(cc) BY

Антоновская Ольга Георгиевна

Бесклубная Антонина Вячеславовна

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

***Аннотация**: в работе рассматривается вопрос об изложении материала по теме «Запас устойчивости» раздела «Теория устойчивости» в курсах, посвященных динамике систем, дифференциальным уравнениям и т. д., для студентов технических специальностей. Вопросы нахождения запаса устойчивости реальной технической системы рассматриваются прежде всего с точки зрения доступности изложения материала и возможности их практического применения при решении прикладных задач на основе знаний, полученных в курсах математики студентами технических вузов.*

***Ключевые слова**: профессиональная деятельность обучаемого, фундаментальность образования, умение строить модели реальных явлений, математические методы исследования, теория устойчивости, робастная устойчивость, запас устойчивости.*

***Abstract**: this paper addresses the problem of the "Stability reserve" issue in the "Stability theory" section in the system dynamics, differential equations and other courses for students of technical specialties. The problems of stability reserve determination are examined first of all from the point of view of accessibility of material account and possibility of its practical use when solving applied problems on the base of knowledge obtained by the students of technical high educational institutions in mathematical courses.*

***Keywords**: professional activity of the trainee, fundamentals of education, ability to construct models of real phenomena, mathematical methods of research, stability theory, robust stability, stability reserve.*

Известно, что математическое образование играет важную роль в профессиональном и культурном развитии человека [8]. В связи с этим курс математики в технических вузах должен отвечать требованиям фундаментальности и

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

профессиональной направленности, которые способствуют общей образованности студентов и их профессиональной подготовке [13]. Поэтому полезным является подход к математическому образованию в техническом вузе, когда выясняется происхождение математических задач и понятий из практики, иллюстрируются возможности применения математических методов решения прикладных задач, а также обосновывается широкая применимость одного и того же математического аппарата к изучению явлений различной природы. Ведь качество математической подготовки студентов во многом определяет качества, необходимые в будущей профессиональной деятельности, и прежде всего умение моделировать реальные производственные ситуации и принимать решения в нестандартных ситуациях [13].

Одной из важнейших составляющих математического аппарата, необходимого при решении прикладных практических задач является теория устойчивости движения со всеми ее современными разделами [1; 3; 7]. Речь идет прежде всего о робастной устойчивости [1–2; 10–11] и нахождении запасов устойчивости систем. Дело в том, что многим сложным техническим системам присуща высокая чувствительность протекания происходящих в них процессов к возможной неточности в задании параметров. Такие колебания параметров могут привести к потере устойчивости, если система работает вблизи границы устойчивости. Конечно, при проектировании системы учитываются требования удаленности от границы устойчивости (степень такой удаленности называют запасом устойчивости системы [1; 7]), но вопрос об определении запаса устойчивости реальной технической системы может стать актуальным для любого специалиста (инженера, выпускника технического вуза) в его практической деятельности.

В настоящей работе предложены подходы к решению задачи об определении запаса устойчивости для непрерывных и дискретных динамических систем, основанные на общеизвестных в теории колебаний критериях Рауса – Гурвица, Михайлова и Корсакова. Предложены алгоритмы, позволяющие достаточно

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

просто оценить робастный запас устойчивости на основе численно-аналитических методик.

Известно, что определение величины робастного запаса устойчивости, т.е. запаса устойчивости по выбираемым параметрам, при условии, что остальные параметры задаются в фиксированных интервалах, не представляет труда, если удается осуществить робастное Д-разбиение [9]. При таком подходе область устойчивости строится на плоскости двух действительных параметров, а интервальность остальных параметров, с точки зрения границ области устойчивости, приводит к необходимости отыскания внутренней границы семейства границ Д-разбиения. В этом случае, при выборе любой меры робастной устойчивости, ее фактическая величина опирается на анализ свойств поведения внутренней границы семейства. Однако при нелинейном вхождении параметров в коэффициенты характеристического уравнения, нахождение границ робастного Д-разбиения, а вслед за этим и определение величины запаса устойчивости, может оказаться практически неразрешимой задачей.

В этом случае, определение робастного запаса устойчивости возможно с помощью анализа результатов численных расчетов по различным критериям устойчивости в узлах дискретизации в пространстве исследуемых параметров. В основе предлагаемых методов лежит процедура пересчета параметра, характеризующего величину запаса устойчивости динамической системы, в коэффициенты ее характеристического уравнения. Это позволяет распространить критерии, изложенные в [11, с. 73–87], не только на случай заданного запаса устойчивости, но и на случай его интервального задания, и, тем самым, формализовать процедуру численного определения максимального запаса устойчивости при учете дискретности вычислений и неопределенности в задании параметров.

При асимптотическом уменьшении шага дискретизации по параметрам и запасу устойчивости все предложенные к использованию критерии переходят в соответствующие требования необходимых и достаточных условий реализации в динамической системе заданного запаса устойчивости.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

1. Гурвицевость семейства полиномов и запас устойчивости

Будем характеризовать запас устойчивости величиной $\lambda > 0$, для которой корни семейства полиномов

$$P_n(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^{n-k} (\underline{a_k} \le a_k \le \overline{a_k}) \tag{1}$$

удовлетворяют условию $Re\, p \le -\lambda$.

Для того, чтобы свести задачу определения λ к проблеме Гурвица, перейдем на плоскости корней к новому значению p, соответствующему сдвигу мнимой оси на величину λ влево. В этом случае (1) переходит в полином [14]

$$H(p) = \sum_{i=0}^{n} b_i p^{n-i}, \tag{2}$$

коэффициенты которого определяются из тождества

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (p-\lambda)^{n-k} \equiv \sum_{i=0}^{n} b_i p^{n-i}. \tag{3}$$

После разложения левой части (3) в ряд Тейлора и приравнивания коэффициентов перед одинаковыми степенями p в получившемся соотношении, получаем

$$b_i = \sum_{k=0}^{i} C_{ik} (-\lambda)^{i-k} a_k, \tag{4}$$

где

$$C_{ik} = \frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} \tag{5}$$

при условии, что $0!$ принимается равным единице. Очевидно, что $C_{ii} = 1$, $C_{nk} = 1$.

Соотношение (4) суть скалярная запись следующего матричного уравнения

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -C_{10} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_{20}\lambda^2 & -C_{21}\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n-1,0}(-\lambda)^{n-1} & C_{n-1,1}(-\lambda)^{n-2} & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ (-\lambda)^n & (-\lambda)^{n-1} & \cdots & \cdots & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Непосредственно из (6) видно, что матрица отображения – нижняя треугольная с определителем, равным единице. Следовательно, пространства коэффициентов a_k и b_k связаны взаимнооднозначно. Поэтому параллелепипед $\Pi_a = (\underline{a_k} \le a_k \le \overline{a_k})$ отображается в многогранник M_b так, что граница Π_a отображается в границу M_b. Согласно «реберной теореме» [11] (Барлетт, Холлет и Лин), Гурвицевость полинома *H(p)* с возмущениями коэффициентов b_k в многограннике M_b имеет место тогда, когда на множестве выделенных ребер M_b *H(p)* Гурвицев [6]. Применительно к рассматриваемому нами случаю это означает необходимость проверки Гурвицевости *H(p)* для каждого $\underline{a_k} \le a_k \le \overline{a_k}$ при условии, что остальные коэффициенты $a_j (j \ne k)$ принимают свои крайние значения $\underline{a_j}, \overline{a_j}$. Однако поскольку «реберная теорема» не учитывает специфики конкретных критериев определения Гурвицевости, а также наличия какой-либо дополнительной информации об устойчивости *H(p)*, возможны различные видоизменения конкретных схем расчетов. Далее указанный вопрос рассматривается как с точки зрения проверки устойчивости *H(p)* при заданном λ, так и с точки зрения возможности определения $\lambda = \lambda_{opt}$.

2. Запас устойчивости и возмущенная схема Рауса

При применении возмущенной схемы Рауса к полиному *H(p)* [9], необходимо задать интервалы изменения его коэффициентов как независимые. При $\lambda = const$ согласно (4) для получения выражения для $\underline{b_i}$ достаточно считать в (4)

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$a_k = \begin{cases} \underline{a_k}, k = 2m (m = 0,1,2,\ldots), \\ \overline{a_k}, k = 2m - 1 (m = 1,2,\ldots), \end{cases} \tag{7}$$

Выражение для $\overline{b_i}$ из (4) получается при

$$a_k = \begin{cases} \overline{a_k}, k = 2m (m = 0,1,2,\ldots), \\ \underline{a_k}, k = 2m - 1 (m = 1,2,\ldots). \end{cases} \tag{8}$$

Переход в (4) к выражениям (7),(8) означает переход от рассмотрения многогранных возмущений в M_b к рассмотрению возмущений коэффициентов в параллелепипеде $\Pi_b = (\underline{b_i} \le b_i \le \overline{b_i})$, содержащем в себе многогранник M_b. Поэтому результаты определения Гурвицевости $H(p)$ при $\lambda = const$ с помощью возмущенной схемы Рауса с возмущениями коэффициентов b_i в Π_b являются лишь достаточными условиями расположения корней $P_n(p)$ левее $p = -\lambda$ на плоскости корней $P_n(p)$. В пользу перехода от учета возмущения коэффициентов b_i не в многограннике M_b, а в параллелепипеде Π_b говорит тот факт, что возмущенная схема Рауса основана на использовании достаточных оценок для погрешностей элементов таблицы Рауса и поэтому переход от оценок Гурвицевости $H(p)$ к оценке Гурвицевости в Π_b не изменяет достаточного характера общей схемы расчетов. Приблизиться к необходимым и достаточным условиям оценки Гурвицевости $H(p)$ в многограннике M_b при использовании возмущенной схемы Рауса можно за счет увеличения общего количества вычислений следующим образом. Разобьем исходный параллелепипед Π_a на параллелепипеды меньшего размера с помощью введения на каждом интервале $[\underline{a_k}, \overline{a_k}]$ N_k подинтервалов так, что для j-го подинтервала

$$\underline{a_k^j} = \underline{a_k} + h_k (j - 1), \tag{9}$$

$$\overline{a_k^j} = \underline{a_k} + h_j j,$$

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

где индекс $j = j(k) = 1,2,\ldots,N_k$ и $h_k = (\overline{a_k} - \underline{a_k})/N_k$. В этом случае общее количество параллелепипедов меньшего размера, в сумме образующих Π_a равно $\prod_{k=0}^{n} N_k$.

Указанные параллелепипеды меньшего размера, отображаясь формулами (4) в многогранники меньшего размера, с помощью достаточных оценок (6),(7) более точно описывают размеры исходного многогранника M_b. В пределе при $N_k \to \infty$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ оценки (6), (7) точно определяют многогранник M_b. А поскольку при $N_k \to \infty$ величина $\overline{a_k^j} - \underline{a_k^j} \to 0$ и, соответственно, $\overline{b_j} - \underline{b_j} \to 0$, т.е. возмущенная схема Рауса дает точные данные о расположении корней $H(p)$относительно мнимой оси, указанный асимптотический переход при $N_k \to \infty$ соответствует использованию необходимых и достаточных условий расположения корней $P_n(p)$ относительно прямой $p = -\lambda$.

Для определения максимально возможного значения $\lambda = \lambda_{opt}$, при котором наступает потеря устойчивости $H(p)$, может быть использована возмущенная схема Рауса за счет задания λ в интервале $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$. При этом, согласно (4), коэффициенты b_i получают дополнительное возмущение. Обозначая максимальное и минимальное значения b_i при условии интервальности λ соответствующей волнистой чертой и повторяя рассуждения, связанные с использованием достаточных условий (7),(8), находим, что для получения выражений для $b_i, \tilde{b}_i$ достаточно в (4) произвести замены (7) и соответственно (8), и, кроме того, распространить черту у коэффициента a_k на величину λ однотипным образом. Например, если при $\lambda = const$

$$
\begin{aligned}
&b_0 = a_0, \\
&b_1 = -n\lambda a_0 + a_1, \\
&b_2 = \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 a_0 - (n-1)\lambda a_1 + a_2, \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

то согласно сказанному, при интервальном λ

$$\begin{aligned} b_0 &= \underline{a_0}, \\ b_1 &= -n\overline{\lambda}\,\overline{a_0} + \underline{a_1}, \\ b_2 &= \frac{n(n-1)}{2}\underline{\lambda}^2\underline{a_0} - (n-1)\overline{\lambda}\,\overline{a_1} + \underline{a_2}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{11}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 &= \overline{a_0}, \\ \tilde{b}_1 &= -n\underline{\lambda}\,\underline{a_0} + \overline{a_1}, \\ \tilde{b}_2 &= \frac{n(n-1)}{2}\overline{\lambda}^2\overline{a_0} - (n-1)\underline{\lambda}\,\underline{a_1} + \overline{a_2}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, что при $\overline{\lambda} - \underline{\lambda} \to 0$ и $N_k \to \infty$ результаты применения возмущенной схемы Рауса асимптотически стремятся к результатам точного исследования расположения корней семейства (1) относительно прямой $p = -\lambda$.

Используя указанные соображения, можно построить схему определения λ_{opt} для семейства полиномов $P_n(p)$ за счет выбора дискретных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \to \lambda_{opt}$, а, следовательно, и задания интервалов $[\underline{\lambda_\nu}, \overline{\lambda_\nu}], (\nu = 1, 2, \ldots, N-1)$. Выбор значений λ_ν может быть осуществлен динамическим образом из условия выполнения устойчивости $H(p)$ в каждом из предыдущих интервалов и поиска максимального значения λ_ν, при котором будет выполняться условие устойчивости $H(p)$ в следующем интервале.

3. Запас устойчивости и метод Рауса – Гурвица

Известно, что переход корней $P_n(p)$ через $p = -\lambda$ [14] слева направо соответствует нарушению неравенств $b_0 > 0, b_n > 0$ и $\Delta_{n-1} > 0$, где Δ_{n-1} – предпоследний определитель Гурвица, составленный из коэффициентов полинома $H(p)$. Поскольку $b_0 = a_0$ и не зависит от λ, нарушение неравенства $b_0 > 0$ соответствует нарушению неравенства $\underline{a_0} > 0$, т.е. легко проверяется. Нарушение

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

же неравенства $b_n > 0$ при $\lambda \neq 0$ легко может быть установлено при анализе выражения для

$$b_n = (-\lambda)^n a_0 + (-\lambda)^{n-1} a_1 + \ldots + (-\lambda) a_{n-1} + a_n, \tag{13}$$

при условии, что при $\lambda = 0$ $\min\limits_{a_k} b_n = \min a_n = \underline{a_n} > 0.$ Следовательно, для определения λ_{opt} необходимо анализировать выражение $\min\limits_{a_k} b_n$ при увеличении λ, начиная со значения $\lambda = 0.$ Представим при $\lambda \neq 0$ выражение для b_n в виде разности

$$b_n = b_n^{ч} - b_n^{н}, \tag{14}$$

где $b_n^{ч}$ – члены в правой части (13), содержащие λ в четных степенях, включая нуль, а $b_n^{н}$ – члены, содержащие λ в нечетных степенях, так что

$$\begin{aligned} b_n^{ч} &= a_n + a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-4}\lambda^4 + \ldots, \\ b_n^{н} &= a_{n-1}\lambda + a_{n-3}\lambda^3 + a_{n-5}\lambda^5 + \ldots. \end{aligned} \tag{15}$$

В этом случае, очевидно,

$$\min_{a_k} b_n = \underline{b_n^{ч}} - \overline{b_n^{н}} = f(\lambda), \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \underline{b_n^{ч}} &= \underline{a_n} + \underline{a_{n-2}}\lambda^2 + \underline{a_{n-4}}\lambda^4 + \ldots, \\ \overline{b_n^{н}} &= \overline{a_{n-1}}\lambda + \overline{a_{n-3}}\lambda^3 + \overline{a_{n-5}}\lambda^5 + \ldots. \end{aligned} \tag{17}$$

При такой постановке вопроса $\lambda = \lambda_{opt}$ является минимальным положительным действительным корнем уравнения $f(\lambda) = 0$ при условии, что $\min\limits_{a_k} \Delta_{n-1} > 0$ $(0 < \lambda < \lambda_{opt})$. Необходимо, однако, отметить: что процедура нахождения точного значения $\min\limits_{a_k} \Delta_{n-1}$ в настоящее время неизвестна. Поэтому приходится ограничиваться использованием различного вида оценок для Δ_{n-1}. Один из приемов получения оценки для $\min\limits_{a_k} \Delta_{n-1}$ заключается в следующем.

Представим Δ_{n-1} в виде разности положительных членов, т.е.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$\Delta_{n-1} = A_{n-1}(a_k, \lambda) - B_{n-1}(a_k, \lambda). \tag{18}$$

Такое представление Δ_{n-1} всегда возможно, т.к. по постановке вопроса $\lambda \geq 0$ и, в силу требования о выполнении необходимого условия устойчивости, $a_k > 0$, и следовательно, появление в (18) отрицательных членов связано только с операцией раскрытия определителя Δ_{n-1}.

При $\underline{a_k} \leq a_k \leq \overline{a_k}$, согласно (18), имеет место оценка

$$\underline{\Delta_{n-1}} = \min_{a_k} \Delta_{n-1} \geq \underline{\Delta^*_{n-1}} = \underline{A_{n-1}}(\lambda) - \overline{B_{n-1}}(\lambda), \tag{19}$$

где черта у A_{n-1} и B_{n-1} переносится однотипным образом на все входящие в них a_k. Тогда выполнения неравенства $\underline{\Delta^*_{n-1}}(\lambda = \lambda') > 0$ достаточно для утверждения, что $\underline{\Delta_{n-1}}(\lambda = \lambda') > 0$ и, следовательно, при $\lambda = \lambda'$ комплексно-сопряженные корни семейства (1) не могут находиться на прямой $Re\, p = -\lambda'$.

Для оценки величины λ_{opt} на основе анализа знакоположительности Δ_{n-1} $(a_k \in \Pi_a, 0 \leq \lambda \leq \lambda_{opt})$ можно, как и в (12), считать $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \overline{\lambda}$, т.е. заданным в интервале. Тогда условие знакопостоянства Δ_{n-1} $(a_k \in \Pi_a, \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \overline{\lambda})$ можно характеризовать на основе анализа величины Δ^*_{n-1}, где

$$\min_{\substack{a_k \in \Pi_a \\ \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \overline{\lambda}}} \Delta_{n-1} \geq \Delta^*_{n-1} \equiv \underline{A_{n-1}} - \overline{B_{n-1}}, \tag{20}$$

а черта у A_{n-1} и B_{n-1} переносится однотипным образом на все входящие в них a_k и параметр λ. В этом случае поиск $\lambda = \lambda_{opt}$, соответствующего потере знакоположительности Δ_{n-1} на семействе сводится к поиску минимальной последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ такой, что в каждом из интервалов $\lambda_\nu \leq \lambda \leq \lambda_{\nu+1}$ Δ^*_{n-1} знакоположительно.

Пример. В качестве примера нахождения $\underline{\Delta^*_{n-1}}$ и Δ^*_{n-1} рассмотрим процедуру получения Δ^*_{n-1} при $n = 3$. Согласно формулы (4) в этом случае

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$b_0 = a_0, b_1 = -3\lambda a_0 + a_1, b_2 = 3\lambda^2 a_0 - 2\lambda a_1 + a_2,$$
$$b_3 = -\lambda^3 a_0 + \lambda^2 a_1 - \lambda a_2 + a_3 \qquad (21)$$

и, следовательно, предпоследний определитель Гурвица

$$\Delta_2 = 8a_0 a_1 \lambda^2 + a_1 a_2 - 8a_0^2 \lambda^3 - 2(a_1^2 + a_0 a_2)\lambda - a_0 a_3. \qquad (22)$$

В соответствии с (19), (20) и (21)

$$\underline{\Delta_2^*} = 8\underline{a_0}\,\underline{a_1}\lambda^2 + \underline{a_1}\,\underline{a_2} - 8\overline{a_0^2}\lambda^3 - 2(\overline{a_1^2} + \overline{a_0}\,\overline{a_2})\lambda - \overline{a_0}\,\overline{a_3}, \qquad (23)$$

$$\overline{\Delta_2^*} = 8\underline{a_0}\,\underline{a_1}\,\underline{\lambda^2} + \underline{a_1}\,\underline{a_2} - 8\overline{a_0^2}\,\overline{\lambda}^3 - 2(\overline{a_1^2} + \overline{a_0}\,\overline{a_2})\overline{\lambda} - \overline{a_0}\,\overline{a_3}. \qquad (24)$$

Как и в разделе 2, достаточность условий (19),(20) можно ослабить, разбивая параллелепипед Π_a на параллелепипеды меньшего размера и уменьшая $\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu$. При $N_k \to \infty,\ \lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \to 0$

$$\min_{a_k,\lambda} \Delta_{n-1}(a_k \in \Pi_a, \underline{\lambda} \le \lambda \le \overline{\lambda}) \to \Delta_{n-1}(a_k, \lambda),$$

т.е. к точному выражению предпоследнего определителя Гурвица.

Используя указанные соображения по оценке минимального положительного корня уравнения $f(\lambda) = 0$ и условия знакоположительности Δ_{n-1}^* можно построить схему определения λ_{opt} для семейства полиномов $P_n(p)$ аналогично тому, как это предложено в случае возмущенной схемы Рауса.

4. Запас устойчивости и критерий Михайлова

Применение критерия Михайлова для определения величины λ_{opt} подразумевает проверку выполнения условия положительности коэффициентов b_i, как необходимого условия устойчивости $H(p)$ [6, 12]. Поскольку, как показано в разделе 1, коэффициенты $b_i \in M_b$, т.е. достаточно сложной области задания, процедуру анализа можно упростить, ограничившись проверкой выполнения условия $b_i > 0$ в параллелепипеде Π_b, заключающем в себе многогранник M_b. В этом случае оценки для коэффициентов b_i при различных i могут быть проведены независимо и для получения оценки b_i снизу достаточно в (4) произвести замену (7), а для оценки b_i сверху – замену (8).

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Необходимо отметить, что процедура использования оценок для b_i эквивалентна представлению кривой Михайлова в виде

$$\begin{aligned} \xi &= R_0(\omega) - R_1(\omega), \\ \eta &= J_0(\omega) - J_1(\omega), \end{aligned} \tag{25}$$

где функции $R(\omega)$ и $J(\omega)$ положительны, с последующей оценкой ξ и η сверху и снизу на множестве $\underline{a_k} \le a_k \le \overline{a_k}$.

Для точного построения внутренней огибающей семейства годографов Михайлова достаточно общее выражение для $P_n(j\omega - \lambda)$ представить в виде

$$P_n(j\omega - \lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k (R_k(\omega) + jJ_k(\omega)), \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} R_k(\omega) &= Re(j\omega - \lambda)^{n-k}, \\ J_k(\omega) &= Im(j\omega - \lambda)^{n-k}, \end{aligned} \tag{27}$$

и легко определяются после использования формулы для бинома Ньютона, т.к. в этом случае

$$(j\omega - \lambda)^{n-k} = \sum_{m=0}^{n-k} C_{n-k}^{m} (-\lambda)^{n-k-m} (j\omega)^m, \tag{28}$$

где C_{n-k}^{m} – число сочетаний из $n-k$ по m.

Согласно (26), координаты годографа Михайлова в этом случае определяются выражениями

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=0}^{n} a_k R_k(\omega), \\ \eta &= \sum_{k=0}^{n} a_k J_k(\omega). \end{aligned} \tag{29}$$

Из (29) следует, что при $\omega = const$ координаты ξ и η линейно зависимы через коэффициенты a_k, и поэтому параллелепипед Π_a проектируется на плоскость ξ, η в виде многоугольника. Вектор $\overline{n} = (\eta'_\omega, -\xi'_\omega)$ нормали к границе (29), направленный вправо по ходу увеличения ω, определяется, согласно (29), формулами

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$\xi'_\omega = \sum_{k=0}^{n} a_k R'_{k\omega}\,,$$
$$\eta'_\omega = \sum_{k=0}^{n} a_k J'_{k\omega}\,, \tag{30}$$

а вектор возмущений $(\delta\xi,\delta\eta)$ годографа (29) при $\omega = const$ и $\underline{a_k} \le a_k \le \overline{a_k}$ – проекциями

$$\delta\xi = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial\xi}{\partial a_k}\delta a_k = \sum_{k=0}^{n} R_k(\omega)\delta a_k\,,$$
$$\delta\eta = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial\eta}{\partial a_k}\delta a_k = \sum_{k=0}^{n} J_k(\omega)\delta a_k\,, \tag{31}$$

Условие положительности скалярного произведения нормали $\overline{n}$ и вектора возмущений $(\delta\xi,\delta\eta)$, соответствующее одностороннему расположению семейства годографов, принимает вид

$$\eta'_\omega\,\delta\xi - \xi'_\omega\,\delta\eta \ge 0 \tag{32}$$

или, с учетом (30), (31),

$$\sum_{k=0}^{n} \chi_k \delta a_k + \eta'_\omega\,\delta a_n \ge 0, \tag{33}$$

где

$$\chi_k = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu (J'_{\nu\omega} R_k(\omega) - R'_{\nu\omega} J_k(\omega), \tag{34}$$

а штрихом обозначены частные производные по ω. Знаки $\delta a_k (k = 0,1,\ldots,n)$ в (33) могут быть определены только на тех участках семейства годографов, на которых χ_k и η'_ω знакопостоянны на всем семействе. Выполнение условий знакопостоянства указанных величин в свою очередь может быть определено, т.к. χ_k и η'_ω являются линейными функциями a_k. Так если

$$sign \min_{a_k} \chi_k = sign \max_{a_k} \chi_k \text{ и } sign \min_{a_k} \eta'_\omega = sign \max_{a_k} \eta'_\omega,$$

то χ_k и η'_ω знакопостоянны на всем семействе. Если обозначить

$$F_\nu = J'_{\nu\omega} R_k(\omega) - R'_{\nu\omega} J_k(\omega), \tag{35}$$

то

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$\chi_k = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu F_\nu \tag{36}$$

и, очевидно,

$$\min_{a_k} \chi_k = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1} [\overline{a_\nu} + \underline{a_\nu} - (\overline{a_\nu} - \underline{a_\nu}) signF_\nu], \tag{37}$$

$$\max_{a_k} \chi_k = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1} [\overline{a_\nu} + \underline{a_\nu} + (\overline{a_\nu} - \underline{a_\nu}) signF_\nu]. \tag{38}$$

Аналогично для η'_ω

$$\min_{a_k} \eta'_\omega = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1} [\overline{a_\nu} + \underline{a_\nu} - (\overline{a_\nu} - \underline{a_\nu}) signJ'_{k\omega}], \tag{39}$$

$$\max_{a_k} \eta'_\omega = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1} [\overline{a_\nu} + \underline{a_\nu} + (\overline{a_\nu} - \underline{a_\nu}) signJ'_{k\omega}]. \tag{40}$$

В случае знакопостоянства χ_k и η'_ω на семействе, граница семейства (в сторону устойчивости) соответствует в (29) следующим значениям a_k

$$a_k = \begin{cases} \underline{a_k}, \chi_k > 0, \\ \overline{a_k}, \chi_k < 0 (k = 1,2,\ldots,n-1), \end{cases} \tag{41}$$

$$a_n = \begin{cases} \underline{a_n}, \eta'_\omega > 0, \\ \overline{a_n}, \eta'_\omega < 0. \end{cases} \tag{42}$$

В случае знакопеременности какого-либо $\chi_k (k = 0,1,\ldots,n-1)$ или η'_ω неравенство (33) не позволяет сделать заключение о том, какому a_k в (29) соответствует внутренняя граница устойчивости семейства. Необходимо отметить, что точная информация о расположении всех корней семейства (1) левее прямой $Re\ p = -\lambda$ с помощью анализа годографов Михайлова может быть получена только с помощью изучения проекций многогранника M_b на плоскость $\xi = ReH(j\omega), \eta = ImH(j\omega)$ при различных значениях $\omega \geq 0$. Совершенно очевидно, что в такой постановке вопроса критерий Михайлова дает наглядное доказательство «реберной теоремы» и позволяет ответить на вопрос, какие ребра многогранника определяют устойчивость $H(p)$.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Таким образом, определение величины λ_{opt} сводится к определению такого значения λ, при котором внутренняя граница семейства годографов Михайлова попадает в начало координат плоскости ξ, η и при дальнейшем увеличении λ пересекает ось ξ, оставляя начало координат справа от внутренней границы семейства, соответствующей возрастанию ω.

5. Устойчивость семейства полиномов относительно единичного круга и запас устойчивости

Запас устойчивости дискретных динамических систем может быть охарактеризован параметром $0 \le r \le 1$ таким, что $\max_i |z_i| \le r$, где z_i – корни характеристического уравнения

$$P_n(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^{n-k} (\underline{a_k} \le a_k \le \overline{a_k}) \tag{43}$$

Поскольку устойчивость $P_n(p)$ имеет место при $r = 1$, задача определения условий обеспечения заданного запаса устойчивости или определение минимально возможного $r = r_{opt}$ является более общей задачей по отношению к определению условий устойчивости (43).

Параметр r можно ввести формально в (43) за счет замены $z \Rightarrow rz$. В этом случае на плоскости корней при любом r корни полинома должны лежать в единичном круге, т.е. так, как это имеет место при исследовании устойчивости. При таком подходе

$$P_n(p) \to H(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^{n-k} (\underline{b_k} \le b_k \le \overline{b_k}), \tag{44}$$

где

$$b_k = a_k r^{n-k}, \underline{b_k} = \underline{a_k} r^{n-k}, \overline{b_k} = \overline{a_k} r^{n-k}. \tag{45}$$

6. Запас устойчивости дискретной системы и алгебраический критерий

Наличие простых соотношений (45) позволяет воспользоваться схемой возмущения коэффициентов характеристического уравнения в алгебраическом критерии устойчивости дискретных систем. Так при $r = const$ опорные значе-

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

ния коэффициентов $b_k = b_k^*$, при которых производится счет, могут быть заданы соотношениями

$$b_k^* = \frac{\underline{a_k} + \overline{a_k}}{2} r^{n-k}, \tag{46}$$

а погрешность задания каждого коэффициента соответственно

$$\varepsilon_k = \frac{\underline{a_k} - \overline{a_k}}{2} r^{n-k}. \tag{47}$$

Поэтому для определения устойчивости семейства $H(p)$ можно воспользоваться возмущенной схемой алгебраического критерия как для случая $\left|b_k - b_k^*\right| \le \varepsilon_k$ [14], так и для более грубых оценок $\left|b_k - b_k^*\right| \le \max\limits_k \varepsilon_k \le \varepsilon$ [13]. В любом случае выполнение условий соответствующих теорем гарантирует расположение корней семейства (43) внутри круга радиуса r.

Для того, чтобы теоремы возмущенного алгебраического критерия переходили для произвольных интервалов, можно воспользоваться условием (9) введения в рассмотрение подинтервалов.

При определении $r = r_{opt}$ за счет выбора последовательности значений $r_\nu (\nu = 1,2,\ldots,n)$ возникает проблема обеспечения достоверности расположения корней семейства (43) внутри круга радиуса $r \in (r_\nu, r_{\nu+1})$. Очевидно, что для того, чтобы воспользоваться алгебраическим критерием и при возмущении r, достаточно считать $\underline{r} = r_\nu, \overline{r} = r_{\nu+1}$, тогда

$$b_k^* = \tilde{b}_k^* = \frac{1}{2}\left(\max_{a_k, r} b_k + \min_{a_k, r} b_k\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{a_k}\,\overline{r}^{\,n-k} + \underline{a_k}\,\underline{r}^{\,n-k}\right), \tag{48}$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_k = \tilde{\varepsilon}_k = \frac{1}{2}\left(\max_{a_k, r} b_k - \min_{a_k, r} b_k\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{a_k}\,\overline{r}^{\,n-k} - \underline{a_k}\,\underline{r}^{\,n-k}\right). \tag{49}$$

Выполнение соответствующих теорем с возмущенной схемой алгебраического критерия в этом случае гарантирует, что все корни семейства (43) лежат внутри круга радиуса $r = \underline{r} = r_\nu$. Определив минимально возможное значение r_{opt}, для

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

которого при $r_{opt} \le r \le 1$ $H(p)$ устойчив, решаем проблему определения максимального запаса устойчивости дискретной системы.

Необходимо отметить, что несмотря на различие в математической формулировке возмущенной схемы Рауса для непрерывных динамических систем и возмущений в схеме алгебраического критерия для дискретных систем, принцип дробления интервалов $(\underline{a_k}, \overline{a_k})$ при $r = const$ и выборе максимального шага по r, для которого еще выполняются достаточные условия критериев, учитывающих возмущения коэффициентов a_k и параметра r, по своей фактической сути одинаков. Этот принцип основывается на очевидном утверждении, что если в пространстве $r, a_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ точка, в которой производятся вычисления, лежит внутри области устойчивости, то всегда существуют конечные возмущения a_k и r, для которых будут справедливы достаточные условия устойчивости $H(p)$.

7. Запас устойчивости и критерий Корсакова

При использовании критерия Корсакова как для проверки выполнения условий устойчивости $H(p)$ относительно единичного круга при $r = const$, так и для нахождения минимально возможного значения r_{opt}, такого, что при $r_{opt} \le r \le 1$ $H(p)$ устойчив, можно ограничиться анализом невыхода в пространстве $r, a_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ за границы области устойчивости, если известно, что при $r = 1$ и $a_k = a_k^8$ $H(p)$ устойчив. В этом случае условие расположения в сторону устойчивости от границ N_+, N_-, N_ϕ соответствует выполнению неравенств $H(+1) > 0, (-1)^n H(-1) > 0$ и $det(A_k - B_k) > 0$, где A_k и B_k – матрицы Корсакова полинома $H(p)$.

Проверка условия $H(+1) > 0$ на семействе очевидна, т.к.

$$\underline{H(+1)} = \min_{a_k} H(+1) = \sum_{k=0}^{n} \underline{a_k} r^{n-k} \qquad (50)$$

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

и, следовательно, условие $\underline{H(+1)} > 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы $H(+1) > 0$ было на всем семействе. Для выполнения условия $(-1)^n H(-1) > 0$ достаточно обратить внимание, что, согласно (44),

$$(-1)^n H(-1) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^{n-k} (-1)^{2n-k}, \tag{51}$$

и отрицательный знак перед членами $a_k r^{n-k}$ появляется только при k – нечетном. Поэтому

$$\underline{(-1)^n H(-1)} = \min_{a_k} (-1)^n H(-1) = \sum_{k,четн} \underline{a_k} r^{n-k} - \sum_{k,нечетн} \overline{a_k} r^{n-k} \tag{52}$$

и, следовательно, положительность правой части (52) является необходимой и достаточной для положительности $(-1)^n H(-1)$ по всему семейству.

Процедура определения величины r_{opt}, при которой происходит попадание на границу N_+ или N_- в этом случае очевидна и сводится к определению максимального корня $r < 0$, при котором обращается в ноль либо правая часть (50), либо правая часть (52).

При рассмотрении выполнимости условия с квадратными матрицами $(n-1)$-го порядка

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 \end{pmatrix}, \tag{53}$$

$$B_{n-1} = \begin{pmatrix} b_2 & b_3 & \dots & \dots & b_n \\ b_3 & b_4 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & \dots & \dots & 0 \\ b_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{54}$$

после замены $b_k \to a_k r^{n-k}$ основная сложность состоит в нахождении выражения для $\min_{a_k} \det(A_k - B_k)$.

Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим случай $n = 4$, когда

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$\Delta_3 = det(A_3 - B_3) = \begin{vmatrix} b_0 - b_2 & b_1 - b_3 & b_2 - b_4 \\ -b_3 & b_0 - b_4 & b_1 \\ -b_4 & 0 & b_0 \end{vmatrix} = \tag{55}$$

$$= (b_0 - b_4)^2 (b_0 - b_2 + b_4) - (b_1 - b_3)^2 b_0 + (b_0 - b_4)(b_1 - b_3) b_1 .$$

Заменяя b_k на $a_k r^{n-k}$, находим, что

$$\Delta_3(r) = (a_0 r^4 - a_4)^2 (a_0 r^4 - a_2 r^2 + a_4) - (a_1 r^3 - a_3 r)^2 a_0 r^4 + \\ + (a_0 r^4 - a_4)(a_1 r^3 - a_3 r) a_1 r^3 , \tag{56}$$

т.е. представляет собой полином от r^2 достаточно высокой степени.

8. Алгоритм определения максимального значения $\lambda = \lambda_{max}$ робастного запаса устойчивости

Как следует из [11, с. 186–196] и изложенных выше результатов, при

$\underline{b_k} \le b_k \le \overline{b_k}$,

$\underline{\lambda} \le \lambda \le \overline{\lambda}$

для характеристического полинома (2)

$$H(p) = \sum_{i=0}^{n} b_i p^{n-i}$$

достаточными условиями робастной устойчивости являются

$$\min_{a_k} b_k(a_k, \lambda) = f_1(\lambda) > 0, \\ \min_{a_k} \Delta_{n-1}(a_k, \lambda) = f_2(\lambda) > 0. \tag{57}$$

Предположим, что при $\lambda = 0$ для полинома $H(p)$ в плоскости каких-либо двух выбираемых параметров b_i, b_j при интервальности остальных построена область робастной устойчивости [11, с. 186–196]. Для оптимизации качества переходного процесса динамических систем необходимо определить $\lambda = \lambda_{max} \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ такое, чтобы выполнялись соотношения (57). Так как $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ являются полиномами относительно λ, то процесс определения $\lambda_{max} > 0$ можно вести следующим образом:

1. Находим с помощью известных алгоритмических процедур корни полиномов

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$f_1(\lambda)=0,$$
$$f_2(\lambda)=0. \qquad (58)$$

Обозначаем их через $\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\ldots,\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\ldots,\lambda_n^{(2)}$ соответственно.

2. Образуем последовательность чисел $\{\alpha_k\}$, представляющую собой совокупность действительных и положительных корней $\lambda_i^{(1)}$ и $\lambda_i^{(2)}(i=1,2,\ldots,n)$, т.е.

$$\{\alpha_k\}=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m(1\le m\le 2n). \qquad (59)$$

3. Определяем

$$\lambda=\lambda_{max}=\min_{\alpha_k}\{\alpha_k\}.$$

Таким образом, определено $\lambda=\lambda_{max}$, оптимизирующее в смысле (57) качество переходного процесса динамической системы.

4. Строим область робастной устойчивости (57) в плоскости параметров b_i,b_j при интервальности всех остальных параметров и $\lambda=\lambda_{max}$. Эта область и укажет те значения выбираемых параметров, «оптимизирующих» качество переходного процесса в смысле (57).

В заключение следует отметить, что предложенные выше методы определения запаса устойчивости систем достаточно просты в применении и наглядны, а их изложение в математических курсах не займет много времени. При этом важность вопроса о нахождении запаса устойчивости в теории устойчивости не вызывает сомнений. А значит и его изложение в образовательном процессе является чрезвычайно важным. В особенности он может быть полезен студентам технических специальностей как будущим исследователям, ученым и инженерам высокой квалификации.

Список литературы

1. Александров А.Г. Запасы устойчивости и робастная устойчивость / А.Г. Александров // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – №6. – С. 32–41.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

2. Антоновская О.Г. К исследованию робастной квадратичной устойчивости систем / О.Г. Антоновская // Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018. – С. 12–15.

3. Антоновская О.Г. Некоторые предложения по изложению метода функций Ляпунова в образовательном процессе / О.Г. Антоновская, А.В. Бесклубная // Международный научно-исследовательский журнал. – 2019. – №4 (82), ч. 2. – С. 94–98.

4. Горюнов В.И. О приближенном исследовании расположения корней характеристического полинома / В.И. Горюнов // Известия вузов. Серия: Радиофизика. – 1969. – №7. – С. 1083–1086.

5. Горюнов В.И. О приближенных условиях принадлежности корней полинома внутренности единичного круга / В.И. Горюнов // Динамика систем: межвуз. сб. – Горький: Изд-во ГГУ, 1976. – С. 169–173.

6. Джури Э.И. Робастность дискретных систем / Э.И. Джури // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №5. – С. 3–28.

7. Ильюшин Ю.В. Исследование запаса устойчивости систем автоматического управления / Ю.В. Ильюшин, А.Л. Кравцова // Альманах современной науки и образования. – 2012. – №1 (56). – С. 26–37.

8. Князева О.Г. Профессиональная направленность обучения математике в технических вузах / О.Г. Князева // Известия Алтайского государственного университета. Серия: Педагогика и психология. – 2012. – С. 17–21.

9. Неймарк Ю.И. Методы робастной устойчивости и робастное Д-разбиение / Ю.И. Неймарк // Динамика систем: межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. – С. 39–55.

10. Несенчук А.А. Корневой метод определения запаса устойчивости динамической системы с изменяющимся параметром / А.А. Несенчук / Вестник БНГУ. – 2008. – №6. – С. 47–51.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

11. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.

12. Поляк Б.Т. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем / Б.Т. Поляк, Я.З. Цыпкин // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №9. – С. 46–54.

13. Сауренко Н.Е. Инновационное обучение математике в современном вузе / Н.Е. Сауренко // Человек и образование (Академический вестник Института образования взрослых Российской академии образования). – 2010. – №2 (23). – С. 137–139.

14. Фельдбаум А.А. Методы теории автоматического регулирования / А.А. Фельдбаум, А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1971. – 269 с.

Антоновская Ольга Георгиевна – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет», Россия, Нижний Новгород.

Бесклубная Антонина Вячеславовна – канд. пед. наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет», Россия, Нижний Новгород.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)