

**Ермаков Дмитрий Николаевич**

почётный работник высшего профессионального образования РФ,

почётный работник науки и техники РФ,

д-р экон. наук, д-р полит. наук, канд. ист. наук, профессор

ФГБОУ ВО «Московский государственный

университет им. М.В. Ломоносова»

г. Москва

**Оливио Адилсон Педро**

аспирант

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

г. Москва

DOI 10.31483/r-98334

## **ИСТОРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ ДВУХ СПУТНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПРЕРЫВНОЙ МАЛОЙ ТЯГИ**

*Аннотация:* в статье мы стремимся решить проблему оптимального алгоритма управления сближением двух спутников с использованием непрерывной малой тяги, для решения задач оптимального сближения используются и численные и аналитические методы. Сначала мы строим математическую модель, описывающую движение космического аппарата вблизи круговой орбиты (динамическая модель Клохесси – Уилтшира – Хилла), с помощью аналитических методов решаем систему дифференциальных уравнений, и с использованием принципа максимума Понтрягина позволяет построить оптимальную по расходу топлива траекторию сближения для условий использования малой непрерывной тяги. В частности, эта работа поможет в области планирования движения робота для решения задач сближения и сцепления путем изучения подходов к планированию и управлению с оптимальной точкой сближения для оптимизированного тягового топлива. В качестве примеров рассмотрены графики управляющего воздействия, относительного расстояния и относительной скорости.

**Ключевые слова:** космическое сближение, принцип максимума Понтрягина, орбитальная скорость, космический аппарат, космическая станция, носительные движения пассивного и активного аппаратов, оптимальные космические траектории, электрореактивная малая тяга.

## 1. Введение

Многие годы внимание специалистов привлекают процессы сближения и стыковки космических аппаратов на околоземной орбите в автономном режиме. Это достаточно сложная задача вследствие наличия целого ряда проблем, связанных как со сложностью собственно математического описания относительного движения пассивного и активного аппаратов, так и со сложностью методологии синтеза управляющих воздействий на двигательные установки космических аппаратов и разнообразием принимаемых при расчетах допущений [1; 2].

Космическое сближение – это орбитальный маневр, во время которого два космических аппарата, один из которых часто является космической станцией, прибывают на одну и ту же орбиту и приближаются к очень близкому расстоянию (например, в пределах визуального контакта). Рандеву (сближение) требует точного совпадения орбитальных скоростей и векторов положения двух космических аппаратов, что позволяет им оставаться на постоянном расстоянии в течение всего времени пребывания на орбитальной станции. За сближением могут или не могут последовать стыковка или швартовка, процедуры, которые приводят космический аппарат в физический контакт и создают связь между ними.

Тот же метод рандеву может быть использован для «посадки» космических аппаратов на естественные объекты со слабым гравитационным полем, например посадка на один из марсианских лун потребует такого же согласования орбитальных скоростей, за которым последует «спуск», который имеет некоторые сходства с стыковкой.

## 2. Литературный обзор

Орбитальные маневры с использованием непрерывной малой тяги – недавняя и популярная область исследования. Источниками малой тяги обычно являются нетрадиционные двигательные установки, такие как электрические

двигатели и системы солнечного паруса. Поскольку величина тяги, получаемой от таких движителей, относительно мала по сравнению с тепловыми ракетными двигателями [3], существует жесткое требование оптимального управления, которое позволяет достичь желаемых результатов в пределах доступной тяги.

В работе [4] Клохесси и Уилтшир предложили приближенную линейную модель для относительного орбитального переноса, которая является популярным выбором для оптимизации траектории.

В работе [5] представлено решение задачи о сближении двух космических аппаратов в условиях минимизации расхода топлива, оптимальное без учета каких-либо ограничений, для круговой и эллиптической эталонных орбит. Для случая круговой опорной орбиты в указанной работе при решении задачи оптимизации использовалось приближенное линеаризованное уравнение движения, аналогичное модели Клохесси – Уилтшира [4]. По мнению авторов [3,4], максимальные абсолютные значения требуемого управляющего воздействия попадают как раз в область малой тяги.

Оптимальное копланарное сближение с малой тягой между маневрирующим и целевым космическим кораблем, изучалось в работе [6] с использованием приближенных уравнений движения.

В работе [7] исследовано оптимальное перемещение с малой тягой между соседними копланарными круговыми орбитами, принимая ускорение тяги как постоянное. Авторами [7] отмечено, что использовании двигателя с непрерывной тягой необходимо выполнять оптимизацию управления с ограничениями, чтобы величина тяги, требуемая, находилась в пределах досягаемости движителя. Аналогичный подход использован и в работе [8], где исследовалась задача сближения при заходе на посадку с оптимизацией по расходу топлива при минимальной тяге и малой тяге, используя относительные линеаризованные уравнения движения. Авторами [8] предложена двухступенчатая система с минимальным расходом топлива.

В этом исследовании на первом этапе решения производится оптимальный переход от начальных условий к промежуточной точке, а на втором этапе была

использована программа оптимальной тяги, гарантирующая направленное движение. Оптимальное сближение достигается путем минимизации общего расхода топлива как функции относительного местоположения промежуточной точки и скорости в движении к конечной линии.

Хорошо известная модель Клохесси – Уилшира [4] аппроксимирует уравнение движения, предполагая круговую опорную орбиту. В дальнейшем был предложен ряд модифицированных моделей, учитывающих различные эффекты, возникающие в реальных ситуациях. Например, в работе [9] представлена приближенная модель уравнений относительного движения, позволяющая рассматривать и эллиптические опорные орбиты. В работе [10] предложена модификация модели Клохесси – Уилтшира [4], включающая квадратичное сопротивление.

На базе указанных моделей предложен и ряд решений задач оптимизации управления при решении задачи сближения. В работе [11] представлено решение задачи о сближении при оптимизации по расходу топлива вблизи точки на кеплеровской орбите, предполагая ограниченную тягу. В работе [12] разработано аналитическое решение для ограниченного по мощности оптимального минимального сближения топлива вблизи эллиптической орбиты. В [13] представлен подход к разработке близких к оптимальным законов управления с обратной связью для сближения с минимальным расходом топлива между спутниками на эллиптических орбитах произвольного эксцентриситета. В [14] предложена оптимальная схема управления подачей топлива для нелинейной системы сближения космических аппаратов с ограничением на предотвращение столкновений и сформулирована задача оптимального управления с ограничениями, используя метод штрафных функций для преобразования задачи ограниченной оптимизации в последовательность задач оптимизации без ограничений. По данным [15] решение последовательности оптимизационных задач без ограничений сходится к решению исходной задачи.

Для решения задач оптимального сближения используются и численные методы. Например, в [16] предложен численный метод для расчета оптимальных по топливу траекторий сближения с непрерывной тягой. Приспосабливая идею

использования метода штрафных функций (при условии использования гладких функций) задачам оптимального управления, авторы [17] показали, что задачи оптимального управления, сформулированные на основе принципа минимума Понтрягина при наличии ограничений, можно решить с использованием последовательности задач оптимизации без ограничений.

### 3. Постановка задачи

Основное внимание исследований в области оптимального орбитального движения с малой тягой уделяется точному моделированию, постановке задачи оптимального управления и получению оптимального управления с использованием приближенной модели.

Вопросам синтеза оптимального управления двигательными установками космических аппаратов посвящено достаточно много публикаций, однако применимость приближенной модели при изменении начальных условий маневрирующего космического аппарата, таких как начальная относительная скорость и начальное относительное расстояние, практически не изучалась.

Данная работа посвящена исследованию пределов применимости модели Клохесси – Уилтшира [4] для непрерывного относительного движения с малой тягой при изменении начальных условий.

Для непрерывного сближения с малой тягой задача оптимального управления состоит в том, чтобы направить маневрирующий космический аппарат из исходного положения в конечное, при котором конечное положение и скорость маневрирующего космического аппарата относительно целевого космического аппарата равна нулю, при этом необходимо минимизировать расход топлива (Требуется найти функционал  $J \rightarrow \min$ ). Оптимизация может быть как с ограничениями, так и без ограничений, в зависимости от возможностей применяемого движителя с малой тягой.

Уравнение движения КА:

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + B\vec{U}, \quad (1)$$

где:  $\vec{X} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ ,  $\vec{U} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ , то есть динамическая модель.

Предположим, что заданы граничные условия:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \vec{x}(t_f) = \vec{x}_f \quad (2)$$

#### 4. Математическая модель

Уравнения модели Клохесси – Уилтшира описывает движение тела относительно опорной орбиты, которая является круглой или почти круглой [4; 18; 19]. Хотя уравнение Клохесси – Уилтшира является линеаризованным и без возмущающей силы, оно может обеспечить решения задач анализа траекторий или построения оптимального управления.

В работе [20] представлены результаты построения опорных орбит для траэдрической конфигурации группы спутников. Рассматриваемые уравнения основаны на допущении о том, что орбита спутников круглая и что относительное расстояние между ними намного меньше по сравнению с радиусом орбиты. Учитывая предположения авторов о движении спутников по круговой или околокруговой орбите, модель Клохесси – Уилтшира применима для описания движения спутников. Авторы использовали следующую орбитальную систему координат Охуз: центр О совпадает с одним из спутников, ось Oz направлена вдоль радиус-вектора опорного тела от центра Земли, ось Oy – по нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента, ось Ox дополняет систему до правой тройки. В [20] использована следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x &= 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0 \\ \ddot{z} + n^2z &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $n = \sqrt{\mu/a_{орб}^3}$  – среднее движение,  $\mu$  – стандартный гравитационный параметр Земли,  $\mu = 398600,4 \text{ км}^3/\text{с}^2$ ,  $a_{орб}$  – большая полуось орбиты спутника, с которым связана орбитальная система координат. Система уравнений (3) имеет решение в замкнутой форме:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= (4-3\cos nt)x_0 + \frac{\dot{x}_0}{n} \sin nt + \frac{2\dot{y}_0}{n} (1-\cos nt) \\
 y(t) &= \left(\frac{4\dot{y}_0}{n} + 6x_0\right) \sin nt + \frac{2\dot{x}_0}{n} \cos nt - (6nx_0 + 3\dot{y}_0)t + \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n}\right) \\
 z(t) &= z_0 \cos nt + \frac{\dot{z}_0}{n} \sin nt
 \end{aligned} \tag{4}$$

и его производная будет

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= 3nx_0 \sin nt + \dot{x}_0 \cos nt + 2\dot{y}_0 \sin nt \\
 \dot{y}(t) &= (4\dot{y}_0 + 6nx_0) \cos nt - 2\dot{x}_0 \sin nt - (6nx_0 + 3\dot{y}_0) \\
 \dot{z}(t) &= -nz_0 \sin nt + \dot{z}_0 \cos nt
 \end{aligned} \tag{5}$$

где:  $x_0, y_0, z_0$ , и т. д. – условия в некоторый период времени  $t_0$ , а  $t$  – время с момента  $t_0$ .

Периодическое относительное движение спутников в орбитальной системе координат по данным [20] представляется в виде:

$$\begin{aligned}
 x_i(t) &= 2A_i \cos v - 2B_i \sin v + C_i, \\
 y_i(t) &= D_i \sin v + E_i \cos v,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$z_i(t) = B_i \cos v + A_i \sin v.$$

Здесь заглавными буквами с индексом  $i$  обозначены постоянные,  $v = nt$ .

Для построения оптимального управления движением двух спутников (космических аппаратов) рассмотрим модель Клохесси – Уилтшира для относительного орбитального движения с учетом сил, действующих на спутники. Данная модель включает следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - 3n^2x - 2n\dot{y} &= u_x, \\
 \ddot{y} + 2n\dot{x} &= u_y, \\
 \ddot{z} + n^2z &= u_z.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Система уравнений (7) имеет решение в замкнутой форме:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= (4-3\cos nt)x_0 + \frac{\dot{x}_0}{n} \sin nt + \frac{2\dot{y}_0}{n} (1-\cos nt) \\
 &+ \frac{u_x}{n^2} (1-\cos nt) + \frac{2u_y}{n^2} (nt - \sin nt)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \left(\frac{4\dot{y}_0}{n} + 6x_0\right) \sin nt + \frac{2\dot{x}_0}{n} \cos nt - (6nx_0 + 3\dot{y}_0)t + \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n}\right) \\
&\quad + \frac{2u_x}{n^2} (\sin nt - nt) + u_y \left[\frac{4}{n^2} (1 - \cos nt) - \frac{3}{2} t^2\right] \\
z(t) &= z_0 \cos nt + \frac{\dot{z}_0}{n} \sin nt + \frac{u_z}{n^2} (1 - \cos nt),
\end{aligned} \tag{8}$$

и его производная будет

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= 3nx_0 \sin nt + \dot{x}_0 \cos nt + 2\dot{y}_0 \sin nt + \frac{u_x}{n} \sin nt + \frac{2u_y}{n} (1 - \cos nt) \\
\dot{y}(t) &= (4\dot{y}_0 + 6nx_0) \cos nt - 2\dot{x}_0 \sin nt - (6nx_0 + 3\dot{y}_0) + \frac{2u_x}{n} (\cos nt - 1) \\
&\quad + u_y \left[\frac{4}{n} \sin nt - 3t\right] \\
\dot{z}(t) &= -nz_0 \sin nt + \dot{z}_0 \cos nt + \frac{u_z}{n} \sin nt,
\end{aligned} \tag{9}$$

где:  $x_0, y_0, z_0$ , и т. д. – условия в некоторый период времени  $t_0$ , а  $t$  – время с момента  $t_0$ .

Для анализа сближения двух спутников (космических аппаратов) также введем орбитальную систему координат. Рассмотрим целевой космический корабль, движущийся по орбите радиуса  $r_t$  вокруг Земли. Другой космический корабль (маневрирующий), движущийся по другой произвольной орбите, оснащен двигателем непрерывного действия с малой тягой. Маневрирующий космический корабль должен сблизиться с космическим аппаратом-мишенью, используя непрерывное движение с малой тягой в течение определенного времени (времени полета).

Для удобства решения задачи введем систему координат Хилла, связанную с целевым космическим аппаратом. Ось  $x$  направлена вдоль вектора радиуса целевого космического аппарата, ось  $y$  направлена вдоль вектора скорости целевого космического аппарата, а ось  $z$  направлена перпендикулярно плоскости  $Oxy$ . Предлагаемая система координат показана на рис. 1.



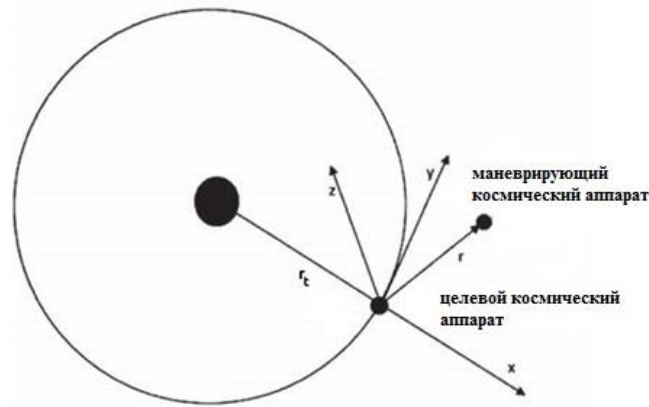


Рис. 1. Направление осей системы координат и положение целевого и маневрирующего аппарата

Для построения оптимального управления используем принцип максимума Понтрягина, следуя подходу [21; 22].

Обозначим через  $\vec{U}$  управляющий вход в виде непрерывной удельной тяги:

$$\vec{U} = [u_x \ u_y \ u_z]^T \quad (10)$$

Рассматриваемая модель может быть представлена в пространстве состояний как:

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + B\vec{U} \quad (11)$$

где:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$\vec{X}$  – вектор состояния:

$$\vec{X} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]. \quad (14)$$

### 5. Задача минимизации контроля топлива

Для минимизации расхода топлива в рамках модели непрерывной работы двигателя, рассмотренной выше, вычисляется функционал индекса производительности:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_k} (U^T R U) dt \quad (15)$$

где  $t_n$  и  $t_k$  – начальное и конечное время перемещения маневрирующего аппарата, а  $R$  – весовая матрица (в данном случае единичная матрица  $3 \times 3$ ).

#### 6. Оптимизация модели малой тяги Клохесси – Уилтшира

Рассмотрим модель Клохесси – Уилтшира (в форме уравнения (6)), если сопряженный вектор состояния равен:

$$\Lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6]^T. \quad (16)$$

Гамильтониан для рассматриваемой модели найдем по формуле:

$$H = \frac{1}{2} U^T R U + \Lambda^T (A\vec{X} + B\vec{U}) \quad (17)$$

Для стационарного состояния должно выполняться условие:

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{U}} = 0, \quad (18)$$

анализ, которого дает следующий результат:

$$u_x = -\lambda_2, u_y = -\lambda_4, u_z = -\lambda_6. \quad (19)$$

Следовательно, уравнение (12) можно преобразовать следующим образом:

$$H = \frac{1}{2} (\lambda_2^4 + \lambda_4^4 + \lambda_6^4) + \Lambda^T (A\vec{X}) \quad (20)$$

Используя необходимое условие оптимальности, получаем:

$$\dot{\Lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{X}}\right)^T = -A^T \Lambda \quad (21)$$

Следовательно, в совокупности, основное и сопряженное уравнения состояния могут быть записаны в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{X}} \\ \dot{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \Lambda \end{bmatrix} \quad (22)$$

Уравнение (17) представляет собой набор из 12 линейных дифференциальных уравнений, в которых основные уравнения состояния отделимы от сопряженных уравнений состояния и, следовательно, могут решаться отдельно.

Если начальные значения сопряженного состояния:

$$\Lambda(t_H) = \Lambda_0 \quad (23)$$

Тогда вектор сопряженного состояния может быть выражен как:

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 e^{-A^T t} \quad (24)$$

Вектор состояния в момент времени  $t$  рассчитывается из соотношения:

$$\vec{X}(t) = e^{At} X(t_H) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau \quad (25)$$

где  $\vec{X}(t_H)$  – начальное значение вектора состояния. Решение для вектора состояния получается путем подстановки уравнения (24) в уравнение (25) и последующего решения для начального значения вектора сопряженного состояния с применением граничных условий.

Решение вектора управляющего входа  $\vec{U}$  получается путем подстановки значений вектора сопряженных состояний в уравнение (19).

Таким образом, сформулированная задача является двухточечной краевой задачей.

### 7. Результаты расчетов

Для данного исследования в качестве космического корабля-мишени рассмотрим Международную космическую станцию, которая находится приблизительно на круговой орбите радиусом 6778,14 км. Вектор начального состояния для относительного положения и относительной скорости маневрирующего космического аппарата зададим соотношением:

$$\vec{X}_{(t=t_H)} = [10 \ 0 \ 10 \ 0 \ 10 \ 0]^T \quad (26)$$

Требуется сблизить маневрирующий космический аппарат с космическим аппаратом-мишенью, используя непрерывную низкую тягу в течение указанного времени,  $t = \pi/n = 2776,8$  с, где  $n$  – орбитальная частота орбиты цели. Следовательно, конечный вектор состояния должен быть:

$$\vec{X}_{(t=t_K)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (27)$$

На рисунке 2 показана траектория управляющего воздействия (удельная тяга), полученная с использованием модели непрерывной тяги вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

Можно заметить, что максимальная величина удельной тяги ограничена до  $0,05 \text{ м/с}^2$ , что находится в пределах досягаемости силовой установки с малой тягой. Следовательно, процесс оптимизации обосновывает использование непрерывного двигателя с малой тягой.

На рисунке 3 показана траектория относительных расстояний по трем осям, полученная с использованием модели непрерывной тяги по часовой стрелке, и на графике видно, что маневрирующий космический аппарат действительно охватывает предлагаемую миссию в пределах установленного временного предела, то есть относительных расстояний вдоль оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  в последний раз уменьшаются до нуля.

На рис. 4 показана траектория относительных скоростей вдоль трех осей, полученных с использованием модели Клохесси – Уилтшира с непрерывной тягой, максимальная величина относительной скорости маневрирующего космического аппарата близка к  $14 \text{ м/с}$ .

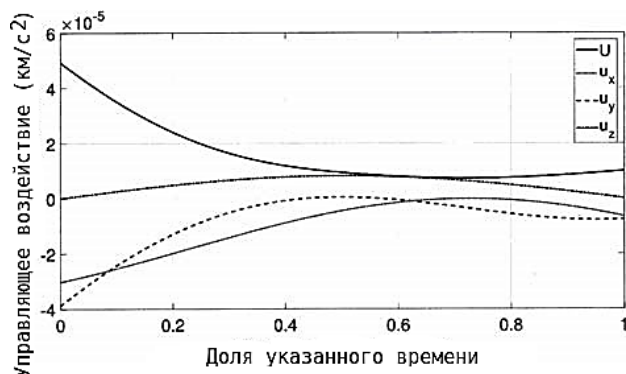


Рис. 2. Траектория управляющего воздействия, полученного с использованием модели Клохесси – Уилтшира с непрерывной тягой

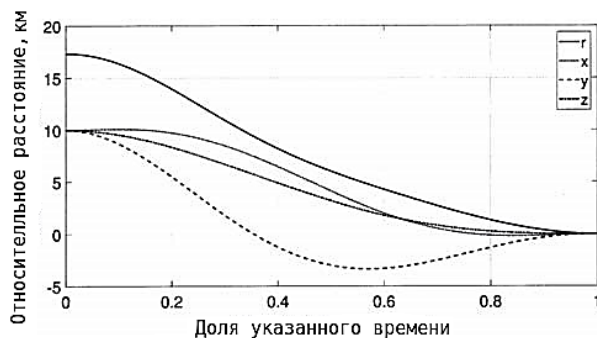


Рис. 3. Траектория относительного расстояния, полученная с использованием модели Клохесси – Уилтшира с непрерывной тягой

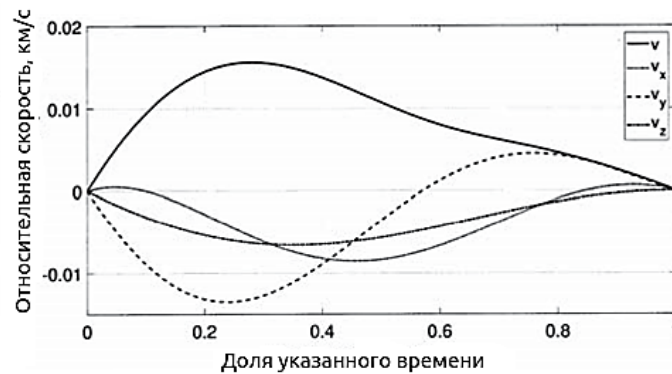


Рис. 4. Траектория относительной скорости, полученная с использованием модели Клохесси – Уилтшира с непрерывной тягой

### 8. Выводы

В данной работе исследована применимость модели Клохесси – Уилтшира для построения оптимального управления сближения космических аппаратов (спутников). Показано, что использование принципа максимума Понтрягина позволяет построить оптимальную по расходу топлива траекторию сближения для условий использования малой непрерывной тяги. Показано, что ошибка траектории при этом незначительно мала. Моделирование работы алгоритма управления показало, что при одинаковых начальных условиях оптимальное управление обеспечивает меньший расход топлива по сравнению с линейным управлением достаточную точность позиционирования.

### Список литературы

1. Иванов Н.М. Баллистика и навигация космических аппаратов: учебник для вузов / Н.М. Иванов, Л.Н. Лысенко. – М.: Дрофа, 2004. – 540 с.
2. Ручинская Е.В. Математическое моделирование управляемого движения космических аппаратов: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Е.В. Ручинская; МАТИ. – М., 2010. – 175 с.
3. Гродзовский Г.Л. Механика космического полета малой тяги / Г.Л. Гродзовский, Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев // NASA TTF-507. – 1969. – XIV. – С. 3.

4. Clohessy W.H. Система наведения терминала для спутниковой встречи / W.H. Clohessy, R.S. Wiltshire // J. Aerospace Sci., 27 (9), 1960, pp. 653–658. DOI: <https://doi.org/10.2514/8.8704>.

5. Маринеску Ал. Оптимальное орбитальное рандеву с малой тягой / Ал. Маринеску // J. Spacecraft, 13 (7), 1976, с. 385–392. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.27913>.

6. Эйлер Э.А. Оптимальное управление рандеву с малой тягой / Э.А. Эйлер // AIAA Journal, 7 (6), 1969, с. 1140–1144. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.5287>.

7. Хинз Х.К. Оптимальный почти круговой орбитальный трансферт с малой тягой / Х.К. Хинз // AIAA Journal, 1 (6), 1963, с. 1367–1371. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.1795>.

8. Гельман М. Оптимальное ограниченное рандеву с малой тягой с фиксированным направлением конечного подхода / М. Гельман, М. Алешин // Ж. Гуид. Control Dyn., 24 (2), 2001, pp. 378–385. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.4722>.

9. Чаунер Дж. Рандеву цзуин мин Эллиптишер Бан Умлауфенден Цайль / Дж. Чаунер, П. Хемпель // Acta Astronaut, 11 (2), 1965, pp. 104–109.

10. Картер Т. Уравнения Клохесси – Уилтшира, модифицированные для включения квадратичного сопротивления / Т. Картер, М. Хуми // Дж. Гуид. Control Dyn., 25 (6), 2002, pp. 1058–1063. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.5010>.

11. Картер Т., Хуми М. Оптимальное по топливу сближение вблизи точки на общей кеплеровской орбите / Т. Картер, М. Хуми // Дж. Гуид, 10 (6), 1987, с. 567–573. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.20257>.

12. Сенгупта П. Аналитическое решение для ограниченного по мощности оптимального рандеву вблизи эллиптической орбиты / П. Сенгупта, С.Р. Вадали // Дж. Оптим. Теор. Appl., 138 (1), 2008, с. 115–137.

13. Шарма Р. Почти оптимальное рандеву с обратной связью на эллиптических орбитах, учитывающее нелинейную дифференциальную гравитацию / Р. Шарма, П. Сенгупта, С.Р. Вадали // Дж. Гид. Control Dyn., 30 (6), 2007, с. 1803–1813. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.26650>.

14. Шао Л. Разработка оптимального управления топливом нелинейной системы сближения космических аппаратов с ограничением на предотвращение столкновений / Л. Шао, З. Лю, Х. Гао // Международная конференция по оценке, обнаружению и слиянию информации. – 2015. – С. 348–353. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICEDIF.2015.7280221>.

15. Шао Л. Разработка оптимального управления топливом нелинейной системы сближения космических аппаратов с ограничением на предотвращение столкновений / Л. Шао, З. Лю, Х. Гао // Международная конференция по оценке, обнаружению и слиянию информации. – 2015. – С. 348–353. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICEDIF.2015.7280221>.

16. Эпеной Р. Оптимизация топлива для орбитального сближения с непрерывной тягой с ограничением по предотвращению столкновений / Р. Эпеной // Ж. Гид. Control Dyn., 34 (2), 201, С. 493–503. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.50996>.

17. Эпеной Р. Оптимизация топлива для орбитального сближения с непрерывной тягой с ограничением по предотвращению столкновений / Р. Эпеной // Ж. Гид. Control Dyn., 34 (2), 201, С. 493–503. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.50996>.

18. Валладо Д.А. Основы астродинамики и приложений / Д.А. Валладо. – Четвертое издание // Microcosm Press. – 2013. – С. 393–397.

19. Zhang X. Применение уравнения Хилла – Клохесси – Уилтшира в прогнозировании орбиты GNSS / X. Zhang, R. Piche // В J. Nurmi, L. Ruotsalainen, E-S. Lohan, J. Salcedo, & S. Thombre (Eds.): труды Международной конференции 2014 г. по локализации и GNSS (ICL-GNSS) (Хельсинки, Финляндия, 24–26 июня 2014 г.). – 2014. – С. 1–6.

20. Маштаков Я.В. Построение некоторых опорных относительных орбит для тетраэдральной конфигурации спутниковой связи / Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыш. – 2017. – №84. – 26 с. doi: 10.20948 / prepr-2017–84 URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017–84>

21. Кушнирук М.С. Алгоритмы управления движением группы спутников с использованием аэродинамической силы сопротивления для предупреждения столкновений / М.С. Кушнирук, Д.С. Иванов // Препринты ИПМ им. М.В.

Келдыш. – 2015. – №99. – 30 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-99>

22. Кумар Яджур. Применимость модели Клохесси – Уилтшира для оптимального рандеву с малой тягой. – 2019. 10,13140 / RG.2.2.20998.83520.