Миназова Диляра Басыровна
студентка
Научные руководители
Поташев Андрей Валерьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Поташева Елена Владимировна
канд. техн. наук, доцент
Казанский кооперативный институт (филиал)
АНО ОВО ЦРФ «Российский университет кооперации»
г. Казань, Республика Татарстан

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РОСТА ОБЪЕМА ВЫПУСКА И ЦЕНЫ ПРОДУКЦИИ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ СЕРВИСА

Аннотация*: вопрос о росте выпуска продукции и развитии предприятий путем инвестирования в них средств естественным образом возникает при планировании работы предприятий сервиса. Решение этих задач может быть получено путем построения математических моделей, использующих аппарат теории дифференциальных уравнений. В работе на примере двух задач продемонстрированы две математические модели, приводящие к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.*

Ключевые слова*: математическое моделирование, социальные и экономические процессы, сервис.*

Под дифференциальным уравнением с разделенными переменными понимаются уравнения вида

$$g(y)dy = f(x)dx.$$

Здесь $g(y)$, $f(x)$ – известные функции, непрерывно зависящие от своих аргументов y и x, соответственно.

Общим интегралом (решением) такого уравнение является равенство

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C. \quad (1)$$

Уравнение вида $f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy$ называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Если поделить обе части уравнения на $g_1(y)f_2(x)$, то оно приводится к уравнению с разделенными переменными, имеющему общий интеграл вида

$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C$где, как и в выражении (1), C – произвольная постоянная.

Задача 1. Динамика цены при естественном росте объема продукции

Рассмотрим задачу о моделировании динамики изменения объёма продукции или услуги, продаваемой по постоянной цене p.

Обозначим через $y(t)$ объем продукции, который произведен и реализован на момент времени t. Тогда полученная выручка равна $py(t)$. Ее часть $I(t) = mpy(t)$ направляется на инвестиции в развитие производства (здесь $m \in (0,1)$ – норма инвестиции).

Предположим, что вся продукция полностью реализуется на рынке товаров и услуг. Тогда после получения выручки и инвестирования средств происходит расширение производства, которое в свою очередь дает прирост выручки, часть которой опять направляется на расширение производства. Такой процесс приводит к возрастанию скорости выпуска продукции.

Если считать, что скорость $y'(t)$ роста объема продукции $y(t)$ будет пропорциональна объему инвестиций, то придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \alpha I(t). \quad (2)$$

С учетом выражения для $I(t)$ получим $\frac{dy}{dt} = \alpha mpy(t)$, или $\frac{dy}{dt} = ky(t)$, где $k = \alpha mp = \text{const}$.

Следовательно, пришли к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. Разделив переменные $\frac{dy}{y} = kdt$ и проинтегрировав обе части в полученном равенстве $\int \frac{dy}{y} = \int kdt$, получим общий интеграл $\ln y = kt + \ln C$ и общее решение $y = Ce^{kt}$. Для отыскания постоянной C зададим начальное условие $y(t_0) = y_0$. Тогда найдем $C = y_0 e^{-kt_0}$, а само решение окончательно примет вид

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (3)$$

Выражение (3) представляет собой *модель естественного роста* выпуска продукции, которая представляет собой неограниченный рост объема производства с течением времени.

Заметим, что зависимости, аналогичные (3), встречаются также при описании других экономических процессов (например, динамика роста цен при постоянном темпе инфляции), а также и социальных процессов (например, процессов роста популяций) (см., напр., [1]).

Задача 2. Теория фирмы, рынок

Полученное в предыдущем примере решение характеризует неограниченный рост выпуска продукции в условиях полной реализации произведенной продукции или услуги на рынке. В реальности же с увеличением выпуска происходит насыщение рынка. При этом, естественно, цена на товар будет падать.

Пусть $y(t)$ объем выпуска продукции некоторого предприятия.

Предположим, что скорость $y'(t)$ изменения объема выпуска продукции пропорциональна доходу предприятия $Q = py$, где p – текущая цена товара, которая падает с увеличением выпуска по следующему закону $p(y) = b - ay$, $a, b > 0$.

Исходя из этих предположений придем к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = k(b - ay)y, \quad (4)$$

которое, как и уравнение (2), является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Если в уравнении (4) разделить переменные и проинтегрировать, то получим решение

$$y(t) = \frac{b}{a + Ce^{-bkt}}. \quad (5)$$

Произвольная постоянная C может быть найдена из начального условия $y(t_0) = y$. Тогда окончательно решение примера (5) определится функцией

$$y(t) = \frac{by_0}{ay_0 + (b - ay_0)e^{-bk(t-t_0)}}.$$

График полученной зависимости $y(t)$ представляет собой так называемую *логистическую кривую* (см., например, [2]), часто возникающую в различных разделах экономических и социальных наук.

Пример зависимости $y(t)$, построенной при $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $a = 0.1$, $b = 1$ и $k = 0.3$ показан на рисунке 1.

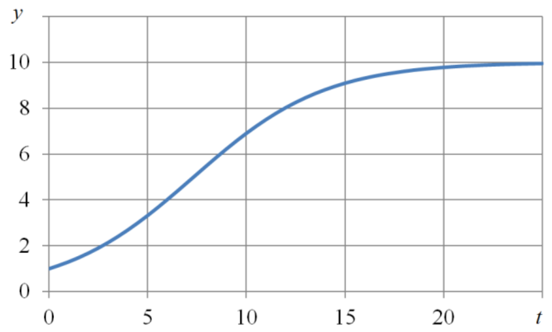

Рис.1. Зависимость $y(t)$ (логистическая кривая)

Заключение. Из полученного решения видно, что величина y не может неограниченно возрастать. Ее значение ограничено величиной

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} \frac{by_0}{ay_0 + (b - ay_0)e^{-bk(t-t_0)}} = \frac{b}{a}.$$

Список литературы

1. Поташев А.В. Интеграция математического моделирования и инновационных подходов к обучению в образовании / А.В. Поташев, Е.В. Поташева, Д.Ю. Сулейманова. – М.: Изд-во «Русайнс», 2015. – 96 с.

2. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Логистическое_уравнение