и $A\overline{B}\,\overline{C}$ оказываются лишними, т. к. импликанта $A\overline{B}D$ одна накрывает третью и четвертую колонки таблицы.

Таким образом, выбрав импликанту $A\overline{B}D$, получим минимальную ДНФ заданной функции: $f(A,B,C,D) = \overline{A}CD \vee A\overline{B}D \vee \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$, которая совпадает с первой тупиковой формой (****) предыдущего примера.

Если дополнительно к $\bar{A}CD$ и $\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ выбрать импликанты $\bar{B}CD$ и $A\bar{B}\bar{C}$, то лишних импликант не оказывается, а полученное выражение $f(A,B,C,D)=\bar{A}CD\vee\bar{B}CD\vee A\bar{B}\bar{C}\vee\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ является второй тупиковой формой заданной функции.

Пример. Найти минимальные формы булевой функции.

$$f(A,B,C)=\overset{1}{\bar{A}BC}\vee\overset{2}{\bar{A}\bar{B}C}\vee\overset{3}{ABC}\vee\overset{4}{AB\bar{C}}\vee\overset{5}{A\bar{B}\bar{C}}\vee\overset{6}{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}.\ (*)$$

Проведя все операции склеивания и поглощения, получим сокращенную ДНФ.

$1^*-2^*=\bar{A}C\quad(по\ B)$,

$1-3^*=BC\quad(по\ A)$,

$2-6^*=\bar{A}\bar{B}\quad(по\ C)$, (**)

$3-4^*=AB\quad(по\ C)$,

$4-5^*=A\bar{C}\quad(по\ B)$,

$5-6=\bar{B}\bar{C}\quad(по\ A)$.

$$f(A,B,C)=\bar{A}C\vee BC\vee\bar{A}\bar{B}\vee AB\vee A\bar{C}\vee\bar{B}\bar{C}.\ (***)$$

Составим импликантную матрицу, выписав из выражения (*) все конституенты единицы, а из выражения (***) – все простые импликанты.

При заполнении импликантной матрицы удобно пользоваться формой записи (**): следует поставить крестики в тех колонках, номера которых совпадают с числами, стоящими в левой части формы (**). Так, для импликанты $\bar{A}C$ крестиками отмечаются первая и вторая колонки, для BC – первая и третья, и т. д.

Заметим, что каждая колонка таблицы отмечена двумя крестиками. Поэтому из выражения (***) можно исключить любой член.

Таблица 2

Импликантная матрица

№	Простые импли-канты	Конституенты единицы					
		$\bar{A}BC$	$\bar{A}\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
1	$\bar{A}C$	+	+				

2	BC	+		+			
3	$\overline{A}\overline{B}$		+				+
4	AB			+	+		
5	$A\overline{C}$				+	+	
6	$\overline{B}\overline{C}$					+	+

Минимальное количество импликант, накрывающих крестиками все колонки, равно трем: $\overline{A}C$ накрывает первую и вторую колонки, AB накрывает третью и четвертую колонки, $\overline{B}\overline{C}$ накрывает пятую и шестую колонки.

Поэтому минимальная ДНФ заданной функции имеет вид: $f(A,B,C) = \overline{A}C \vee AB \vee \overline{B}\overline{C}$.

Легко накрыть все колонки таблицы и другими импликантами: BC накрывает первую и третью колонки, $\overline{A}\overline{B}$ – вторую и шестую, $A\overline{C}$ – четвертую и пятую колонки.

Т. о., данная функция имеет вторую минимальную форму: $f(A,B,C) = BC \vee \overline{A}\overline{B} \vee A\overline{C}$.

Функция $f(A,B,C)$ имеет еще несколько тупиковых форм, которые не являются минимальными. Например, тупиковыми будут следующие формы:

$f(A,B,C) = \overline{A}C \vee \overline{A}\overline{B} \vee AB \vee A\overline{C}$;

$f(A,B,C) = BC \vee \overline{A}\overline{B} \vee AB \vee \overline{B}\overline{C}$.

Подводя итоги, сформулируем *алгоритм получения минимальных ДНФ* булевой функции:

1. Функцию представляют в совершенной ДНФ. При этом, если функция задана таблицей, то ее следует записать «по единицам»; если же функция задана в произвольной аналитической форме, то совершенную ДНФ можно получить, применяя операции развертывания, правила да Моргана и другие формулы булевой алгебры.

2. В полученной совершенной ДНФ проводят все операции неполного склеивания и поглощения. В результате этого получается сокращенная ДНФ заданной функции.

3. Находят минимальные ДНФ по импликантной матрице. Если количество членов в сокращенной ДНФ невелико, то можно найти тупиковые формы методом испытания членов и выбрать среди них минимальные.

Замечание. В ряде случаев минимальная ДНФ совпадает с сокращенной. Например, сокращенная ДНФ любой булевой функции двух аргументов совпадает с минимальной формой, в чем нетрудно убедиться, проведя испытания членов в выражениях, записанных в шестой колонке таблицы 10 (см. Взаимосвязь фундаментальности и военно-профессиональной направленности изучения элементов математической логики в военном вузе).

1.2. Методы получения минимальных конъюнктивных нормальных форм

Кроме минимальных ДНФ целесообразно рассмотреть минимальные КНФ, чтобы иметь возможность выбрать из них ту, которая наиболее удобна в той или иной ситуации. Существует несколько методов получения минимальных КНФ. Мы рассмотрим два из них.

1 метод получения минимальных КНФ (алгоритм):

1. Булеву функцию представляют в совершенной КНФ, т. е. в виде произведения конституент нуля. Если функция задана таблицей, то для получения совершенной КНФ следует записать эту функцию «по нулям»; если функция задана в произвольной КНФ, то можно применить *формулы развертывания* для конъюнктивной формы, имеющие вид:

$$\begin{gathered} x = (x \vee y)(x \vee \bar{y}), \\ x \vee y = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}) \end{gathered}. \quad (*)$$

2. Наконец, если функция задана в СДНФ или легко может быть сведена к ней, то СКНФ можно получить, применив правило, которое рассмотрим при изложении второго метода отыскания минимальных КНФ.

3. Выполняют все возможные операции неполного склеивания и затем операции поглощения, которые для конъюнктивной формы определяются соотношениями:

$$\begin{gathered} (x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \\ x(x \vee y) = x \end{gathered}. \quad (**)$$

После выполнения этих операций будет получена сокращенная КНФ.

4. Проводят испытания членов сокращенной КНФ: исключают испытываемый член и в оставшееся выражение подставляют такие значения переменных, которые обращают исключенный член в нуль. Если при этом оставшееся выражение будет равно нулю, то испытываемый член является лишним. После исключения лишнего члена оставшееся выражение вновь проверяют на наличие лишних членов и т. д. После исключения лишних членов получают тупиковые КНФ, среди которых обязательно будет находиться минимальная КНФ (тупиковая форма с минимальным количеством букв).

5. Если сокращенная КНФ содержит большое количество членов, метод испытаний оказывается громоздким. Тогда минимальные формы удобнее получить с помощью *импликантных матриц*, которые представляют собой таблицу, в верхнюю строку которой записываются конституенты нуля, входящие в совершенную КНФ, а в левую колонку – члены, входящие в сокращенную КНФ. Клетки импликантной матрицы, находящиеся на пересечении колонки с конституентой нуля и строки с членом, который ее поглощает, отмечаются крестиками. Минимальные КНФ записываются в виде произведений, содержащих наименьшее количество членов, перекрывающих крестиками все колонки импликантной матрицы.

Пример 1. Найти минимальную КНФ функции, заданной таблицей.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(A,B,C)$	1	0	1	0	0	0	1	1

1. Представим заданную функцию в совершенной КНФ:

$$f(A,B,C)=\left(A\vee \overset{1}{B}\vee \overline{C}\right)\left(A\vee \overset{2}{\overline{B}}\vee \overline{C}\right)\left(\overline{A}\vee \overset{3}{B}\vee C\right)\left(\overline{A}\vee \overset{4}{B}\vee \overline{C}\right).$$

2. Выполним все операции склеивания и поглощения:

$1^{*}-2^{*}=A\vee \overline{C}\quad (по\ B),$

$1-4^{*}=B\vee \overline{C}\quad (по\ A),$

$3^* - 4 = \overline{A} \vee B \quad (no\ C)$.

Верхняя строка означает, что первый член $(A \vee B \vee \overline{C})$ склеивается со вторым $(A \vee \overline{B} \vee \overline{C})$ по переменной B, в результате чего получится член $A \vee \overline{C}$. Аналогичный смысл имеют и остальные строки. Члены, которые поглощаются полученными в результате склеивания членами, отмечены звездочками (поглощаются те члены, которые участвовали в склеивании). В данном примере поглощаются все четыре члена исходного выражения и сокращенная КНФ имеет вид:

$$f(A,B,C) = (A \vee \overline{C})(B \vee \overline{C})(\overline{A} \vee B).$$

3. Проведем испытания членов.

3.1. Для проверки первого члена полагаем $A = 0$ и $C = 1$ (т.к. $A \vee \overline{C} = 0 \vee \overline{1} = 0$). Подставляя в оставшееся выражение $(B \vee \overline{C})(\overline{A} \vee B)$ эти значения, получим: $(B \vee 0)(1 \vee B) = B \cdot 1 = B$. Т. к. результат не равняется тождественно нулю, то первый член не лишний.

3.2. Испытывая второй член, полагаем $B = 0$, $C = 1$ ($B \vee \overline{C} = 0 \vee 0 = 0$). Подставляя эти значения в выражение $(A \vee \overline{C})(\overline{A} \vee B)$, получаем $(A \vee 0)(\overline{A} \vee 0) = A \cdot \overline{A} = 0$. Следовательно, второй член лишний.

3.3. Аналогично убеждаемся, что третий член исключить нельзя.

Поэтому минимальная КНФ данной функции имеет вид: $f(A,B,C) = (A \vee \overline{C})(\overline{A} \vee B)$.

Пример 2. Найти минимальную КНФ функции:

$$f(A,B,C) = (A \vee \overline{C})(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)(B \vee C)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}).$$

1. Найдем совершенную КНФ данной функции, для чего применим операцию развертывания к членам $A \vee \overline{C}$ и $B \vee C$:

$$A \vee \overline{C} = (A \vee B \vee \overline{C})(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}),$$

$$B \vee C = (A \vee B \vee C)(\overline{A} \vee B \vee C).$$

Совершенная КНФ имеет вид:

$$f(A,B,C) = (A \vee \overset{1}{B} \vee \overline{C})(A \vee \overset{2}{\overline{B}} \vee \overline{C})(\overline{A} \vee \overset{3}{\overline{B}} \vee C)(A \vee \overset{4}{B} \vee C)(\overline{A} \vee \overset{5}{B} \vee C)(\overline{A} \vee \overset{6}{\overline{B}} \vee \overline{C}). \quad (1)$$

2. Выполним все операции склеивания:

$1^* - 2^* = A \vee \overline{C} \quad (по\ B)$,

$1 - 4^* = A \vee B \quad (по\ C)$,

$2 - 6^* = \overline{B} \vee \overline{C} \quad (по\ A)$, (2)

$3^* - 5^* = \overline{A} \vee C \quad (по\ B)$,

$3 - 6 = \overline{A} \vee \overline{B} \quad (по\ C)$,

$4 - 5 = B \vee C \quad (по\ A)$.

Вновь полученные члены между собой не склеиваются, поэтому сокращенная КНФ имеет вид:

$$f(A,B,C) = (A \vee \overline{C})(A \vee B)(\overline{B} \vee \overline{C})(\overline{A} \vee C)(\overline{A} \vee \overline{B})(B \vee C) \quad (3)$$

3. Для отыскания минимальных КНФ построим импликантную матрицу.

Таблица 3

№	Простые импликанты	Конституенты единицы					
		$A \vee B \vee \overline{C}$	$A \vee \overline{B} \vee \overline{C}$	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C$	$A \vee B \vee C$	$\overline{A} \vee B \vee C$	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$
1	$A \vee \overline{C}$	+	+				
2	$A \vee B$	+			+		
3	$\overline{B} \vee \overline{C}$		+				+
4	$\overline{A} \vee C$			+		+	
5	$\overline{A} \vee \overline{B}$			+			+
6	$B \vee C$				+	+	

При заполнении этой матрицы можно использовать формулу записи (2):

– в первой строке таблицы ставим крестики в 1-й и 2-й колонках;

– во второй строке – в 1-й и 4-й колонках, и т. д.

Перекрыть все колонки импликантной матрицы можно тремя членами. При этом существует два различных варианта такого перекрытия:

$A \vee \overline{C}$ – 1-я и 2-я колонки, $\overline{A} \vee \overline{B}$ – 3-я и 6-я колонки, $B \vee C$ – 4-я и 5-я колонки;

$A \vee B$ – 1-я и 4-я колонки, $\overline{B} \vee \overline{C}$ – 2-я и 6-я колонки, $\overline{A} \vee C$ – 3-я и 5-я колонки.

Т. о., заданная функция имеет две минимальные КНФ:

$$f(A,B,C) = (A \vee \overline{C})(\overline{A} \vee \overline{B})(B \vee C) ,$$

$f(A,B,C)=(A\vee B)(\overline{B}\vee\overline{C})(\overline{A}\vee C)$.

2 метод получения минимальных КНФ.

Он полностью опирается на преобразования дизъюнктивных форм булевых функций.

1. Записывают дизъюнкцию всех конституент единицы, которые не входят в совершенную ДНФ заданной функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$. Если функция задана таблицей, то в эту форму войдут конституенты единицы, соответствующие наборам аргументов, на которых функция равна нулю. Если функция задана аналитически, то в начале находят ее совершенную ДНФ, а затем записывают дизъюнкцию всех конституент, которые не вошли в эту функцию.

2. Находят минимальные ДНФ по уже известному нам алгоритму.

3. От полученных минимальных форм берут отрицание, и после преобразования по формулам де Моргана получают конъюнктивные формы, которые будут минимальными.

Приведем примеры применения изложенного алгоритма.

Пример 1. Найти минимальную КНФ функции, заданной таблицей.

Таблица 4

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(A,B,C)$	1	1	0	0	0	1	0	1

1. Затем составим дизъюнкцию конституент единицы, которые соответствуют второму, третьему, четвертому и шестому наборам, на которых функция равна нулю: $\overline{f(A,B,C)}=\overline{A}B\overline{C}\vee\overline{A}BC\vee A\overline{B}\overline{C}\vee AB\overline{C}$.

2. Выполнив операции склеивания и поглощения, получим сокращенную ДНФ функции $\overline{f(A,B,C)}$: $\overline{f(A,B,C)}=\overline{A}B\vee B\overline{C}\vee A\overline{C}$.

3. Испытывая каждый член полученного выражения, устанавливаем, что второй член можно исключить, т. к. при $B=1$, $C=0$ ($B\overline{C}=1$) выражение $\overline{A}B\vee A\overline{C}$

обращается в единицу. Т. о., минимальная ДНФ функции $\overline{f(A,B,C)}$ имеет вид: $\overline{f(A,B,C)} = \overline{A}B \vee A\overline{C}$.

Взяв от обеих частей последнего равенства отрицание и применив формулу де Моргана, получим минимальную КНФ заданной функции:

$$f(A,B,C) = \overline{\overline{A}B \vee A\overline{C}} = \left(A \vee \overline{B}\right)\left(\overline{A} \vee C\right).$$

Пример 2. Найти минимальную КНФ функции $f(A,B,C) = A\overline{C} \vee \overline{A}\overline{B}C$.

1. Найдем совершенную ДНФ, для чего умножим первый член на выражение $B \vee \overline{B} = 1$:

$$f(A,B,C) = AB\overline{C} \vee A\overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}\overline{B}C. \quad (*)$$

2. Записав дизъюнкцию всех конституент единицы, которые не вошли в выражение (*), получим совершенную ДНФ функции $\overline{f(A,B,C)}$:

$$\overline{f(A,B,C)} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee ABC. \quad (**)$$

3. Выполнив все операции склеивания и поглощения, получим сокращенную ДНФ:

$$\overline{f(A,B,C)} = \overline{A}\overline{C} \vee \overline{A}B \vee BC \vee AC. \quad (***)$$

4. Составим импликантную матрицу.

Таблица 5

№	Простые импликанты	Конституенты единицы				
		$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}C$	ABC
1	$\overline{A}\overline{C}$	+	+			
2	$\overline{A}B$		+	+		
3	BC			+		+
4	AC				+	+

Из таблицы следует, что в выражении (***) можно опустить один из двух членов – $\overline{A}B$ или BC.

Поэтому имеем две минимальные ДНФ функции $\overline{f(A,B,C)}$:

$$\overline{f(A,B,C)} = \overline{A}\overline{C} \vee BC \vee AC,$$

$$\overline{f(A,B,C)} = \overline{A}\overline{C} \vee \overline{A}B \vee AC.$$

Взяв отрицание от обеих частей последних равенств и применив формулы де Моргана, получим две минимальные КНФ:

$$f(A,B,C)=(A\vee C)(\overline{B}\vee\overline{C})(\overline{A}\vee\overline{C}),$$

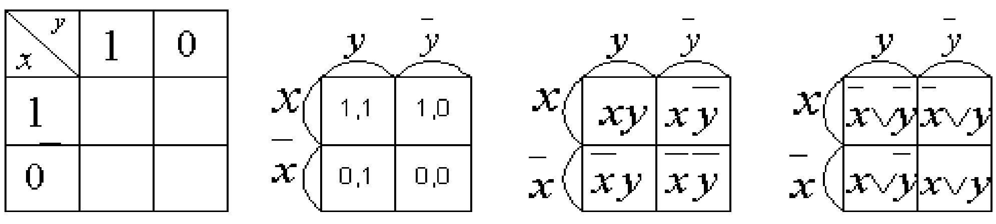
$$\overline{f(A,B,C)}=(A\vee C)(A\vee\overline{B})(\overline{A}\vee\overline{C}).$$

1.3. Минимизация булевых функций с помощью диаграмм Вейча

В рассмотренных ранее алгоритмах минимизации булевых функций процесс отыскания склеивающихся между собой членов является наиболее трудоемким, так как при выполнении операции склеивания необходимо сравнить все возможные пары членов исходного выражения. Один из наиболее удобных методов минимизации, позволяющих упростить поиск склеивающихся членов, основан на использовании *диаграмм Вейча*.

Диаграмма Вейча представляет собой несколько необычную таблицу заданной булевой функции. Расположение клеток этой таблицы позволяет легко определить склеивающиеся между собой члены.

Таблица 6



а) б) в) г)

В таблице 6а приведена форма диаграммы Вейча для булевых функций двух аргументов. Каждой клетке диаграммы соответствует определенный набор значений аргументов (таблица 6б). *Склеивающиеся* между собой *конституенты единицы или нуля* в диаграммах Вейча для функции двух переменных *расположены в соседних клетках* (табл. 6в, 6г).

Чтобы представить булеву функцию диаграммой Вейча, следует записать *единицы* в клетки таблицы 6а, соответствующие наборам, на которых функция равна единице, и *нули* – в остальные клетки.

Таблица 7

Диаграммы Вейча функций $f_3(x,y)$, $f_5(x,y)$, $f_{12}(x,y)$, $f_{10}(x,y)$.

	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$	0	0

$f_3(x,y)=x$

	y	$\bar{y}$
x	1	0
$\bar{x}$	1	0

$f_5(x,y)=y$

	y	$\bar{y}$
x	0	0
$\bar{x}$	1	1

$f_{12}(x,y)=\bar{x}$

	y	$\bar{y}$
x	0	1
$\bar{x}$	0	1

$f_{10}(x,y)=\bar{y}$

В диаграммах Вейча для булевых функций двух аргументов любая пара единиц, расположенных в соседних клетках (таблица 7), выражается *одной буквой*. Это обстоятельство используют для получения минимальных дизъюнктивных и конъюнктивных форм булевых функций. Рассмотрим, например, диаграмму Вейча функции $f_{13}(x,y)=x\to y$ (таблица 8).

Таблица 8

	y	$\bar{y}$
x	1	0
$\bar{x}$	1	1

а)

	y	$\bar{y}$
x	xy	
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\,\bar{y}$

б)

Пара единиц во второй строке таблицы 8а соответствует переменной $\bar{x}$, а пара единиц в первой колонке – переменной y. Поэтому данная функция может быть записана в виде $f_{13}(x,y)=\bar{x}\vee y$. Это выражение, являющееся минимальной формой функции $f_{13}(x,y)$, получено по существу путем склеивания конституент единицы, обведенных овалами в таблице 8б.

Диаграммы Вейча для булевых функций трех аргументов приведем в *таблице 9*.

Таблица 9

	y		$\bar y$	
x	$x\,y\,\bar z$	$x\,y\,z$	$x\,\bar y\,z$	$x\,\bar y\,\bar z$
$\bar x$	$\bar x\,y\,\bar z$	$\bar x\,y\,z$	$\bar x\,\bar y\,z$	$\bar x\,\bar y\,\bar z$
	$\bar z$	z		$\bar z$

	y		$\bar y$	
x	$\bar x\vee\bar y\vee z$	$\bar x\vee\bar y\vee\bar z$	$\bar x\vee y\vee\bar z$	$\bar x\vee y\vee z$
$\bar x$	$x\vee\bar y\vee z$	$x\vee\bar y\vee\bar z$	$x\vee y\vee\bar z$	$x\vee y\vee z$
	$\bar z$	z		$\bar z$

	y		$\bar y$	
x	1,1,0	1,1,1	1,0,1	1,0,0
$\bar x$	0,1,0	0,1,1	0,0,1	0,0,0
	$\bar z$	z		$\bar z$

Эти диаграммы следует представлять себе в виде цилиндра, образованного соединением первой и последней колонок. Тогда любая пара склеивающихся между собой конституент будет находиться в соседних клетках.

В *таблице 10* приведем диаграммы Вейча функций, которые выражаются произведением двух переменных.

Таблица 10

	y		$\bar y$	
x	1	1	0	0
$\bar x$	0	0	0	0
	$\bar z$	z		$\bar z$

а) функция $x\,y$

	y		$\bar y$	
x	0	0	0	0
$\bar x$	0	1	1	0
	$\bar z$			$\bar z$

б) функция $\bar x\,z$

	y		$\bar y$	
x	0	0	1	0
$\bar x$	0	0	1	0
	$\bar z$	z		$\bar z$

в) функция $\bar y\,z$

	y		$\bar y$	
x	0	0	0	0
$\bar x$	1	0	0	1
	$\bar z$	z		$\bar z$

г) функция $\bar x\,\bar z$

	y		$\bar{y}$	
x	1	0	0	1
$\bar{x}$	0	0	0	0
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

д) функция $x\bar{z}$

	y		$\bar{y}$	
x	0	0	1	1
$\bar{x}$	0	0	0	0
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

е) функция $x\bar{y}$

Например, в таблице 10г единицы, стоящие в первой и последней колонках, соответствующие конституентам $\bar{x}y\bar{z}$ и $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, склеиваются по переменной y и образуют произведение $\bar{x}\bar{z}$.

Четыре единицы, расположенные в соседних клетках, выражаются одной буквой (таблица 11).

Таблица 11

	y		$\bar{y}$	
x	0	1	1	0
$\bar{x}$	0	1	1	0
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

а) функция z

	y		$\bar{y}$	
x	0	0	0	0
$\bar{x}$	1	1	1	1
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

б) функция $\bar{x}$

	y		$\bar{y}$	
x	1	0	0	1
$\bar{x}$	1	0	0	1
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

в) функция $\bar{z}$

Чтобы построить диаграмму Вейча функции, заданной в совершенной ДНФ, нужно записать единицы в клетки диаграммы, которые соответствуют конституентам единицы данной функции (таблица 9а).

Если функция задана в совершенной КНФ, следует записать нули в клетки диаграммы, которые соответствуют конституентам нуля, входящим в данную функцию (таблица 9 б), а в остальных клетках записать единицы.

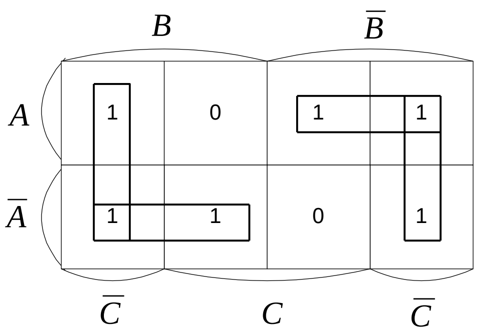
Отыскание минимальной ДНФ сводится к определению варианта, при котором *все единицы* диаграммы Вейча данной функции *накрываются наименьшим числом наиболее коротких произведений*.

Пример 1. Найти минимальные ДНФ функции.

$$f(A,B,C) = AB\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

Составим диаграмму Вейча данной функции:

Таблица 12



Четыре единицы, находящиеся в первой и последней колонках, можно накрыть переменной $\overline{C}$, а две остальные объединить с единицами, расположенными в левой нижней и правой верхней клетках диаграммы (склеивание по переменной C). Поэтому получим:

$$f(A,B,C) = \overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}B \vee A\overline{B}.$$

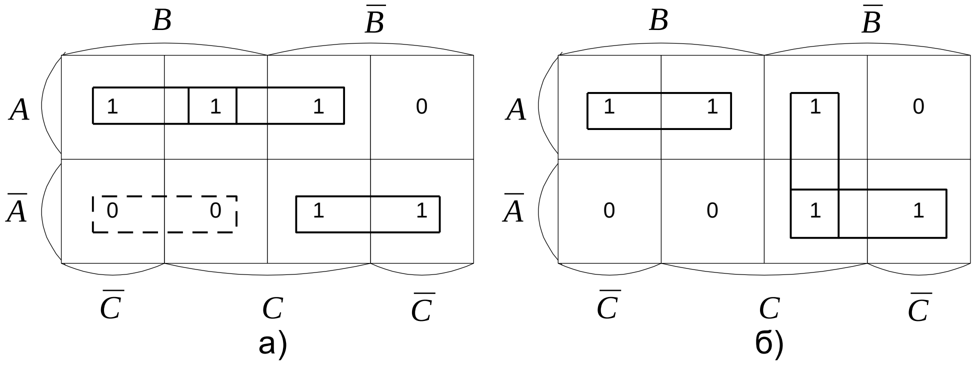
Данная функция имеет единственную минимальную форму, т. к. при любом другом способе объединения единиц количество букв в ДНФ увеличивается.

Пример 2. Найти минимальные ДНФ и КНФ функции

$$f(A,B,C) = AB\overline{C} \vee ABC \vee A\overline{B}C \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C.$$

Составим диаграмму Вейча данной функции.

Таблица 13



Объединить единицы можно двумя вариантами (таблицы 13 а и б), которым соответствуют две минимальные ДНФ:

$f(A,B,C) = AB \vee AC \vee \overline{A}\overline{B}$,

$f(A,B,C) = AB \vee \overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B}$.

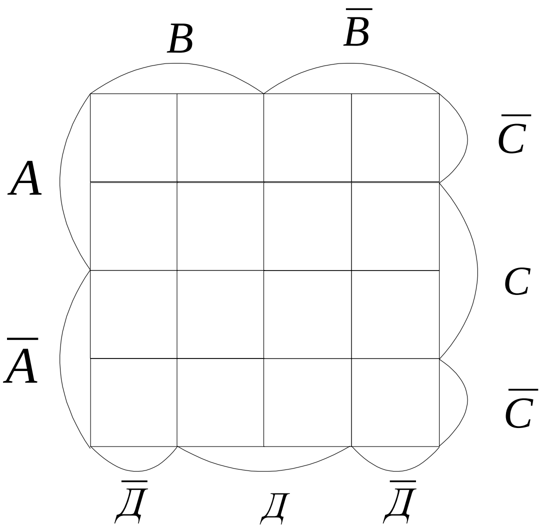
Для получения минимальной КНФ следует объединить нули булевой функции. Две конституенты нуля, соответствующие клеткам, обведенным пунктирной линией (таблица а), склеиваются по переменной C и представляются импликантой $A \vee \overline{B}$, а оставшийся нуль – коституентой $\overline{A} \vee B \vee C$.

Поэтому минимальная КНФ заданной функции будет: $f(A,B,C) = (A \vee \overline{B})(\overline{A} \vee B \vee C)$.

Заметим, что минимальная КНФ данной функции содержит меньше букв, чем минимальные ДНФ.

Диаграмма Вейча для функции четырех аргументов выглядит следующим образом (таблица 14):

Таблица 14



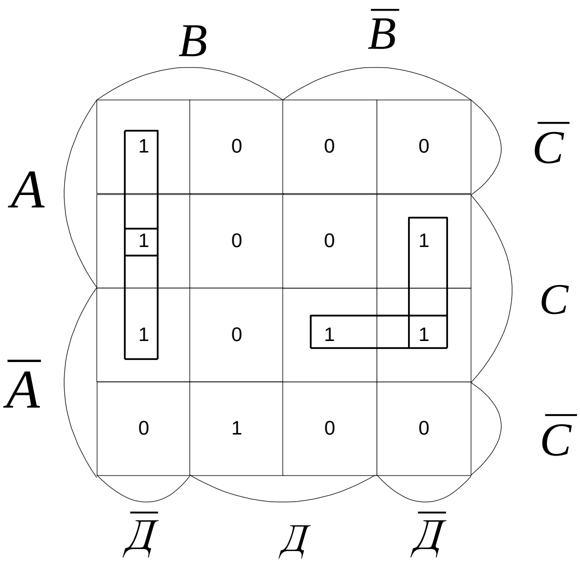
На этой диаграмме *одной букве* соответствуют 8 единиц, расположенных в соседних клетках; *произведению*, включающему *две* переменные – четыре соседних единицы; *произведению трех переменных* – две и произведению четырех переменных – одна единица. Первую и последнюю колонки диаграммы, а также верхнюю и нижнюю строки следует считать соседними.

Пример 3. Найти минимальную ДНФ функции

$$f(A,B,C,D)=AB\overline{C}\,\overline{D}\vee ABC\overline{D}\vee \overline{A}BC\overline{D}\vee \overline{A}B\overline{C}D\vee \overline{A}\,\overline{B}CD\vee A\overline{B}C\overline{D}\vee \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}.$$

Составим диаграмму Вейча этой функции и проведем накрытие единиц наиболее рациональным способом:

Таблица 15

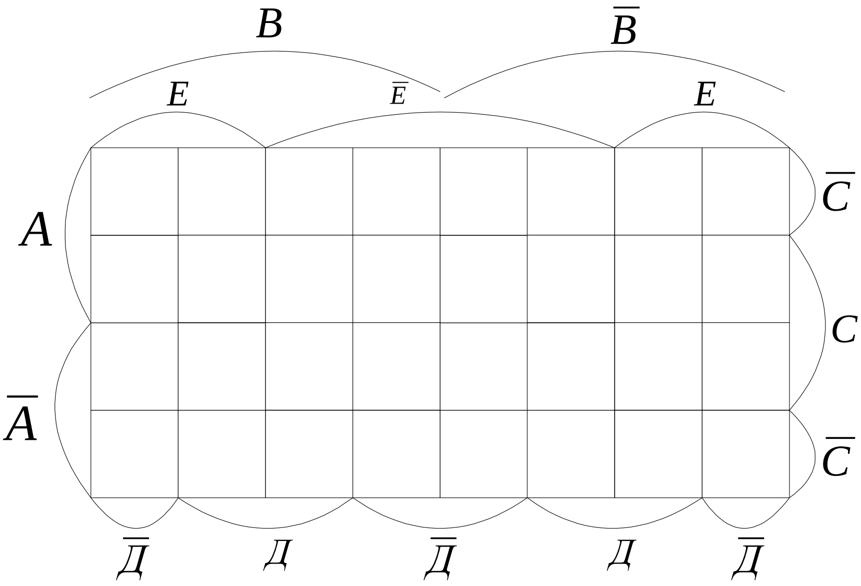


Минимальная ДНФ будет иметь вид:

$$f(A,B,C,D)=\underbrace{C\overline{D}}_{\substack{\text{накрывает}\\ \text{соседние 4}\\ \text{единицы}}}\vee\underbrace{AB\overline{D}}_{\substack{\text{склеивание}\\ \text{по } C}}\vee\underbrace{\overline{A}\,\overline{B}C}_{\substack{\text{склеивание}\\ \text{по } D}}\vee\underbrace{\overline{A}B\overline{C}D}_{\substack{\text{оставшаяся}\\ \text{единица}}}.$$

Диаграмма Вейча для булевой функции 5 аргументов имеет вид (таблица 16):

Таблица 16



На этой диаграмме *одной букве* соответствует шестнадцать единиц, расположенных в смежных клетках; *произведению двух букв* – восемь единиц; *произведению трех букв* – четыре; *произведению четырех букв* – две и *произведению пяти букв* – одна единица. Следует помнить, что для букв $\overline{C}$, D, $\overline{D}$, E «соседние» клетки оказываются разделенными.

Аналогично строятся диаграммы Вейча и для функций большего числа аргументов. Однако с увеличением количества аргументов работа с диаграммой затрудняется, т. к. теряется геометрический смысл «соседних» клеток.

1.4. Двойственность. Полнота и замкнутость систем функций

Определение. Функция $f_1(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *двойственной* к функции $f_2(x_1,x_2,...,x_n)$, если $f_1(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{f_2}(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$.

Беря отрицание над обеими частями равенства и подставляя $\overline{x_1},...,\overline{x_n}$ вместо $x_1,...,x_n$, получаем $\overline{f}_1(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})=\overline{\overline{f_2}}\left(\overline{\overline{x_1}},\overline{\overline{x_2}},...,\overline{\overline{x_n}}\right)=f_2(x_1,x_2,...,x_n)$, т.е. f_2 двойственна к f_1. Т. о., отношение двойственности между двумя функциями симметрично.

Из определения двойственности ясно, что для любой функции двойственная функция определяется однозначно. В частности, может оказаться, что функция двойственна самой себе. В этом случае она называется *самодвойственной*.

Примеры. Дизъюнкция двойственна конъюнкции (в силу правил де Моргана); константа 1 двойственна 0; отрицание – самодвойственно. Еще один традиционный пример самодвойственности функции – $xy \vee xz \vee yz$.

Пользуясь определением двойственности, нетрудно (прямой выкладкой) доказать следующее утверждение, называемое *принципом двойственности*: если в формуле F, представляющей функцию f, все знаки функций заменить соответственно на знаки двойственных функций, то полученная формула F^* будет представлять функцию f^*, двойственную f.

Если функции равны, то и двойственные им функции также равны. Это позволяет с помощью принципа двойственности получать новые эквивалентные соотношения, переходя от равенства $F_1 = F_2$ с помощью указанных замен к равенству $F_1^* = F_2^*$. Примером пары соотношений, получаемых друг из друга по принципу двойственности, являются два равенства: $x \vee xy = x$ и $x(x \vee y) = x$.

Нам известны два основных способа задания логических функций – табличный и формульный. *Таблица* задает функцию непосредственно как соответствие между двоичными наборами и значениями функции на этих наборах. Этот способ универсален, т. е. пригоден для любой функции, однако громоздок. *Формула* – гораздо более компактный способ задания функции, однако она задает функцию через другие функции. Поэтому для любой системы функций Σ возникает естественный вопрос: всякая ли логическая функция представима формулой над Σ?

Для системы $\Sigma_0 = \{\wedge, \vee, ^{-}\}$ можем дать положительный ответ. Справедлива теорема 1.

Теорема 1.

Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т. е. как суперпозиция конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Действительно, для всякой функции, кроме константы 0, таким представлением может служить ее СДНФ. Константу 0 можно представить булевой формулой $x \cdot \bar{x} = 0$.

А как решается этот вопрос для произвольной системы Σ?

Определение. Система функций Σ называется *функционально полной системой*, если любая логическая функция может быть представлена формулой над Σ, т.е. является суперпозицией функции из Σ.

Из предыдущей теоремы следует, что система $\Sigma_0 = \{\wedge, \vee, ^{-}\}$ функционально полна. Функционально полной будет и любая система Σ, через функции которой можно выразить дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.

Действительно, для любой логической функции f представляющую ее формулу над Σ можно построить так: взять булеву формулу для f (по теореме 1 такая формула обязательно найдется) и все булевы операции в ней заменить формулами над Σ, представляющими эти операции.

Аналогично доказывается и более *общее утверждение*: если все функции функционально полной системы Σ^* представимы формулами над системой Σ, то Σ также функционально полна.

В этом случае будем говорить, что Σ сводится к Σ^*.

Примеры.

А. Системы $\Sigma_1 = \{\wedge, ^{-}\}$ и $\Sigma_2 = \{\vee, ^{-}\}$ – функционально полны. Действительно, из законов де Моргана и двойного отрицания следует, что в каждой из этих двух систем недостающая до Σ_0 функция выражается через остальные две: $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$ и $x_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$.

С точки зрения функциональной полноты систему Σ_0 можно считать избыточной: она сохраняет свойства полноты и при удалении из нее дизъюнкции или конъюнкции. Правда, как видно из примера, за неизбыточность систем Σ_1 и Σ_2 приходится платить избыточностью формул: ведь каждая замена одной операции на другую по формулам де Моргана вносит в формулу лишние отрицания.

Б. Системы $\Sigma_3 = \{\,|\,\}$ (штрих Шеффера) и $\Sigma_4 = \{\downarrow\}$ (стрелка Пирса) функционально полны, т. к. из соотношений $\bar{x} = x | x = x \downarrow x$,

$x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$, $x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1 \mid x_2} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$ видно, что Σ_3 сводится к Σ_1, а Σ_4 – к Σ_2.

В. Система $\Sigma_5 = \{\wedge, \oplus, 1\}$ функционально полна, т. к. $\bar{x} = x \oplus 1$ и, следовательно, Σ_5 сводится к Σ_1.

На свойствах этой системы остановимся более подробно.

Алгебра Жегалкина и линейные функции.

Определение. Алгебра над множеством логических функций с двумя бинарными операциями $\wedge$ и $\oplus$ называется *алгеброй Жегалкина*.

В алгебре Жегалкина выполняются следующие соотношения:

$x \oplus y = y \oplus x$, (1')

$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$, (2')

$x \oplus x = 0$, (3')

$x \oplus 0 = x$, (4')

а также соотношения булевой алгебры, относящиеся к конъюнкции и константам:

$x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3$ – ассоциативность, (5')

$x_1 x_2 = x_2 x_1$ – коммутативность, (6')

$x \cdot x = x$ – идемпотентность, (7')

а) $x \wedge 1 = x$, б) $x \wedge 0 = 0$ – свойство констант. (8')

Отрицание и дизъюнкция выражаются так:

$\bar{x} = x \oplus 1$, (9')

$x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y$. (10')

Если в произвольной формуле алгебры Жегалкина раскрыть скобки и произвести все возможные упрощения по соотношениям (3'), (4'), (7'), (8'), то получится формула, имеющая *вид суммы произведений*, т. е. полином по $\mathrm{mod}\, 2$. Такая формула называется *полиномом Жегалкина* для данной функции.

От булевой формулы всегда можно перейти к формуле алгебры Жегалкина и, следовательно, полиному Жегалкина, используя равенства (9'), (10'), а также равенство, вытекающее из равенства (10'): если $f_1 f_2 = 0$, то $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2$. Оно, в частности, позволяет заменять знак дизъюнкции знаком $\oplus$ в случае, когда исходная формула – СДНФ.

Примеры:

а) $$(x_1 \vee x_2)(\overline{x_2} \vee x_1 x_3) = (x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2) \wedge (x_1 \overline{x_2} x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus \overline{x_2}) =$$
$$= x_1(x_2 \oplus 1)x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1(x_2 \oplus 1) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1.$$

б) $x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_3 = x_1 \overline{x_2} \oplus \overline{x_1} x_3 = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus (x_1 \oplus 1)x_3 = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_3$.

в) $x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} = x_1 x_2 \oplus (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

Теорема 2.

Для всякой логической функции существует полином Жегалкина, и притом единственный.

Определение. Функция, у которой полином Жегалкина имеет вид $\sum \alpha_i x_i \oplus \gamma$, где α_i, γ равны 0 или 1, называется *линейной*.

Все функции от одной переменной линейны. Линейными функциями от двух переменных являются сумма по $\mathrm{mod}\,2$ и эквивалентность.

Замкнутые классы. Монотонные функции.

Определение. Множество M логических функций называется *замкнутым классом*, если любая суперпозиция функций из M снова принадлежит M.

Всякая система Σ логических функций порождает некоторый замкнутый класс, а именно класс, состоящий из всех функций, которые можно получить суперпозициями из Σ. Такой класс называется *замыканием* Σ и обозначается $[\Sigma]$. Очевидно, что если M – замкнутый класс, то $[M] = M$, а если M – функционально полная система, то $[M] = P_2$ (множество всех логических функций).

Примеры:

а) множество всех дизъюнкций, т.е. функций вида $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$, является замкнутым классом;

б) множество всех линейных функций является замкнутым классом, т. к. подстановка формул вида $\sum \alpha_i x_i \oplus \gamma$ в формулу такого же вида снова дает формулу того же вида.

Важным примером замкнутого класса является класс монотонных функций, которые рассмотрим далее.

Ранее мы рассматривали отношение частичного порядка $\leq$ на множестве векторов одинаковой длины. Известно, что для двух векторов $\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n)$ и $\tau = (\tau_1,...,\tau_n)$ $\sigma \leq \tau$, если и только если $\sigma_i \leq \tau_i$ для всех $i = 1,...,n$.

Здесь воспользуемся этим соотношением для двоичных векторов.

Определение. Функция $f_1(x_1, x_2,..., x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двоичных наборов σ и τ длины n из того, что $\sigma \leq \tau$, следует, что $f(\sigma) \leq f(\tau)$.

Примеры:

а) константы 0, 1 и функция x – монотонны, отрицание $\bar{x}$ – немонотонно;

б) дизъюнкция и конъюнкция любого числа переменных являются монотонными функциями;

в) рассмотрим две функции от трех переменных, заданные таблицей.

Таблица 17

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f_1	0	1	0	1	1	0	0	1
f_2	0	0	1	1	0	1	1	1

Функция f_1 немонотонная, т. к. $001 < 101$, а $f_1(001) > f_1(101)$. Функция f_2 монотонная.

Проверка монотонности функции непосредственно по определению требует анализа таблицы функции и может оказаться довольно громоздким делом. Поэтому полезной для установления монотонности является следующая теорема, которую примем без доказательства.

Теорема 3.

Всякая булева формула, не содержащая отрицаний, представляет монотонную функцию, отличную от 0 и 1; и, наоборот, для любой монотонной функции, отличной от 0 и 1, найдется представляющая ее булева формула без отрицаний.

Теорема 4.

Множество всех монотонных функций является замкнутым классом.

Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы 3 и того очевидного обстоятельства, что подстановка формул без отрицаний в формулу без отрицаний снова дает формулу без отрицаний.

Следствие. Класс монотонных функций является замыканием системы функций $\{\wedge,\vee,0,1\}$.

Это утверждение вытекает из того, что всякая булева формула без отрицаний является суперпозицией дизъюнкций и конъюнкций.

Выясним, каковы необходимые и достаточные условия функциональной полноты для произвольной системы функций Σ?

Как мы уже отмечали выше, система Σ полна, если дизъюнкция, конъюнкция и отрицание являются суперпозициями функций из Σ. Поэтому будем искать свойства функций, позволяющие выразить через них булевы операции. Справедливы следующие 2 леммы.

Лемма 1 (о немонотонных функциях). Если функция $f_1(x_1,x_2,...,x_n)$ немонотонна, то подстановкой констант из нее можно получить отрицание. Точнее: существует такая подстановка $n-1$ константы, что функция оставшейся одной переменной является отрицанием.

Лемма 2 (о нелинейных функциях). Если функция $f_1(x_1,x_2,...,x_n)$ нелинейная, то с помощью подстановки констант и использования отрицаний из нее можно получить дизъюнкцию и конъюнкцию. Точнее: существует представление дизъюнкции и конъюнкции в виде суперпозиции констант, отрицаний и функции f.

Эти две леммы позволяют получить все булевы операции с помощью немонотонных функций, нелинейных функций и констант. Это еще не функциональная полнота в обычном смысле, т.к. константы с самого начала предполагались данными.

Введем ослабленное понятие функциональной полноты.

Определение. Система функций Σ называется *функционально полной в слабом смысле,* если любая логическая функция может быть представлена формулой над системой $\Sigma \cup \{0,1\}$, т. е. является суперпозицией констант и функций из Σ.

Очевидно, что из обычной полноты системы следует ее слабая полнота.

Теорема 5 (первая теорема о функциональной полноте).

Для того, чтобы система функций Σ была функционально полной в слабом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну немонотонную и хотя бы одну нелинейную функцию.

Доказательство.

Необходимость: классы монотонных и линейных функций замкнуты и содержат 0 и 1. Поэтому если Σ не содержит немонотонных и нелинейных функций, то их нельзя получить с помощью суперпозиций функций из Σ и констант.

Достаточность: пусть Σ содержит немонотонную и нелинейную функцию. Тогда по лемме 1 подстановкой констант из монотонной функции получаем отрицание, а затем по лемме 2 из нелинейной функции с помощью отрицаний и констант получаем дизъюнкцию и конъюнкцию.

Для формулировки необходимых и достаточных условий сильной полноты рассмотрим еще три замкнутых класса.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется сохраняющей 0, если $f(0,0,...,0) = 0$.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется сохраняющей 1, если $f(1,1,...,1) = 1$.

Оба класса функций, сохраняющих 0 и сохраняющих 1, являются замкнутыми, что проверяется подстановкой констант в суперпозиции.

Определение. Функция является *самодвойственной*, если $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$.

Класс самодвойственных функций тоже замкнут.

Теорема 6 (вторая, основная теорема о функциональной полноте).

Для того, чтобы система функций Σ была функционально полной (в сильном смысле), необходимо и достаточно, чтобы она содержала:

1) нелинейную функцию;

2) немонотонную функцию;

3) несамодвойственную функцию;

4) функцию, не сохраняющую 0;

5) функцию, не сохраняющую 1.

Разработанный нами курс по основам математической логики будет способствовать совершенствованию не только математической подготовки курсантов, но и их подготовки по информатике и информационным технологиям.

Список литературы

1. Садовников Н.В. Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования: монография / Н.В. Садовников. – Пенза: ПГПУ, 2005. – 283 с.

2. Садовников Н.В. Логико-математические методы в экономике: монография / Н.В. Садовников. – Пенза: ПГПУ, 2003. – 147 с.

Садовников Николай Владимирович – доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин Филиала ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Министерства обороны Российской Федерации в г. Пензе, Россия, Пенза.

Шипанова Елена Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры общепрофессиональных дисциплин Филиала ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Министерства обороны Российской Федерации в г. Пензе, Россия, Пенза.

Султанова Галия Алиевна – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин Филиала ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Министерства обороны Российской Федерации в г. Пензе, Россия, Пенза.