(cc) BY

Садовников Николай Владимирович

Шипанова Елена Викторовна

Султанова Галия Алиевна

ВЗАИМОСВЯЗЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНОСТИ И ВОЕННО-ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ВОЕННОМ ВУЗЕ

Аннотация*: раскрывается взаимосвязь принципов фундаментальности и военно-профессиональной направленности изучения элементов математической логики в военном вузе. Предложен нетрадиционный подход к изучению этого курса, в основу которого положен функциональный подход, дающий более общее представление об элементах математической логики.*

Ключевые слова*: фундаментализация подготовки военного инженера, профессионально-военная направленность обучении курсантов, двузначная логика, бесконечнозначная логика, порядковая логика, булевы функции, канонические формы булевых функций: СДНФ и СКНФ, минимизация булевых функций, простые импликанты, алгоритм Квайна получения сокращенной ДНФ булевых функций.*

Abstract*: the article reveals the relationship between the principles of fundamentality and the military-professional orientation of studying the elements of mathematical logic in a military university. An unconventional approach to the study of this course is proposed, which is based on a functional approach that gives a more general idea of the elements of mathematical logic.*

Keywords*: fundamentalization of military engineer training, professional-military orientation of cadet training, two-digit logic, infinite-value logic, ordinal logic, boolean functions, canonical forms of boolean functions: SDNF and SKNF, minimization of boolean functions, simple implicants, Quine's algorithm for obtaining abbreviated DNF of boolean functions.*

Фундаментальность является основополагающим принципом обучения в вузе, в том числе и в военном, поскольку именно знание основных

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

фундаментальных математических положений позволит курсанту в дальнейшем легко ориентироваться в математике, физике, информатике, реагировать на возможные изменения в информационных технологиях. Главная проблема состоит в разумном сочетании фундаментального, общепрофессионального и специального компонентов высшего военного образования. Применительно к подготовке офицеров в военном вузе необходима сбалансированность собственно математической и военно-технической подготовки. Говоря о соотношении фундаментальной и профессиональной составляющих в вузовском образовании, можно подчеркнуть, что трудно выбрать в качестве общепринятого определения фундаментальной науки и фундаментальной учебной дисциплины. Некоторые понимают фундаментальность как более углубленную подготовку специалиста по данному направлению «вглубь», другие – «вширь». Мы считаем, что к фундаментальным нужно относить те науки, чьи основные понятия и положения первичны, не являются следствием других наук, они непосредственно отражают, систематизируют и синтезируют в законы и закономерности факты и явления природы или общества. Образование становится фундаментальным, если оно ориентировано на выявление глубинных, сущностных оснований и связей между разнообразными процессами окружающего мира и становится целостным, когда эти общие дисциплины оказываются не просто совокупностями традиционных курсов, а образуют единые циклы фундаментальных дисциплин, объединенные общей целевой фундаментализацией, объектом исследования, методологией построения каждой из дисциплин и ориентированные на междисциплинарные связи. Наиболее оптимальным является образование, которое базируется на единстве фундаментальности и профессиональной направленности обучения. Принцип профессиональной направленности обучения является важнейшим для высшей школы, так как большинство высших школ всегда были, есть и будут (по крайней мере, в ближайшее время) профессиональными по своей сути и назначению. И, несмотря на все новомодные веяния в вузах, профессиональная составляющая в высшем образовании всегда будут иметь место. Фундаментальность образования в чистом виде для любого вуза, а тем более для военного, невозможна.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Принцип профессиональной направленности определяет общую структуру учебно-воспитательного процесса, учебные планы и учебные программы, то есть является организующим началом всего учебно-методического комплекса. Необходимость преподавания общенаучных дисциплин (математика, физика, информатика) в непосредственной взаимосвязи со специальными дисциплинами давно осознана и обоснована. При этом изложение многих дисциплин в вузах не лишено догматизма, и это не приучает студентов (курсантов) к систематическому поиску нового, к замене отживающего более современным, перспективным. Часто в процессе обучения математике не устанавливаются связи с основной специальностью курсанта. Это приводит к тому, что слушатели не воспринимают общетеоретические дисциплины как нечто абсолютно необходимое для дальнейшей работы. Содержание курсов заучивается догматически, без попыток осмыслить, как они могут быть использованы в профессиональной деятельности.

Основная цель деятельности системы высшего военного образования – подготовка специалистов высокой квалификации в соответствии с социальным заказом. Поэтому именно профессиональная деятельность специалиста задает и определяет цели изучения всех учебных дисциплин, а, значит, содержание и формы соответствующей учебной деятельности студентов (курсантов), готовящихся к этой профессии.

В учебно-методической системе вуза должны быть одновременно реализованы оба принципа: фундаментальной и профессиональной направленности обучения. В результате педагогической интеграции принципов фундаментальной и профессиональной направленности возникает «целостность», обладающая интегративным качеством, то есть несводимостью к сумме составляющих её компонентов, как самой методической системы, так и интегрирующей основы. Можно говорить о принципе единства фундаментальности и профессиональной направленности обучения как методическом принципе обучения в военном вузе.

Реализацию этого принципа рассмотрим на примере изучения элементов математической логики в курсе информатики военного вуза. В вузах предусмотрено изучение элементов математической логики, основу которой составляют

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

теория высказываний и теория предикатов. Мы разработали нетрадиционный подход к изучению этого курса, положив в основу так называемый функциональный подход, дающий более общее представление об изучаемом предмете.

Далее в контексте фундаментализации образования можно в процессе обобщения основных булевых операций совершить переход к бесконечнозначной (или многозначной) логике (БЛ).

Завершается курс изучением порядковой логики и логических определителей. Порядковая логика является более мощным математическим аппаратом по сравнению с БЛ, так как позволяет выделять любой порядковый элемент из некоторого множества C = [A, B], являющегося в общем случае замкнутым и ограниченным интервалом множества всех действительных чисел.

Содержание разработанного нами курса по изучению элементов математической логики для курсантов военных вузов состоит из трех частей.

I. Введение в логику.

1.1. Алгебра логики. Булевы функции от одной и двух переменных.

1.2. Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней.

1.3. Канонические формы булевых функций: СДНФ и СКНФ.

1.4. Понятие о минимизации булевых функций. Минимальные ДНФ и КНФ булевых функций.

1.5. Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма логических функций.

1.6. Алгоритм Квайна получения сокращенной ДНФ булевых функций.

1.7. Методы получения тупиковых и минимальных дизъюнктивных нормальных форм.

1.8. Методы получения минимальных конъюнктивных нормальных форм.

1.9. Минимизация булевых функций с помощью диаграмм Вейча.

1.10. Двойственность. Полнота и замкнутость систем функций.

II. Бесконечнозначная логика.

2.1. Переход от двузначной к бесконечнозначной логике (БЛ). Задание функции БЛ.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

2.2. Эквивалентные логические и логико-алгебраические преобразования в БЛ.

2.3. Канонические представления функций бесконечнозначной логики.

2.4. Обыкновенные уравнения и неравенства БЛ.

2.5. Методы решения уравнений и неравенств БЛ.

2.6. Типовые обыкновенные уравнения и неравенства БЛ без отрицаний.

2.7. Уравнения и неравенства БЛ с отклоняющимися аргументами.

III. Порядковая логика.

3.1. Задание функции порядковой логики.

3.2. Понятие порядкового логического определителя.

3.3. Свойства логических определителей.

3.4. Раскрытие логических определителей в дизъюнктивной форме.

3.5. Раскрытие логических определителей в конъюнктивной форме.

Несомненно, имея фундаментальный характер, данный курс несет и практическую инженерно-техническую направленность. Многие законы булевой алгебры (закон контрапозиции и др.) лежат в основе схем доказательства теорем не только школьного, но и вузовского курсов математики (например, доказательство методом от противного). Любую теорему можно представить в виде логического высказывания, имеющего форму импликации A(x) -B(x), где A(x) – условие, а B(x) – заключение теоремы. При решении задач логического характера также можно условие задачи перевести на язык логического выражения, которое с помощью эквивалентных логических преобразований приводится к каноническому виду (СДНФ или СКНФ), удобному для обратного перевода полученного ответа. На примере получения минимальных дизъюнктивных и минимальных конъюнктивных нормальных форм булевых функций можно показать межпредметные связи математики и техники, математики и экономики и т. д.

При переходе от обычной (двузначной) логики к бесконечнозначной логике (БЛ) и при переходе от БЛ к порядковой логике можно показать будущим военным инженерам-исследователям использование многих научных методов познания (в частности, обобщения, абстрагирования и др.) в научных исследованиях.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Содержание некоторых тем данного курса нами опубликовано в учебном пособии [1], а также издано в виде монографии [2]. Отметим, что подход, принятый нами при изучении главы I, отличается от традиционных подходов к изучению курса математической логики тем, что в его основу положен более общий (фундаментальный) *функциональный* подход.

Сфера применения булевой алгебры ограничена лишь изучением процессов, принимающих только два значения. В то же время большинство жизненных процессов, изучаемых с помощью математики, могут принимать несколько (или даже множество) значений. Чтобы построить аналог булевой алгебры, пригодный для изучения таких процессов, следует обобщить известные двузначные операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания на случай, когда и переменные исходные величины, и результат операции принимают значения из бесконечного (возможно непрерывного) множества. Это будет означать переход от двузначной к бесконечнозначной логике (БЛ).

Для получения нужного обобщения, заметим, что операция «конъюнкция» означает выбор наименьшего из двух двоичных чисел, операция «дизъюнкция» – выбор большего из этих чисел, а операция «отрицание» – замену имеющегося числа на симметричное с ним относительно середины отрезка [0,1]. Следующее же обобщение уже двузначной и бесконечнозначной логик приводит к *порядковой* логике. При построении БЛ в качестве базовых операций фигурировали выделение максимального (дизъюнкция) и минимального (конъюнкция) из нескольких элементов. Потребности практики часто приводят к необходимости более общих построений, когда нужно использовать выделение произвольного порядкового элемента из заданного множества. Эти новые построения составляют основу *порядковой* логики.

1.1. Алгебра логики. Булевы функции от одной и двух переменных

В этой главе важную роль будут иметь *двухэлементное множество* B и двоичные переменные, принимающие значения из B. Его элементы обычно обозначают 0 и 1, но они не являются числами в обычном смысле (т. е. обозначения 0 и 1 – символические). Наиболее распространенная интерпретация двоичных

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

переменных – логическая: «да» – «нет», «истинно» (и) – «ложно» (л). Однако логическая интерпретация двоичных переменных не является обязательной, поэтому будем считать, что $B = \{0,1\}$, рассматривая 0 и 1 и как формальные символы, не имеющие арифметического смысла.

Алгебра, образованная множеством B вместе со всеми возможными операциями на нем, называется *алгеброй логики*.

Функцией алгебры логики (или *логической функцией*) от n переменных называется n-арная операция на B.

Мы будем использовать термин «логическая функция», который более распространен в прикладной математике. Итак, *логическая функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – это функция, которая, как и ее аргументы, принимает значения 0, 1. Множество всех логических функций обозначается P_2, множество всех логических функций n переменных – $P_2(n)$. Алгебра, образованная k-элементным множеством вместе со всеми операциями на нем, называется *алгеброй k-значной логики*, а n-арные операции на k-элементном множестве называются k-значными логическими функциями n переменных; множество всех k-значных логических функций обозначается P_k.

В этой главе мы пока не будем рассматривать k-значные логики; речь пойдет только о *двузначной логике*, т. е. о функциях из P_2.

Всякая логическая функция n переменных может быть задана таблицей, в левой части которой перечислены все 2^n наборов значений переменных (т. е. двоичных векторов длины n), а в правой – значения функции на этих наборах. Например, таблица 1 задает функцию трех переменных.

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

1	1	0	0
1	1	1	0

Наборы, на которых функция $f=1$, называют *единичными наборами функции* f, а множество единичных наборов – *единичным множеством* f. Соответственно, наборы, на которых $f=0$, называют *нулевыми наборами* f.

В таблице 1 наборы расположены в определенном порядке – лексикографическом, который совпадает с порядком возрастания наборов, рассматриваемых как двоичные числа. Этим упорядочением будем пользоваться и в дальнейшем.

При любом фиксированном упорядочении наборов логическая функция n переменных полностью определяется вектором-столбцом значений функции, т. е. 2^n. Поэтому число $|P_2(n)|$ различных функций n переменных равно числу различных двоичных векторов длины 2^n, т. е. 2^{2^n}.

Например, различных логических функций от одной переменной будет $2^2=4$.

От двух переменных – $2^{2^2}=2^4=16$.

От трех переменных – $2^{2^3}=2^8=256$.

От четырех переменных – $2^{2^4}=2^{16}=65536$.

От пяти переменных – $2^{2^5}=2^{32}\approx 4{,}3\times 10^9$.

Таблица 2

x	f
0	0
0	1
1	0
1	1

Переменная x_i в функции $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ называется *несущественной* (или *фиктивной*), если $f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$ при любых значениях остальных переменных, т. е. если изменение значения x_i в любом наборе значений $x_1,\ldots,x_n$ не меняет значения функции. В этом случае

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

функция $f(x_1,...,x_n)$ по существу зависит от $n-1$ переменной, т. е. представляет собой функцию $g(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ от $n-1$ переменной. Говорят, что функция g получена из функции f удалением фиктивной переменной, а функция f получена из функции g введением фиктивной переменной, причем эти функции, по определению, считаются равными. Например, $f(x_1,x_2,x_3)=g(x_1,x_2)$ обозначает, что при любых значениях x_1 и x_2 $f=g$ независимо от значения x_3.

Смысл удаления фиктивных переменных очевиден, поскольку они не влияют на значение функции и являются с этой точки зрения лишними. Однако иногда бывает полезно вводить фиктивные переменные.

Доказанное нами выше равенство $|P_2(n)|=2^{2^n}$ справедливо при условии, что $P_2(n)$ содержит все возможные функции n переменных, в том числе и функции с фиктивными переменными.

Примеры логических функций.

1. Логических функций одной переменной – 4.

Таблица 3

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции φ_0 и φ_3 – *константы 0 и 1* соответственно; их значения не зависят от значения переменной, и, следовательно, переменная x для них несущественна (фиктивна).

Функция φ_1 «повторяет» x: $\varphi_1(x)=x$.

Функция φ_2 называется *отрицанием* x (или функцией НЕ) и обозначается $\bar{x}$; x'; $]x$; $\sim x^1$. Ее значение противоположно значению x.

2. Логических функций двух переменных – 16. Приведем их в виде таблицы 4.

Таблица 4

x_1	x_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функции ψ_0 и ψ_{15} – *константы 0 и 1*, т.е. с двумя фиктивными переменными. Формально эти функции отличаются от φ_0 и φ_3 из предыдущего примера, т. к. в предыдущем примере все функции – *унарные* операции на B, а все функции во втором примере – *бинарные* операции на B. Однако мы ранее условились, функции, отличающиеся лишь несущественными переменными, считать равными.

Функция ψ_1 называется *конъюнкцией* x_1 и x_2; ее обозначения: $x_1 \wedge x_2; x_1 \cdot x_2$, $x_1 \& x_2$ (или просто x_1x_2). Она равна 1, если x_1 и x_2 равны 1, поэтому ее называют функцией И (или *логическим умножением*).

Функция ψ_7 называется *дизъюнкцией* x_1 и x_2; ее обозначения: $x_1 \vee x_2; x_1 + x_2$. Она равна 1, если x_1 или x_2 равны 1 (т. е. хотя бы одна переменная из двух). Поэтому ее часто называют функцией ИЛИ.

Функция ψ_6 – это *сложение по модулю 2*. Ее обозначения: $x_1 \oplus x_2; x_1 \Delta x_2$, $x_1 \not\equiv x_2$. Она равна 1, когда значения ее аргументов различны, и равна 0, когда они равны. Поэтому эту функцию иногда называют *неравнозначностью*.

Функция ψ_9 называется *эквивалентностью*, или равнозначностью. Ее обозначения: $x_1 \equiv x_2$, $x_1 \sim x_2$. Она равна 1, когда значения ее аргументов равны, и равна 0, когда они различны.

Функция ψ_{13} – *импликация*, ее обозначения – $x_1 \to x_2; x_1 \supset x_2$. Читается «если - x_1, то x_2».

Функция ψ_8 – *стрелка Пирса*; обозначение – $x_1 \downarrow x_2$.

Функция ψ_{14} – *штрих Шеффера*; обозначение – $x_1 | x_2$.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Остальные функции специальных названий не имеют. В функциях ψ_3 и ψ_{12} переменная x_2 фиктивна; из таблицы видно, что $\psi_3(x_1,x_2)=x_1$; $\psi_{12}(x_1,x_2)=\overline{x_1}$. В функциях ψ_5 и ψ_{10} фиктивная переменная x_1: $\psi_5(x_1,x_2)=x_2$, $\psi_{10}(x_1,x_2)=\overline{x_2}$.

Из 16-ти функций двух переменных 6 функций имеют фиктивные переменные. С ростом числа переменных n доля функций, имеющих фиктивные переменные, убывает и стремится к нулю.

1.2. Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней

Напомним, что *суперпозицией функций* $f_1,...,f_m$ называется функция f, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга и переименования переменных, а *формулой* называется выражение, описывающее эту суперпозицию.

Всякая формула, выражающая функцию f как суперпозицию других функций, задает способ ее вычисления (при условии, что известно, как вычислить исходные функции).

Вычислим формулу:

$$(x_3 \vee x_1)\oplus(x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2)) \qquad (1.1)$$

на наборе $x_1=1; x_2=1; x_3=0$. Получим, используя таблицу 3:

$$x_3 \vee x_1 = 1;\ x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2) = x_1 \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0;\ (x_3 \vee x)\oplus(x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2)) = 1 \oplus 0 = 1.$$

Т. о., *формула* каждому набору значений аргументов ставит в соответствие значение функции, и, следовательно, может служить наряду с таблицей способом задания и вычисления функции. В частности, по формуле, вычисляя ее на всех 2^n наборах, можно восстановить таблицу функции. О формуле, задающей функцию, говорят также, что она *реализует* или *представляет* эту функцию.

В отличие от таблицы представление данной функции формулой не единственное. Например, *функцию штрих Шеффера* можно представить формулами $\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ и $\overline{x_1 \wedge x_2}$, а *функцию стрелка Пирса* – формулами $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$ и $\overline{x_1 \vee x_2}$.

Формулы, представляющие одну и туже функцию, называются *эквивалентными* или *равносильными*.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Эквивалентность формул будем обозначать знаком равенства, например, $\psi_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \overline{x_1 \wedge x_2}$.

Существует *стандартный метод выяснения эквивалентности* двух формул: по каждой формуле восстанавливается *таблица* функции, а затем полученные две таблицы сравниваются. На практике он слишком громоздок, требует 2×2^n вычислений (если считать, что обе формулы зависят от n переменных), поэтому чуть позже мы рассмотрим другой метод установления эквивалентности двух или нескольких формул.

Алгебра $(P_2; \vee, \wedge, ^{-})$, основным множеством которой является все множество логических функций, а операциями – дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, называется *булевой алгеброй логических функций*.

Операции булевой алгебры также часто называют *булевыми операциями*.

Рассмотрим *основные свойства* булевых операций:

– ассоциативность:

а) $x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3$; б) $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$. (1.2)

– коммутативность:

а) $x_1x_2 = x_2x_1$; б) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$. (1.3)

– дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции:

$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3$. (1.4)

– дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции:

$x_1 \vee (x_2x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$. (1.5)

– идемпотентность:

а) $x \cdot x = x$; б) $x \vee x = x$ (1.6)

– двойное отрицание: $\overline{\overline{x}} = x$. (1.7)

– свойства констант:

а) $x \wedge 1 = x$; б) $x \wedge 0 = 0$; в) $x \vee 1 = 1$; г) $x \vee 0 = x$; д) $\overline{0} = 1$; е) $\overline{1} = 0$. (1.8)

– правила де Моргана:

а) $\overline{x_1x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$; б) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$. (1.9)

– закон противоречия: $x\overline{x} = 0$. (1.10)

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

– закон «исключенного третьего»: $x \vee \overline{x} = 1$. (1.11)

Соотношения (1.2) – (1.11) можно проверить указанным ранее стандартным методом – вычислением обеих частей равенств на всех наборах значений переменных. Результат вычисления не зависит от того, как получены значения переменных, входящих в эти равенства, т. е. от того, являются ли эти переменные независимыми или, в свою очередь, получены в результате каких-то вычислений. Поэтому равенства (1.2) – (1.11) остаются справедливыми при подстановке вместо переменных любых логических функций и, следовательно, любых формул, представляющих эти функции.

Важно лишь соблюдать следующее *правило подстановки* формул вместо переменной: при подстановке формулы F вместо переменной x все вхождения переменной x в исходное соотношение должны быть *одновременно* заменены формулой F. Например, соотношение $F \vee \overline{F} = 1$, полученное из (1.11), верно для любых F, а соотношение $F \vee \overline{x} = 1$ получено из (1.11) с нарушением правила подстановки и для некоторых F может оказаться неверным. Правило подстановки позволяет получать из соотношений (1.2) – (1.11) новые эквивалентные соотношения.

Кроме правила подстановки при эквивалентных преобразованиях используется *правило замены подформул*: при замене подформул может быть заменена *любая* подформула, однако не на любую другую, а только на эквивалентную ей. При этом замена всех вхождений исходной подформулы не обязательна.

Пример 1.1. Возьмем первое из соотношений (1.9) $\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ и подставим $\overline{x_1} x_3$ вместо x_1. Получим $\overline{\overline{x_1} x_2 x_3} = \overline{\overline{x_1} x_3} \vee \overline{x_2}$, т. е. две формулы, неэквивалентные исходным, но эквивалентные между собой. Если же в правой части нового соотношения $\overline{\overline{x_1} x_3}$ заменить формулой $\overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_3}$, эквивалентной ей в силу (1.9), а в полученной подформуле $\overline{\overline{x_1}}$ заменить на эквивалентную ей в силу (1.7) формулу x_1, то все формулы в построенной цепи преобразований эквивалентны: $\overline{\overline{x_1} x_2 x_3} \Rightarrow \overline{\overline{x_1} x_3} \vee \overline{x_2} \Rightarrow \overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \Rightarrow x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2}$.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Такие преобразования, использующие эквивалентные соотношения (запас которых можно расширять с помощью правила подстановки) и правило замены, называются *эквивалентными преобразованиями*.

Эквивалентные преобразования являются более эффективным средством доказательства эквивалентности формул, чем их вычисление на наборах значений переменных.

Рассмотрим некоторые *основные эквивалентные преобразования* в булевой алгебре и новые соотношения, получаемые с их помощью из (1.2) – (1.11):

а) *поглощение:*

$$x \vee xy = x, \tag{1.12а}$$

$$x(x \vee y) = x. \tag{1.12б}$$

Докажем подробно первое равенство. Для его доказательства используем последовательно соотношения (1.8а), (1.4), (1.8в), (1.8а).

$$x \vee xy = x \wedge 1 \vee xy = x(1 \vee y) = x \wedge 1 = x.$$

Второе равенство доказывается с помощью (1.4), (1.7) и первого равенства.

$$x(x \vee y) = xx \vee xy = x \vee xy = x.$$

б) *склеивание:*

$$xy \vee x\bar{y} = x. \tag{1.13}$$

Доказательство: $xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x \wedge 1 = x$.

в) *обобщенное склеивание:*

$$xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}. \tag{1.14}$$

Доказывается с помощью расщепления, т. е. применения (1.13) в обратную сторону и поглощения (1.12).

$$xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z} \vee \underbrace{xyz \vee xy\bar{z}}_{y = yz \vee y\bar{z}} = xz \vee y\bar{z}.$$

г) $x \vee \bar{x}y = x \vee y$. (1.15)

Доказательство: $x \vee \bar{x}y = xy \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} = \underbrace{xy \vee x\bar{y}}_{x} \vee \underbrace{xy \vee \bar{x}y}_{y} = x \vee y$.

д) обобщением равенств (1.12) и (1.15) является равенство:

$$x_1 \vee f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \vee f(0, x_2, ..., x_n). \tag{1.16}$$

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

При доказательстве используется разложение по x_1, (1.12), (1.15):

$$x_1 \vee f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \vee \overline{x_1} f(0, x_2, ..., x_n) \vee x_1 f(1, x_2, ..., x_n) = x_1 \vee f(0, x_2, ..., x_n).$$

1.3. Канонические формы булевых функций. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) булевых функций

Кроме задания булевой функции с помощью *таблицы*, *формулы* алгебры логики, существует *каноническая* форма представления булевых функций.

Выделяют две основные канонические формы булевых функций:

– совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ);

– совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

Предварительно введем понятия конституенты единицы и конституенты нуля.

Определение. Конституентой единицы называют булеву функцию n аргументов, которая принимает значение, равное 1, только на одном наборе аргументов.

Определение. Конституентой нуля называют булеву функцию n аргументов, которая принимает значение, равное 0, только на одном наборе аргументов.

Среди функций двух аргументов имеется четыре конституенты единицы. Ими являются функции ψ_1, ψ_2, ψ_4, ψ_8 (см. таблицу 3). Будем обозначать конституенты единицы буквой K с индексом, равным номеру набора, на котором конституента равна 1. $K_0(x_1, x_2) = \psi_8(x_1, x_2)$, $K_1(x_1, x_2) = \psi_4(x_1, x_2)$, $K_2(x_1, x_2) = \psi_2(x_1, x_2)$, $K_3(x_1, x_2) = \psi_1(x_1, x_2)$. В дальнейшем для удобства булевы функции будем обозначать не ψ, а привычно буквой $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Чаще всего булевы функции задаются таблицей ее значений на всех возможных наборах аргументов. Если функция задана формулой алгебры логики, то всегда можно перейти к ее табличному представлению.

В общем виде функция n аргументов $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ может быть задана таблицей 5:

Таблица 5

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

x_1	0	0	0	0	…	1	1
x_2	0	0	0	0	…	1	1
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	0	0	0	0	…	1	1
…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n-1}	0	0	1	1	…	1	1
x_n	0	1	0	1	…	0	1
$f(x_1, x_2, ..., x_n)$	f_0	f_1	f_2	f_3	…	f_{2^n-2}	f_{2^n-1}

В этой таблице каждая из величин $f_i(i = 0,1,...,2^n - 1)$ принимает значение 1 или 0.

В соответствие i-тому набору аргументов можно поставить конституенту единицы K_i, которая принимает значение, равное 1 только на данном (i-том) наборе. Умножим каждую K_i на значение функции f_i и рассмотрим дизъюнкцию произведений $f_i K_i$:

$$f_0 K_0 \vee f_1 K_1 \vee ... \vee f_i K_i \vee ... \vee f_{2^n-1} K_{2^n-1} = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} f_i K_i \quad (1.17)$$

Если подставить в выражение (1.17) значения f_i, то получим дизъюнкцию конституент, которые равны 1 на тех наборах, что и заданная функция.

Действительно, в виду того, что $0 \cdot x = 0$ и $0 \vee x = x$, члены выражения (1.17), в которых коэффициент $f_i = 0$, можно опустить, а так как $1 \cdot x = x$, то коэффициент $f_i = 1$ можно не писать. Тогда:

$$\bigcup_{i=0}^{2^n-1} f_i K_i = K_{j1} \vee K_{j2} \vee ... \vee K_{jm}, \quad (1.18)$$

где $j_1,..., j_m$ – номера наборов, на которых функция равна 1; m – число таких наборов.

Определение. Дизъюнкция конституент единицы, равная единице на тех же наборах, что и заданная функция, называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* булевой функции (СДНФ).

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Теорема. Любая булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (кроме константы нуль) может быть представлена в совершенной дизъюнктивной нормальной форме:

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = K_{j1} \vee K_{j2} \vee ... \vee K_{jm}$. (1.19)

Доказательство.

Возьмем некоторый набор аргументов, например набор с номером l, и подставим значения аргументов этого набора в левую и правую части равенства (1.19). Если значение функции f_i на этом наборе равно 0, то и правая часть (1.19) будет равна 0, т. к. СДНФ этой функции не содержит конституенты с индексом l, а все остальные конституенты на этом наборе равны нулю.

Если $f_i = 1$, то правая часть равенства (1.19) содержит конституенту с индексом l, равную на данном наборе единице. Но если хотя бы один член дизъюнктивной нормальной формы равен 1, то 1 равна и вся дизъюнктивная форма. Таким образом, на любых наборах аргументов правая часть (1.19) совпадает со значением функции, что и доказывает теорему.

Примечание. Любая булева функция имеет *единственную СДНФ*, это следует непосредственно из (1.19).

Пример 1. Представить в СДНФ функцию $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 | x_2$.

Решение. Зададим $f_{14}(x_1, x_2)$ таблицей 6.

Таблица 6

Номер набора	x_1	x_2	$f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$	K_i
0	0	0	$f_0 = 1$	$K_0 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$
1	0	1	$f_1 = 1$	$K_1 = \overline{x_1} \cdot x_2$
2	1	0	$f_2 = 1$	$K_2 = x_1 \cdot \overline{x_2}$
3	1	1	$f_3 = 0$	$K_3 = x_1 \cdot x_2$

Запишем в общем виде СДНФ булевых функций двух аргументов.

$f(x_1, x_2) = f_0 K_0 \vee f_1 K_1 \vee f_2 K_2 \vee f_3 K_3$.

Подставим в это выражение значения функции f_i из таблицы.

$f_{14}(x_1, x_2) = 1 \cdot K_0 \vee 1 \cdot K_1 \vee 1 \cdot K_2 \vee 0 \cdot K_3 = K_0 \vee K_1 \vee K_2$

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Выразив конституенты единицы через произведения x_1 и x_2 (смотри последнюю колонку таблицы), найдем СДНФ функции $f_{14}(x_1, x_2)$.

$$f_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x_2}$$

Пример 2. Представим в СДНФ $f_6(x, y) = x \oplus y$.

Таблица 7

Номер набора	x	y	$f_6(x, y) = x \oplus y$	K_i
0	0	0	$f_0 = 0$	$K_0 = \overline{x} \cdot \overline{y}$
1	0	1	$f_1 = 1$	$K_1 = \overline{x} \cdot y$
2	1	0	$f_2 = 1$	$K_2 = x \cdot \overline{y}$
3	1	1	$f_3 = 0$	$K_3 = x \cdot y$

Тогда $f_6(x, y) = K_1 \vee K_2 = \overline{x}y \vee x\overline{y}$.

Совершенную дизъюнктивную нормальную форму булевой функции удобно находить в такой последовательности:

1. Выписать ряд произведений всех аргументов и соединить их знаками дизъюнкции; количество произведений должно равняться числу наборов, на которых заданная функция обращается в единицу.

2. Записать под каждым произведением набор аргументов, на котором функция равна единице, и над аргументами, равными нулю, поставить знаки отрицания.

Это есть *правило записи булевой функции по единицам*.

Пример 3. Представить в СДНФ функцию пяти аргументов $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, равную единице на следующих четырех наборах: (0, 0, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 1, 1); (1, 0, 0, 0, 0); (1, 1, 1, 1, 1).

Запишем четыре произведения аргументов и под каждым из них один из перечисленных наборов: $\underset{0}{x_1}\,\underset{0}{x_2}\,\underset{1}{x_3}\,\underset{0}{x_4}\,\underset{1}{x_5} \vee \underset{0}{x_1}\,\underset{1}{x_2}\,\underset{1}{x_3}\,\underset{1}{x_4}\,\underset{1}{x_5} \vee \underset{1}{x_1}\,\underset{0}{x_2}\,\underset{0}{x_3}\,\underset{0}{x_4}\,\underset{0}{x_5} \vee \underset{1}{x_1}\,\underset{1}{x_2}\,\underset{1}{x_3}\,\underset{1}{x_4}\,\underset{1}{x_5}$.

Расставляя отрицания над аргументами, которые равны 0, получим:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4}x_5 \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1x_2x_3x_4x_5.$$

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Если заданная булева функция равна 1 на большинстве наборов аргументов, то представление функции в СДНФ может оказаться громоздким. В этих случаях удобнее использовать другую форму представления функции – совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ). Для этого необходимы *конституенты нуля*.

Среди функций двух аргументов имеются четыре конституенты нуля (см. таблицу 3): ψ_7, ψ_{11}, ψ_{13}, ψ_{14}. В дальнейшем будем обозначать конституенты нуля буквой M с индексом, равным номеру набора, на котором конституента обращается в нуль, а сами булевы функции f. Например, для функций двух аргументов можно записать: $f_7(x,y)=M_0$, $f_{11}(x,y)=M_1$, $f_{13}(x,y)=M_2$, $f_{14}(x,y)=M_3$. Конституенты нуля можно выразить в виде дизъюнкции всех аргументов, часть из которых берется с отрицаниями. Отрицания расставляются так, чтобы обратить эту дизъюнкцию в нуль на нужном наборе. Например, для конституент нуля для двух переменных получим:

$M_0 = x \vee y$ равно нулю только при $x=0,\ y=0$, т.е. на нулевом наборе (0;0);

$M_1 = x \vee \bar{y}$ равно нулю при $x=0,\ y=1$, т.е. на первом наборе (0;1);

$M_2 = \bar{x} \vee y$ равно нулю при $x=1,\ y=0$, т.е. на втором наборе (1;0);

$M_3 = \bar{x} \vee \bar{y}$ равно нулю при $x=1,\ y=1$, т.е. на третьем наборе (1;1).

Вообще, чтобы записать конституенту нуля, равную 0 на m-том наборе, нужно в дизъюнкции всех аргументов расставить отрицания над теми аргументами, которые на наборе с номером m принимают значения, равные 1. Таким образом, в конституенте нуля отрицания ставятся над теми аргументами, над которыми в конституенте единицы с тем же индексом отрицаний нет.

Пример 4. Записать конституенту нуля, равную нулю на одиннадцатом наборе; число аргументов равно 6.

Нулевой набор: 000000; 000100; 001000;

Первый набор: 000001; 000101; 001001;

…….: 000010; 000110; 001010;

…….: 000011; 000111; 001011 – одиннадцатый набор.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Запишем дизъюнкцию шести аргументов и под ней набор, на котором конституента равна нулю, т. е. (0, 0, 1, 0, 1, 1).

$$\underset{0}{x_1} \vee \underset{0}{x_2} \vee \underset{1}{x_3} \vee \underset{0}{x_4} \vee \underset{1}{x_5} \vee \underset{1}{x_6}$$

Расставляя отрицания над переменными, равными 1, получаем искомую конституенту нуля:

$$M_{11} = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_6}\,.$$

Рассмотрим выражение:

$$(f_0 \vee M_0)(f_1 \vee M_1)\ldots(f_{2^n-1} \vee M_{2^n-1}) = \prod_{i=0}^{2^n-1}(f_i \vee M_i), \text{ (1.20)}$$

где f_i – значение некоторой булевой функции на i-том наборе.

В виду справедливости соотношений $1 \vee x = 1$ и $0 \vee x = x$ при подстановке в (1.20) значений функции f_i сомножители, у которых $f_i = 1$, можно опустить, а значения функции $f_i = 0$ не писать.

$$\prod_{i=0}^{2^n-1}(f_i \vee M_i) = M_{j1}M_{j2}\ldots M_{jm}, \text{ (1.21)}$$

где $j_1,\ldots,j_m$ - номера наборов, на которых функция равна нулю; m – число таких наборов.

Определение. Произведение конституент нуля, которые равны нулю на тех же наборах, что и заданная функция, называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ).

Теорема. Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (кроме константы 1) может быть представлена в совершенной конъюнктивной нормальной форме.

$$f(x_1,\ldots,x_n) = M_{j1}M_{j2}\ldots M_{jm} \text{ (1.22)}$$

Для доказательства теоремы возьмем некоторый набор, например набор с номером l, и подставим значения аргументов этого набора в левую и правую части (1.22). Если значение функции на этом наборе равно нулю, то и правая часть (1.22) равняется нулю, т. е. в СКНФ входит в качестве сомножителя конституента нуля M_i, равная нулю. Если же функция на этом наборе равна единице, то

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

и правая часть равна единице, т. к. она не содержит сомножителя, равного нулю. Т. о., на любых наборах правая часть (1.22) равняется значению функции.

Любая булева функция имеет единственную совершенную конъюнктивную нормальную форму.

Правило. Чтобы представить логическую функцию n аргументов в СКНФ, достаточно:

1. Вписать произведение дизъюнкций всех аргументов с количеством сомножителей, равным числу наборов, на которых заданная функция обращается в нуль.

2. Вписать под каждым сомножителем набор аргументов, на котором функция равна нулю, и над аргументами, равными единице, поставить знаки отрицания.

Это правило называю т правилом записи булевой функции *по нулям*.

Пример 5. а) представить в СКНФ функцию трех аргументов, заданную следующей таблицей 8:

Таблица 8

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(A,B,C)$	0	1	1	0	1	0	1	1

Видим, что функция равна нулю на трех наборах аргументов. Поэтому запишем три сомножителя, каждый из которых представляет собой дизъюнкцию всех аргументов, и под ними наборы, на которых функция равна нулю.

$$\left(\underset{0}{A}\vee\underset{0}{B}\vee\underset{0}{C}\right)\left(\underset{0}{A}\vee\underset{1}{B}\vee\underset{1}{C}\right)\left(\underset{1}{A}\vee\underset{0}{B}\vee\underset{1}{C}\right)$$

Расставляя знаки отрицания над аргументами, равными 1, получим:

$$f(A,B,C)=(A\vee B\vee C)\left(A\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)\left(\overline{A}\vee B\vee\overline{C}\right).$$

б) представить в СКНФ логическую функцию четырех аргументов $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, равную нулю на наборах (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1).

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

СКНФ данной функции имеет вид:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\underset{0}{x_1}\vee\underset{0}{x_2}\vee\underset{1}{\overline{x_3}}\vee\underset{1}{\overline{x_4}}\right)\left(\underset{0}{x_1}\vee\underset{1}{\overline{x_2}}\vee\underset{1}{\overline{x_3}}\vee\underset{1}{\overline{x_4}}\right)\left(\underset{1}{\overline{x_1}}\vee\underset{0}{x_2}\vee\underset{0}{x_3}\vee\underset{0}{x_4}\right)\left(\underset{1}{\overline{x_1}}\vee\underset{1}{\overline{x_2}}\vee\underset{1}{\overline{x_3}}\vee\underset{1}{\overline{x_4}}\right).$$

Константа 1 – единственная логическая функция, не имеющая СКНФ. Однако ее можно представить через булевы функции основной системы, например в форме $x\vee\overline{x}=1$.

1.4. Понятие о минимизации булевых функций. Минимальные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы булевых функций

Рассмотренные ранее СДНФ и СКНФ используются для первоначального представления заданной логической функции через функции основной системы. Однако эти формы достаточно громоздки (это особенно неудобно для построения логических схем всевозможных технических устройств, т. к. схемы, реализующие эти формы, сложны, т. е. содержат элементы, которые можно исключить при синтезе схем, исходя из других форм представления функции).

Проиллюстрируем это на примере $f_3(x_1,x_2)$.

СДНФ: $f_3(x_1,x_2)=\overline{x_1}x_2\vee x_1x_2$.

СКНФ: $f_3(x_1,x_2)=(x_1\vee x_2)\left(x_1\vee\overline{x_2}\right)$.

Проще всего эту функцию можно представить $f_3(x_1,x_2)=x_1$ (т. е. значение этой функции всегда совпадает со значением аргумента x_1).

Поэтому первоочередная задача синтеза логических схем состоит в упрощении выражений для логических функций. Этот этап называют *минимизацией* булевых функций.

Пусть имеется набор n переменных $x_1,x_2,...,x_n$. Из этих переменных и их отрицаний можно образовать различные произведения (конъюнкции), например $x_1\overline{x_2}$, $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$, $x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$ и т. д.

Определение. Произведение нескольких переменных, взятых с отрицаниями или без них, называют элементарным произведением (*элементарной конъюнкцией*).

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Одну переменную (или ее отрицание), например x_1, $\overline{x_3}$, также будем считать элементарной конъюнкцией. В виду равенства $x \cdot x = x$ в элементарной конъюнкции один и тот же множитель дважды не повторяется.

Определение. Дизъюнктивной нормальной формой (произвольной) называется дизъюнкция любых элементарных конъюнкций.

Кроме *нормальных* дизъюнктивных форм могут быть и другие дизъюнктивные формы.

Например, дизъюнктивную форму $\overline{xy} \vee \overline{x}z \vee \overline{xy}$ нельзя назвать нормальной, т. к. член $\overline{xy}$ не является элементарным произведением.

Определение. Дизъюнктивная нормальная форма заданной функции называется *минимальной*, если количество букв, которое она содержит, будет не больше, чем в любой другой дизъюнктивной нормальной форме той же функции.

В определении речь идет о минимальном числе букв, а не переменных. Например, дизъюнктивная нормальная форма $xy \vee x\overline{y}z \vee yz$ содержит 7 букв, но 3 переменных (x, y, z).

Некоторые булевы функции имеют несколько минимальных дизъюнктивных нормальных форм.

Понятие минимальной конъюнктивной нормальной формы представления логической функции вводится аналогично.

Определение. Дизъюнкция переменных, часть из которых может иметь отрицания, называется *элементарной дизъюнкцией*.

Например, для четырех переменных x_1, x_2, x_3, x_4 элементарными дизъюнкциями будут $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$, $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4$ и т. п.

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой* (произвольной) называется конъюнкция любых элементарных дизъюнкций.

Существуют конъюнктивные формы, отличные от нормальной; например, форму $(x \vee yz)\left(\overline{x} \vee \overline{y}\right)\left(x \vee \overline{y}\right)$ нельзя назвать нормальной, т. к. член $x \vee yz$ не является элементарной дизъюнкцией.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Определение. Конъюнктивная нормальная форма задания булевой функции называется *минимальной*, если количество букв, которые она содержит, будет не больше, чем в любой другой конъюнктивной нормальной форме той же функции.

Минимальные формы представления логических функций могут быть найдены:

а) *аналитическими* методами;

б) с помощью так называемых *минимизирующих карт*.

Аналитически *минимальные ДНФ и КНФ* получают в следующей последовательности:

1. Находят *сокращенную* дизъюнктивную (конъюнктивную) нормальную форму (она единственная).

2. Находят все возможные тупиковые дизъюнктивные (конъюнктивные) нормальные формы.

3. Из полученных тупиковых форм выбирают минимальные дизъюнктивные (конъюнктивные) нормальные формы.

1.5. Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма логических функций

Пусть на каком-либо наборе аргументов функция f принимает значение a_1, а функция φ – значение a_2. Тогда говорят, что функция f на данном наборе *накрывает* значение a_2 функции φ своим значением a_1.

Рассмотренная нами ранее совершенная ДНФ строится так, что каждая единица заданной булевой функции накрывается единицей *одного и только одного произведения*, являющегося конституентой единицы. Поэтому количество конституент единицы, входящих в совершенную ДНФ, равняется числу наборов, на которых функция равна единице.

Идея построения *сокращенной* ДНФ заключается в том, что в нее включаются элементарные произведения, которые *накрывают своими единицами не одну, а несколько единиц заданной функции*.

Например, совершенная ДНФ функции $f_{11}(x,y)$ имеет вид: $f_{11}(x,y)=\bar{x}\bar{y}\vee x\bar{y}\vee xy$.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Каждое из произведений, входящих в эту форму, накрывает только одну единицу функции. Однако накрыть единицы функции $f_{11}(x,y)$ можно и более короткими произведениями (см. таблицу 3). Например, элементарное произведение, состоящее из одной буквы x, обращается вместе с функцией $f_{11}(x,y)$ в единицу на двух наборах: (1, 0) и (1, 1), а элементарное произведение $\bar{y}$ – на наборах (0, 0) и (1, 0). Поэтому элементарные произведения x и $\bar{y}$ совместно накрывают единицами все единицы функции $f_{11}(x,y)$, которая вследствие этого может быть представлена в форме $f_{11}(x,y) = x \vee \bar{y}$.

Определение. Если некоторая логическая функция φ (в частном случае элементарное произведение) равна нулю на тех же наборах, на которых равняется нулю другая функция f, то говорят, что *функция φ входит в функцию f*.

Другими словами, функция φ входит в функцию f тогда, когда она накрывает нулями все нули функции f, а единицы функции f могут быть накрыты как нулями, так и единицами функции φ. Следовательно, функция φ имеет не меньшее количество нулей, чем функция f.

Условие вхождения записывается: $\varphi \subset f$.

Например, в функцию $f_6(x,y)$ (см. таблицу 3) будут входить все функции, принимающие значения, равные 0 на наборах (0, 0) и (1, 1), т. е. функции $f_4(x,y) = \bar{x}y$, $f_2(x,y) = x\bar{y}$ и $f_0(x,y) = 0$. Поэтому можно записать $\bar{x}y \subset f_6(x,y)$, $x\bar{y} \subset f_6(x,y)$, $0 \subset f_6(x,y)$. Константа нуль входит, очевидно, в любую булеву функцию, а в константу единица входят все функции.

Определение. Функцию φ, входящую в данную функцию f, называют ее *импликантой*.

Применение термина «импликанта» связано с логической функцией $f_{13}(x,y) = x \to y$, которая называется импликацией. По таблице истинности данной функции видно, что выражение $\varphi \to f$ тождественно равняется единице, т. е. является всегда истинным только тогда, когда функция φ входит в функцию f.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Определение. Простыми импликантами логической функции f называют такие элементарные произведения, которые сами входят в данную функцию, но никакая собственная часть этих произведений в функцию f не входит.

Собственной частью называют произведение, полученное путем исключения из данного произведения одного или нескольких сомножителей.

Например: $x\bar{y}z$ имеет такие собственные части: $x\bar{y}$, $\bar{y}z$, xz, x, $\bar{y}$, z.

Пусть, например, выполняются следующие условия:

$x_1x_2x_3\overline{x_4} \subset f(x_1,x_2,x_3,x_4)$,

$x_2\overline{x_4} \subset f(x_1,x_2,x_3,x_4)$,

$x_2 \not\subset f(x_1,x_2,x_3,x_4)$,

$\overline{x_4} \not\subset f(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Тогда произведение $x_2\overline{x_4}$ будет *простой импликантой* функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Символ $\not\subset$ означает, что условие вхождения не выполняется.

Простые импликанты представляют собой самые короткие элементарные произведения, входящие в данную логическую функцию.

Понятно, что если какое-либо элементарное произведение входит в данную функцию, то при добавлении к нему любых сомножителей новое произведение также всегда будет входить в эту функцию, т. к. оно обращается в нуль вместе с исходным произведением.

Чтобы найти простые импликанты логической функции, можно выписать все элементарные произведения, входящие в данную функцию, и выбрать из их числа те, собственные части которых в эту функцию не входят.

Рассмотрим, например, функцию трех аргументов, заданную следующей таблицей 9:

Таблица 9

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z)$	0	0	0	1	1	1	0	0

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

В эту функцию входят 4 элементарных произведения: $\bar{x}yz$, $x\bar{y}\bar{z}$, $x\bar{y}z$, $x\bar{y}$. Действительно, простой подстановкой значений аргументов нетрудно проверить, что эти произведения обращаются в нуль на всех наборах, на которых равна нулю заданная функция. Простыми импликантами будут только два произведения: $\bar{x}yz$ и $x\bar{y}$. Произведения $x\bar{y}\bar{z}$ и $x\bar{y}z$ не являются простыми импликантами, т.к. их собственная часть $x\bar{y}$ входит в заданную функцию.

Составим следующую таблицу:

Таблица 10

Булева функция	Название функции	Элементарные произведения, входящие в функцию	Простые импликанты	Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма
$f_0(x,y)$	Константа 0	Нет	Нет	Нет
$f_1(x,y)$	Произведение (конъюнкция)	xy	xy	xy
$f_2(x,y)$	Функция запрета по y	$x\bar{y}$	$x\bar{y}$	$x\bar{y}$
$f_3(x,y)$	Переменная x	x, $x\bar{y}$, xy	x	x
$f_4(x,y)$	Функция запрета по x	$\bar{x}y$	$\bar{x}y$	$\bar{x}y$
$f_5(x,y)$	Переменная y	y, xy, $\bar{x}y$	y	y
$f_6(x,y)$	Сложение по модулю 2	$\bar{x}y$, $x\bar{y}$	$\bar{x}y$, $x\bar{y}$	$\bar{x}y \vee x\bar{y}$
$f_7(x,y)$	Дизъюнкция	x, y, $\bar{x}y$, $x\bar{y}$, xy	x, y	$x \vee y$
$f_8(x,y)$	Стрелка Пирса	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$
$f_9(x,y)$	Логическая равнозначность	$\bar{x}\bar{y}$, xy	$\bar{x}\bar{y}$, xy	$\bar{x}\bar{y} \vee xy$
$f_{10}(x,y)$	Инверсия y (отрицание)	$\bar{y}$, $x\bar{y}$, $\bar{x}\bar{y}$	$\bar{y}$	$\bar{y}$
$f_{11}(x,y)$	Импликация от y к x	$\bar{y}$, x, $\bar{x}\bar{y}$, xy, $x\bar{y}$	x, $\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$
$f_{12}(x,y)$	Инверсия x (отрицание)	$\bar{x}\bar{y}$, $\bar{x}y$, $\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$
$f_{13}(x,y)$	Импликация от x к y	$\bar{x}$, $\bar{x}\bar{y}$, y, xy, $\bar{x}y$	y, $\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$f_{14}(x,y)$	Штрих Шеффера	$\bar{x}$, $\bar{y}$, $x\bar{y}$, $\bar{x}\bar{y}$, $\bar{x}y$	$\bar{x}$, $\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
$f_{15}(x,y)$	Константа 1	$\bar{x}$, $\bar{y}$, x, y, $\bar{x}y$, $x\bar{y}$, $\bar{x}\bar{y}$, xy	x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$	$x \vee y \vee \bar{x} \vee \bar{y}$

Простые импликанты булевых функций двух аргументов приведены в четвертой колонке нашей таблицы 10. В третьей колонке записаны все *элементарные произведения*, входящие в соответствующие логические функции двух аргументов. Запомнить эту колонку можно, используя таблицу 3.

Функции двух аргументов имеют 8 различных элементарных произведений: x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$, xy, $x\bar{y}$, $\bar{x}y$, $\bar{x}\bar{y}$, которые равны функциям f_3, f_5, f_{12}, f_{10}, f_1, f_2, f_4, f_8 соответственно.

Поэтому для отыскания элементарных произведений, входящих в булеву функцию двух аргументов, достаточно проверить, какая из перечисленных функций обращается в нуль на тех же наборах, что и данная функция. Например, из таблицы 3 следует, что вместе с функцией f_9 на наборах (0,1) и (1, 0) обращаются в нуль функции f_8 и f_1, следовательно, в функцию f_9 входят произведения $\bar{x}\bar{y}$ и xy. Аналогично можно отыскать элементарные произведения, входящие и в остальные функции (но такой способ отыскания простых импликант практически неудобен, позже мы рассмотрим другой метод их получения).

Теорема. Любая булева функция равняется дизъюнкции всех своих простых импликант.

Доказательство. Рассмотрим наборы, на которых заданная булева функция равна *нулю*. Т. к. все простые импликанты входят в логическую функцию (по определению), то они будут также равны нулю на этих наборах, а следовательно, будет равна нулю и их дизъюнкция.

Рассмотрим далее наборы, на которых функция равна *единице*. Для каждого такого набора найдется хотя бы одна импликанта, равная на этом наборе единице. Действительно, простыеимпликанты выбираются среди всех элементарных произведений, входящих в булеву функцию. В число этих произведений

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

входят и конституенты единицы данной функции. Но любая простая импликанта является собственной частью некоторых конституент единицы (или совпадает с одной из них). Например, при трех переменных элементарное произведение $\bar{x}y$ будет собственной частью конституент $\bar{x}yz$ и $\bar{x}y\bar{z}$, а элементарное произведение $\bar{y}$ – собственной частью конституент $\bar{x}\bar{y}z$, $\bar{x}yz$, $\bar{x}y\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Если некоторые конституенты единицы не входят в набор всех простых импликант, то это означает, что они заменяются более короткими элементарными произведениями – простыми импликантами. Простая импликанта равняется единице на том же наборе, на котором равны единице входящие в нее конституенты. Следовательно, среди всех простых импликант всегда найдутся такие, которые вместе с заданной функцией обращаются на данном наборе в единицу. Т. о., дизъюнкция всех простых импликант накрывает все нули и все единицы заданной функции, и следовательно, совпадает с этой функцией.

Определение. Дизъюнкция всех простых импликант называется *сокращенной дизъюнктивной нормальной формой* булевой функции.

В пятой колонке таблицы 10 приведены сокращенные дизъюнктивные нормальные формы логических функций двух аргументов, которые в соответствии с приведенной теоремой совпадают с дизъюнкцией всех простых импликант, записанных в четвертой колонке таблицы 10.

Сокращенная ДНФ булевых функций более удобна для практической реализации, т. к. она содержит меньшее количество операций «И», «ИЛИ», «НЕ». Для тех булевых функций, у которых набор всех простых импликант включает только конституенты единицы, сокращенная ДНФ совпадает с совершенной ДНФ.

1.6. Алгоритм Квайна получения сокращенной ДНФ булевых функций

Так как *любая булева функция имеет единственную сокращенную ДНФ*, то все возможные алгоритмы ее получения приводят к одному и тому же результату.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Рассмотрим метод получения сокращенной ДНФ, называемый *методом Квайна*. Он основан на преобразовании совершенной ДНФ с помощью операций неполного склеивания и поглощения.

Операция *склеивания* (полного) определяется соотношением

$$xy \vee x\bar{y} = x. \tag{1.23}$$

Говорят, что два члена xy и $x\bar{y}$ *склеиваются по переменной* y. Справедливость данного выражения вытекает из преобразования $xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x \cdot 1 = x$.

Операция поглощения определяется соотношением

$$x \vee xy = x. \tag{1.24}$$

Говорят, что *член* xy *поглощается членом* x. Справедливость данного соотношения вытекает из преобразования $x \vee xy = x(1 \vee y) = x \cdot 1 = x$.

Применяемая в методе Квайна *операция неполного склеивания* определяется формулой

$$xy \vee x\bar{y} = x \vee xy \vee x\bar{y}, \tag{1.25}$$

которая может быть получена из соотношений (1.23) и (1.24). В правой части равенства (1.25), кроме члена x, полученного в результате полного склеивания, остаются оба члена, участвующие в склеивании.

Теорема Квайна.

Если в совершенной ДНФ функции провести все операции неполного склеивания и затем все операции поглощения, то в результате получится *сокращенная ДНФ* этой функции, т. е. дизъюнкция всех ее простых импликант.

Доказательство. Прежде всего покажем, что в результате проведения операций неполного склеивания получим все простые импликанты. Для этого рассмотрим операцию, обратную операции склеивания, называемую *операцией развертывания*. Операция развертывания заключается в умножении некоторых членов на выражение типа $x \vee \bar{x} = 1$, что, естественно, не меняет значения этих членов. С помощью операции развертывания любую простую импликанту можно представить в виде дизъюнкции коституент единицы.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Пусть, например, $x\bar{y}$ – простая импликанта функции четырех переменных x, y, z, u. Тогда, применяя дважды операцию развертывания, получим:

$$x\bar{y} = x\bar{y}\left(z \vee \bar{z}\right) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} = x\bar{y}z\left(u \vee \bar{u}\right) \vee x\bar{y}\bar{z}\left(u \vee \bar{u}\right) = x\bar{y}zu \vee x\bar{y}z\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{z}u \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{u}.$$

Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма содержит все простые импликанты заданной функции. Применяя к каждой импликанте операцию развертывания, получаем, очевидно, все конституенты единицы этой функции. При развертывании *различные импликанты* могут, вообще говоря, образовать *одну и ту же конституенту*. Поэтому после проведения операций развертывания полученное выражение может содержать несколько одинаковых конституент. Если на основании тождества ($x \vee x \vee ... \vee x = x$) дизъюнкцию одинаковых конституент заменить одной конституентой, то получим совершенную ДНФ заданной логической функции.

Т. к. операция развертывания является обратной к операции склеивания (см. 1.23), то, применяя операции склеивания к совершенной ДНФ, можно получить любую простую импликанту. Для того чтобы получить *все* простые импликанты, необходимо провести операцию неполного склеивания. Это связано с тем, что один и тот же член дизъюнктивной формы может, вообще говоря, склеиваться с несколькими другими, образуя при этом различные импликанты. Поэтому при проведении операции склеивания каждый член следует оставлять в выражении для использования его при других склеиваниях. Полученная после проведения всех операций полного склеивания дизъюнктивная форма будет содержать кроме всех простых импликант и другие члены (в том числе все конституенты единицы логической функции). Если теперь провести все операции поглощения, то в ДНФ останутся только простые импликанты. Покажем это.

Пусть, например, после проведения всех операций склеивания ДНФ будет содержать член q, не являющийся простой импликантой. Тогда этот член должен входить в данную функцию ($q \subset f$), т.к. в противном случае полученное выражение не равняется исходному. Но по предположению q не является простой импликантой и входит в функцию f; следовательно, в эту функцию входит

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

какая-то его часть p, которая будет простой импликантой. Тогда $q = q_1 p$ и член q будет поглощаться простой импликантой p: $p \vee q = p \vee q_1 p = p$.

Это и доказывает теорему Квайна.

Подчеркнем, что в соответствии с теоремой Квайна преобразование нужно начинать, исходя из совершенной ДНФ. Поэтому, если функция задана в произвольной форме, то ее следует преобразовать в совершенную ДНФ и только затем проводить операции склеивания и поглощения. При задании функции в произвольной ДНФ для получения совершенной ДНФ достаточно применить операции развертывания.

Практически *сокращенную ДНФ* удобно находить в такой *последовательности*: Провести в совершенной ДНФ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ все возможные операции склеивания конституент единицы. В результате этого образуются произведения, содержащие $(n-1)$ букв. Заметим, что конституенты единицы в дальнейшем не будут склеиваться ни с одним вновь полученным членом, т. к. склеиваться могут только произведения с одинаковым количеством букв. Поэтому можно сразу же провести операции поглощения, а затем выполнить все возможные склеивания членов с $(n-1)$ буквой. После этого провести поглощение членов с $(n-1)$ буквой и вновь выполнить операции склеивания членов с числом букв, равным $(n-2)$, и т. д.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти сокращенную ДНФ функции, заданной таблицей 11.

Таблица 11

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x, y, z)$	0	0	0	1	1	1	0	0

Совершенная ДНФ: $f(x, y, z) = (\bar{x}yz) \vee (x\bar{y}\bar{z}) \vee (x\bar{y}z)$.

В правой части полученного выражения можно выполнить только одно склеивание: второго члена с третьим по переменной z. При этом получим:

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$f(x,y,z)=x\overline{y}\vee\overline{x}yz\vee x\overline{y}\overline{z}\vee x\overline{y}z$.

Произведение $x\overline{y}$ поглощает члены $x\overline{y}z$ и $x\overline{y}\overline{z}$.

$f(x,y,z)=x\overline{y}\vee\overline{x}yz$.

Это выражение является сокращенной ДНФ заданной функции, т. к. дальнейшие применения операций склеивания и поглощения невозможно.

Пример___2. Найти сокращенную ДНФ логической функции $f(A,B,C)=\overline{A}C\vee\overline{B}\overline{C}\vee AB\overline{C}$.

Представим данную функцию в совершенной ДНФ. Для этого достаточно умножить первый член на $B\vee\overline{B}=1$, а второй – на $A\vee\overline{A}=1$.

$$f(A,B,C)=\overline{A}C\left(B\vee\overline{B}\right)\vee\overline{B}\overline{C}\left(A\vee\overline{A}\right)\vee AB\overline{C}=\overset{1}{\overline{A}BC}\vee\overset{2}{\overline{A}\overline{B}C}\vee\overset{3}{A\overline{B}\overline{C}}\vee\overset{4}{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}\vee\overset{5}{AB\overline{C}}.$$

Проведем операции склеивания в следующем порядке:

– выполним все возможные склеивания 1-го члена с остальными;

– выполним все возможные склеивания 2-го члена с остальными, кроме первого;

– выполним все возможные склеивания 3-го члена с остальными, кроме первого и второго, и т. д.

Результаты запишем в следующей форме:

$1^*-2^*=\overline{A}C\quad(по\ B)$,

$2-4^*=\overline{A}\overline{B}\quad(по\ C)$,

$3^*-4=\overline{B}\overline{C}\quad(по\ A)$,

$3-5^*=A\overline{C}\quad(по\ B)$.

Первая строка означает, что первый член склеивается со вторым по переменной B, в результате чего получается член $\overline{A}C$. Остальные строки имеют аналогичный смысл.

Чтобы быстрее находить члены, которые склеиваются друг с другом, заметим, что *склеиваться могут только такие члены*, у которых число переменных с отрицаниями отличается на единицу.

В приведенной выше форме записи отмечаем звездочками члены, которые поглощаются произведениями, образовавшимися после склеивания. В данном

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

примере поглощаются все пять исходных членов, поэтому получим $f(A,B,C)=\overline{A}C\vee\overline{A}\overline{B}\vee\overline{B}\overline{C}\vee A\overline{C}$.

К этому выражению операции склеивания и поглощения применить нельзя и следовательно, оно является сокращенной ДНФ заданной логической функции.

Пример 3. Найти сокращенную ДНФ следующей функции:

$f(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}\vee A\overline{C}\overline{D}\vee A\overline{B}\overline{C}D\vee\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$.

Применяя операции развертывания (первый член умножаем на $D\vee\overline{D}$, второй – на $B\vee\overline{B}$), получаем:

$$f(A,B,C,D)=\overset{1}{\overline{A}B\overline{C}D}\vee\overset{2}{\overline{A}B\overline{C}\overline{D}}\vee\overset{3}{AB\overline{C}\overline{D}}\vee\overset{4}{A\overline{B}\overline{C}\overline{D}}\vee\overset{5}{A\overline{B}\overline{C}D}\vee\overset{6}{\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}}.$$

Выполним операции склеивания:

$1^*-2^*=\overline{A}B\overline{C}\quad(по\ D)$,

$2-3^*=B\overline{C}\overline{D}\quad(по\ A)$,

$2-6^*=\overline{A}\overline{C}\overline{D}\quad(по\ B)$,

$3-4^*=A\overline{C}\overline{D}\quad(по\ B)$,

$4-5^*=A\overline{B}\overline{C}\quad(по\ D)$,

$4-6=\overline{B}\overline{C}\overline{D}\quad(по\ A)$.

После операции поглощения получим:

$$f(A,B,C,D)=\overset{1}{\overline{A}B\overline{C}}\vee\overset{2}{B\overline{C}\overline{D}}\vee\overset{3}{\overline{A}\overline{C}\overline{D}}\vee\overset{4}{A\overline{C}\overline{D}}\vee\overset{5}{A\overline{B}\overline{C}}\vee\overset{6}{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}.$$

Осуществим еще раз операции склеивания (здесь они возможны еще):

$2^*-6^*=\overline{C}\overline{D}\quad(по\ B)$,

$3-4^*=\overline{C}\overline{D}\quad(по\ A)$.

Второй, третий, четвертый, шестой члены поглощаются членом $\overline{C}\overline{D}$, а первый и пятый члены остаются. Таким образом, окончательно имеем:

$f(A,B,C,D)=\overline{C}\overline{D}\vee\overline{A}B\overline{C}\vee A\overline{B}\overline{C}$ – сокращенная ДНФ заданной функции.

Пример 4. Найти сокращенную ДНФ функции $f(A,B,C)=\overline{AB}C\vee\overline{BC\vee\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$.

Чтобы получить совершенную ДНФ, применим вначале формулы де Моргана:

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$f(A,B,C)=\left(\overline{A}\vee\overline{B}\right)\cdot C\vee\overline{BC}\cdot\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}=\overline{A}C\vee\overline{B}C\vee\left(\overline{B}\vee\overline{C}\right)(A\vee B\vee C)=$$
$$=\overline{A}C\vee\overline{B}C\vee A\overline{B}\vee A\overline{C}\vee B\overline{B}\vee B\overline{C}\vee\overline{B}C\vee C\overline{C}=\overline{A}C\vee\overline{B}C\vee A\overline{B}\vee A\overline{C}\vee B\overline{C}\quad(*)$$

Выполнив далее операции развертывания, получим совершенную ДНФ заданной функции:

$$f(A,B,C)=\overset{1}{\overline{A}BC}\vee\overset{2}{\overline{A}\overline{B}C}\vee\overset{3}{A\overline{B}C}\vee\overset{4}{A\overline{B}\overline{C}}\vee\overset{5}{AB\overline{C}}\vee\overset{6}{\overline{A}B\overline{C}}.$$

Проведем операции склеивания и поглощения:

$1^*-2^*=\overline{A}C\quad(по\ B)$,

$1-6^*=\overline{A}B\quad(по\ C)$,

$2-3^*=\overline{B}C\quad(по\ A)$,

$3-4^*=A\overline{B}\quad(по\ C)$,

$4-5^*=A\overline{C}\quad(по\ B)$,

$5-6=B\overline{C}\quad(по\ A)$.

Окончательно получим:

$f(A,B,C)=\overline{A}C\vee\overline{A}B\vee\overline{B}C\vee A\overline{B}\vee A\overline{C}\vee B\overline{C}$. (**)

Сравним выражения (*) и (**). Выражение (**) содержит кроме всех членов, входящих в выражение (*), член $\overline{A}B$, который, ввиду равенства выражений (*) и (**) (эти выражения представляют одну и ту же функцию), является, очевидно, *лишним*. Это объясняется тем, что выражение (**) представляет собой сокращенную ДНФ, в которую входят *все* простые импликанты. Из этого примера следует, что *некоторые импликанты можно исключить*, не изменяя значений логической функции.

Список литературы

1. Садовников Н.В. Экономико-математическое моделирование: Логические методы исследования экономических систем в условиях неопределенности: учебное пособие с грифом УМО / Н.В. Садовников, А.Ф. Зубков. – Пенза, 2003. – 148 с.

2. Садовников Н.В. Фундаментализация как феномен современного образования / Н.В. Садовников // Интеграция образования. – 2004. – №1. – С. 37–42.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Садовников Николай Владимирович – доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин Филиала ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Министерства обороны Российской Федерации в г. Пензе, Россия, Пенза.

Шипанова Елена Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры общепрофессиональных дисциплин Филиала ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Министерства обороны Российской Федерации в г. Пензе, Россия, Пенза.

Султанова Галия Алиевна – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин Филиала ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Министерства обороны Российской Федерации в г. Пензе, Россия, Пенза.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)