(cc) BY

Глебова Мария Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Токарева Екатерина Сергеевна
студентка
Педагогический институт им. В.Г. Белинского
ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет»
г. Пенза, Пензенская область

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОТБОРУ КОРНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация*: статья раскрывает проблему небольшого процента решения задания №13 ЕГЭ профильного уровня по математике, приведены рекомендации по выбору метода отбора корней тригонометрического уравнения и его оформлению.*

Ключевые слова*: отбор корней тригонометрического уравнения, алгебраический способ, арифметический способ, геометрический способ, ЕГЭ.*

В настоящее время самым важным для школьников, чтобы получить высшее образование и получить престижную работу, является успешная сдача экзаменов, а точнее ЕГЭ. Успешной считается сдача ЕГЭ по математике от 70 баллов. Это полностью решенная первая (тестовая) часть и 2 балла из второй части. Например, это может быть полностью верное решение 13 задания, оцененное в 2 балла – за решение уравнения и отбор корней данной уравнения из некоторого промежутка. Для того, чтобы решить правильно это задание, выпускники должны уметь оперировать тригонометрическими функциями, их графиками и знать решения простейших уравнений. Если под а) 13 задание решают большинство обучающихся, то б) приступают многие, но правильное решение и оформление получается не у многих.

Актуальность данной статьи обусловлена низким процентом выполнения задания на отбор корней тригонометрического уравнения в ЕГЭ по математике профильного уровня (задание №13). По статистике, в 2020 году процент

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

учеников, получивших максимальное количество баллов за это задание в некоторых областях, составил около 32–35%, хотя приступают практически все. В данной статье попробуем разобраться, в чем же причина. Для этого были рассмотрены все имеющиеся школьные учебники по алгебре и началам математического анализа, где встречаются тригонометрические уравнения. Выяснилось, что в некоторых учебниках отбор корней тригонометрических уравнений отсутствует, в некоторых рассматривается, но в очень сжатом виде, чего однозначно недостаточно для решения и правильного оформления задания №13(б) в ЕГЭ профильного уровня. Наиболее подробно, по сравнению с другими, отбор корней тригонометрических уравнений представлен в учебниках А.Г. Мордкович Алгебра и начала мат. анализа 10–11 кл. в 2-х частях (базовый уровень) и А.Г. Мордкович, П.В. Семенов Алгебра и начала мат. анализа 10–11 кл. в 2-х частях (профильный уровень). Проанализируем изложение материала в каждом из них подробнее.

В учебнике базового уровня отбор корней осуществляется арифметическим способом. Перебор полностью описан словами так, как бы обучающийся сам осуществлял подбор впервые. Автор обращает внимание на необходимость подстановки n до принадлежащих промежутку (отрезку) корней и после. А это соответствует требования оформления этого задания в рамках ЕГЭ. Данный способ достаточно прост и понятен. Также в этом случае очень важна роль учителя. Очень важно, чтобы учитель акцентировал внимание обучающихся на важности оформления полностью обоснованного решения.

В учебнике профильного уровня рассматривается этот же пример, используется тот же способ отбора корней, однако помимо этого приводят геометрическую интерпретацию проведенных рассуждений. То есть помимо арифметического способа приводят геометрический способ (изображение корней на числовой прямой). Уже в самом конце раздела «Тригонометрические уравнения», рассмотрев все способы решения, школьникам предлагается достаточно сложный, многообразный как по способу решения самого уравнения (введение вспомогательного аргумента), так и по отбору корней, пример. Однако для отбора корней,

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

принадлежащих $\left[\frac{1}{4}; 7\right]$, используются привычные арифметический и алгебраический способы [2].

Таким образом, в рассмотренных учебниках представлено небольшое количество уравнений с отбором корней. Возможно, это связано с тем, что изданы учебники в 2009 году, а тогда еще в ЕГЭ задание №13 формулировалось так – решить тригонометрическое уравнение (без отбора корней).

Как правильно оформить отбор корней тригонометрического уравнения целесообразно рассматривать на основании работ, уже проверенных экспертами с выставленными баллами в соответствии с критериями оценивания задания №13 Единого Государственного Экзамена по профильной математике. Все примеры ниже представленных работ взяты из пособия «Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2020 года» [1] Как уже было сказано выше, максимум за задачу №13 ставится 2 балла: верно решенный пункт а) и б). Большинство потерь баллов при решении 13 номера приходится именно на пункт б), поэтому далее рассмотрим именно его. Ошибки очень разнообразны, но если их структурировать, то можно прийти к единому варианту оформления, которое принесет максимальное количество баллов. Ниже рассмотрим решение отдельных заданий, количество выставленных за них баллов и обоснование комментарием.

Задание №13 (основная волна 2020г)

а) решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$;

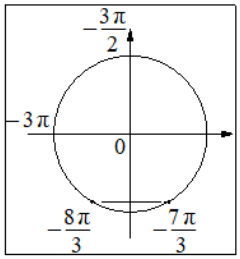
б) укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ниже представлено идеальное решение и оформление пункта б), отбор корней с помощью тригонометрической окружности (рисунок 1).

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

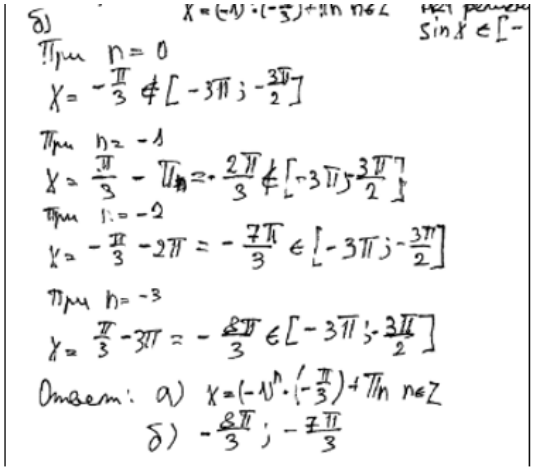
Получим числа: $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m, m \in Z$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

Рис. 1. Отбор корней уравнения из основной волны 2020 года

Рассмотрим ошибки, которые допустили выпускники, решающие данный пример. Типичный пример выставления 1 балла при отборе корней арифметическим способом (рисунок 2).



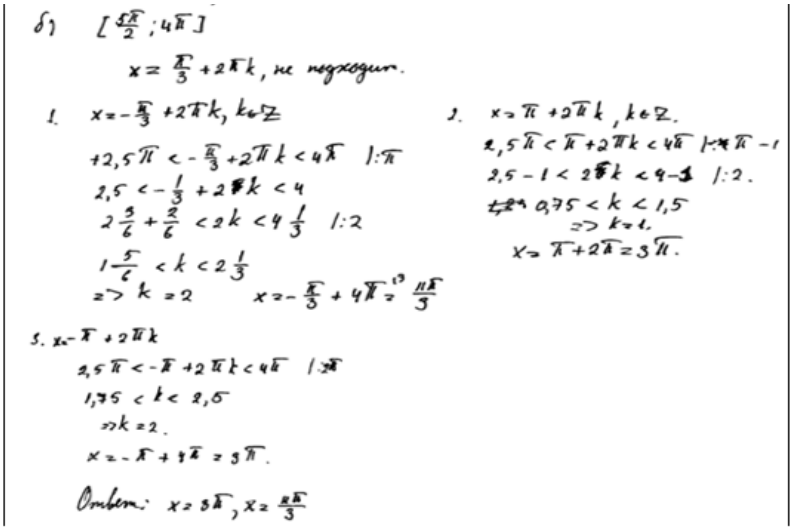
Комментарий.
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, но отбор корней нельзя назвать обоснованным, так как перебор остановлен на корне, принадлежащем отрезку. Типичный пример выставления 1 балла.

Оценка эксперта: 1 балл.

Рис. 2. Отбор корней уравнения с ошибкой

Очень частой причиной выставления 1 балла является допущенная вычислительная ошибка. Пример такой работы представлен ниже (рисунок 3).

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

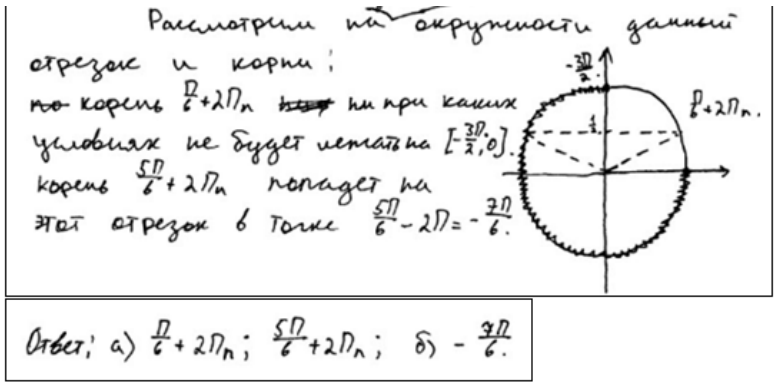


Комментарий.
В записи корней первого простейшего уравнения содержится дублирующая запись корней, но ошибки в этом нет. При отборе корней допущены ошибки при делении $2\frac{5}{6}$ и $4\frac{1}{3}$ на 2.

Оценка эксперта: 1 балл.

Рис. 3. Отбор корней уравнения с вычислительной ошибкой

При отборе корней геометрическим способом (изображение корней на числовой окружности) нужно четко следовать правилам оформления, иначе это приведет к выставлению неполного балла за решение (рисунок 4).



Комментарий.
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, но отбор корней с помощью числовой окружности в этом решении нельзя считать обоснованным.

Оценка эксперта: 1 балл.

Рис. 4. Отбор корней уравнения с необоснованным решением

Нетрудно заметить, что в представленных выше примерах отбор корней тригонометрического уравнения из реального варианта ЕГЭ чаще осуществляется одним из трёх способов: арифметический, алгебраический и геометрический (изображение корней на тригонометрической окружности). Каждая ошибка сделана или из-за невнимательности, или, как правильно, вследствие

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

неосведомленности. Чтобы ошибок второго типа было как можно меньше, во-первых, можно рекомендовать использовать следующие схемы рационального выбора способа отбора корней (рисунки 5 и 6). Однако отметим, что первостепенно выбор определяется уровнем знаний обучающегося.

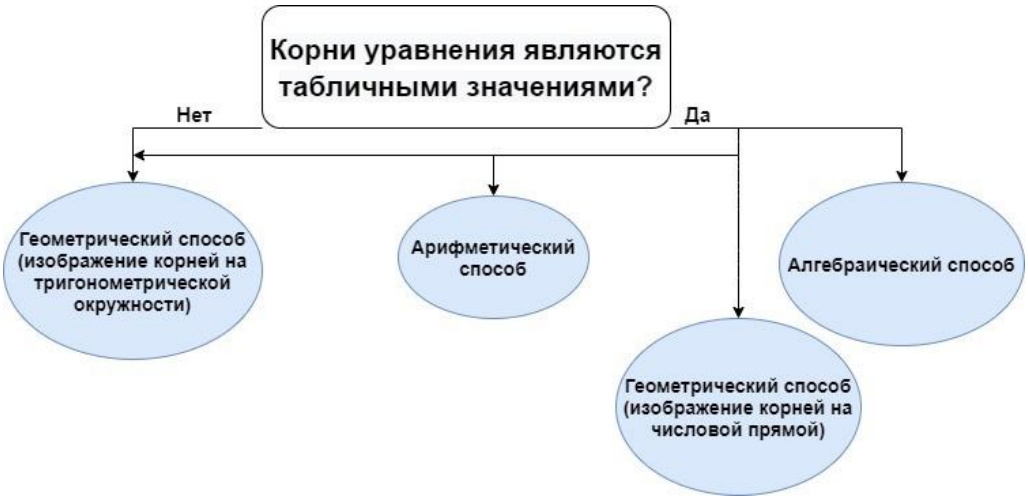


Рис. 5. Выбор на основе табличного или не табличного значения корней

Рис. 6. Выбора способа отбора корней на основе длины отрезка

Во-вторых, желательно со школьниками проработать основные правила оформления отбора корней тригонометрического уравнения различными способами, можно им рекомендовать использовать следующую таблицу (таблица 1). В любом способе самое главное – написать решение аккуратным, разборчивым почерком.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Таблица 1

Основные правила оформления отбора корней тригонометрического уравнения различными способами

Способ отбора	*Правила оформления*
Арифметический способ	Подставляя значения целочисленного параметра, пишем не только ответ, но и решение. Перебор значений начинается с того, при котором корень не принадлежит промежутку, и не должен заканчиваться на корне, принадлежащем промежутку, а обязательно заканчиваться корнем, не принадлежащим этому промежутку
Алгебраический способ	Каждое новое неравенство лучше писать на следующей строке, через прямую черту указывая действие. Выбрать из промежутка и подставив полученное значение параметра в общий вид решения, записать ответ. Проверить, принадлежит ли корень указанному промежутку
Геометрический способ (изображение корней на тригонометрической окружности)	Отбор корней начать с фразы «С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие промежутку». На числовой окружности должно быть: отмечены и обозначены концы числового отрезка, жирно выделена дуга, отмечены и обозначены корни, принадлежащие данному промежутку. Корни, принадлежащие данному отрезку, считаются на листе. На окружности можно отметить вспомогательные числа, принадлежащие промежутку
Геометрический способ (изображение корней на числовой прямой)	Четко нарисовать числовую прямую, нанести выбранный единичный отрезок. Выделить указанные концы промежутка. Указать корни, принадлежащие промежутку. Не указывать корни, не принадлежащие промежутку
Функционально-графический способ	Четко нарисовать график функции, отметить единичный отрезок. Выделить указанные концы промежутка. Указать корни, принадлежащие промежутку

Список литературы

1. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fipi.ru

2. Ященко И.В. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2020 года / И.В. Ященко [и др.] – М.: ФИПИ, 2020. – 115 с.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)