

**Поташев Андрей Валерьевич**

д-р физ.-мат. наук, профессор

**Поташева Елена Владимировна**

канд. техн. наук, доцент

Казанский кооперативный институт (филиал)

АНОО ВО ЦС РФ «Российский университет кооперации»

г. Казань, Республика Татарстан

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ИНСТРУМЕНТАРИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ АКТУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТУРБОМАШИН**

*Аннотация:* одной из основных отраслей машиностроения Республики Татарстан является компрессоростроение. Производимые компрессоры используются как в самом Татарстане, так и по всей России. Потребность промышленности в большой номенклатуре центробежных компрессоров приводит к необходимости сокращения сроков их создания. В связи с этим актуальной является разработка математических моделей, которые, обладая относительной простотой, достаточно точно рассчитывают реальные процессы. Этим требованиям удовлетворяют методы, основанные на применении модели квазитрехмерного течения в проточных частях турбомашин. Сейчас достаточно широкое использование получили две составные части этого метода. В статье рассматривается его третья составная часть – так называемая третья двумерная задача. Именно ее решение позволяет уточнить форму поверхностей тока, отличающихся от осесимметричных и тем самым более точно смоделировать пространственный характер течения в проточной части.

**Ключевые слова:** проточная часть турбомашин, третья двумерная задача.

Для расчета трехмерного потока в проточной части турбомашин, а именно, в ее осесимметричной части, широко применяется его моделирование совокупностью двумерных задач (см., напр., [7]).

*Первая задача* (осесимметричное течение через решетки с бесконечным числом бесконечно-тонких лопаток) была впервые рассмотрена Лоренцем [1]. В дальнейшем методы ее решения были развиты в работе [2].

*Вторая задача* – задача расчета обтекания решеток профилей на осесимметричных поверхностях тока в слое переменной толщины. Подход к ее решению был применен в работе [2]. Дальнейшее развитие методы решения этой задачи при различных моделях среды и конфигурациях проточной части получили в [3, 5, 6–8,].

*Третья двумерная задача* предназначена для определения отклонения истинных поверхностей тока от поверхностей вращения осредненного течения. Ее решение позволит осуществить переход к следующему приближению в решении трехмерной задачи [4].

*1. Постановка задачи.* Изучим пространственное вихревое течение идеальной несжимаемой жидкости в турбомашине с вращающейся периодической системой  $m$  лопастей. Данное течение описывается уравнениями  $\vec{c} \times \vec{\Omega}_0 = \text{grad } E$ ,  $\text{div } \vec{c} = 0$ , где  $\vec{c}$  – абсолютная скорость,  $\vec{\Omega}_0 = \text{rot } \vec{c}$ ,  $E$  – полная механическая энергия единицы массы. Считается, что относительное движение – установившееся.

Предполагается, что решены две первые двумерные задачи. В результате построены вихретоковые поверхности для осредненного течения, представляющие собой поверхности постоянного момента скорости  $H_3 \langle c_3 \rangle$ . Здесь знак  $\langle \rangle$  присвоен осредненным в окружном направлении величинам;  $H_1, H_2, H_3$  – коэффициенты Ламэ криволинейной системы координат  $(q_1, q_2, q_3)$  (см. рис. 1), введенной так, чтобы поверхности  $q_2 = \text{const}$  представляли собой поверхности тока осредненного течения, на которых  $\langle c_2 \rangle = 0$ .

Необходимо построить картину течения на поверхности  $q_1 = \text{const}$ .

*2. Решение задачи* ищется на вспомогательной плоскости  $z(x, y)$ , конформно связанной с  $q_1 = \text{const}$  функцией

$$z = re^{i\theta} = R_0 \exp\left(\int_0^{q_2} \frac{dq_2}{R(q_2)} + i\theta\right). \quad (1)$$

В плоскости  $z$  получим периодическую область в кольце, имеющем  $m$  периодов (рис. 2). Связь между скоростями в соответствующих точках определяется выражением

$$|\vec{v}| = |\vec{c}| \frac{R}{r}, \quad (2)$$

где  $v$  – скорость абсолютного потока в плоскости  $z$ .

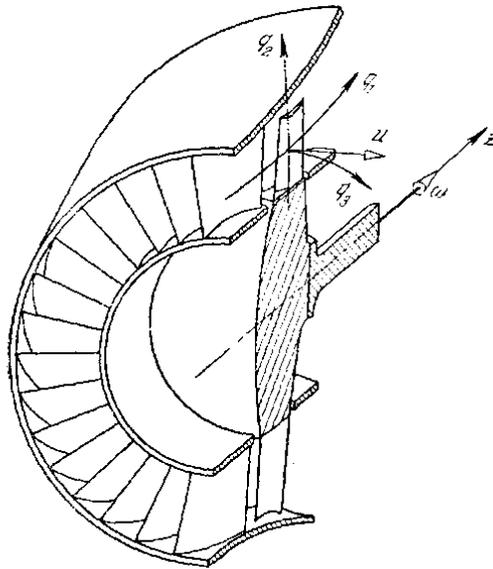


Рис. 1. Естественная осесимметричная система координат [7]

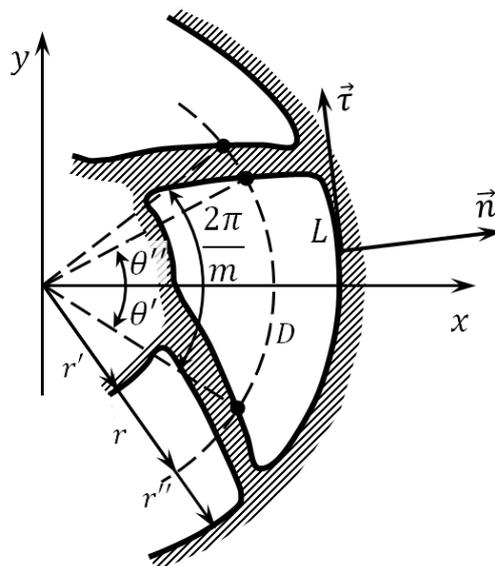


Рис. 2. Вспомогательная плоскость  $z$ ,  
на которую отображается поверхность  $q_1 = \text{const}$

Если сохранить  $H_1$  в соответствующих точках поверхности  $q_1 = 0$  и плоскости  $z$ , то в силу (1) и (2) уравнения для плоскости  $z$  приобретут вид:

$$\text{div}(H_1 \vec{v}) = H_1 Q \left( \frac{R}{r} \right)^2, \quad \text{div} \vec{v} = \left( \frac{R}{r} \right)^2 Q - v_2 \frac{1}{H_2} \frac{dH_1}{dr} = q_0(r, \theta), \quad (3)$$

$$\text{rot} \vec{v} = \left( \frac{R}{r} \right)^2 \Omega_{01} = \gamma_0(r, \theta). \quad (4)$$

Функции  $q_0$  и  $\gamma_0$  ограничены и непрерывны. Распределение присоединенных вихрей  $\gamma$  на контуре лопасти в плоскости  $z$  запишется в виде

$$\gamma(r) = \gamma_{*1}(q_2) \frac{dq_2}{dr} = \gamma_{*1}(q_2) \frac{R}{r}. \quad (5)$$

Система уравнений (3) и (4) аналогична системе, полученной в [3] при решении второй двумерной задачи для решеток в слое переменной толщины. Поэтому вводится комплексная скорость  $\bar{v}(z)$  в плоскости  $z$ , которая может быть найдена в классе обобщенных аналитических функций

$$\bar{v}(z) + \frac{mz^{m-1}}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{v}(\zeta) d\zeta}{z^m - \zeta^m} = \frac{mz^{m-1}}{2\pi i} \iint_D [\gamma_0(\xi, \eta) + iq_0(\xi, \eta)] \frac{d\xi d\eta}{z^m - \zeta^m}. \quad (6)$$

*Задача решается в два этапа. На первом этапе* ищется скорость  $\bar{v}_1$  течения в открытой плоскости  $z$ , представляющего собой сумму течений от вихря  $\Gamma'$  в начале координат, от периодической системы вихревых слоев  $\gamma$  (5) на контурах лопастей, от источников  $q_0$  (3) и вихрей  $\gamma_0$  (4). Принимая, что за пределами области  $D$   $H_1(r) = \text{const}$  имеем, аналогично (6),

$$\bar{v}_1(z) = \frac{\Gamma'}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{mz^{m-1}}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\sigma) d\sigma}{z^m - \zeta^m} + \frac{mz^{m-1}}{2\pi i} \iint_D [\gamma_0(P) + iq_{01}(P)] \frac{d\xi d\eta}{z^m - \zeta^m}. \quad (7)$$

Здесь  $v_{1r}$  – радиальная составляющая скорости  $\vec{v}_1$ . Выражение (7) позволяет найти касательную  $v_{1\tau}$  и нормальную  $v_{1n}$  составляющие скорости  $\vec{v}_1$  на границе  $L$  области  $D$ . При  $z \rightarrow z_0 = \rho e^{i\theta}$  ( $z_0 \in L$ ), в частности, имеем

$$v_{1\tau}(s) = \frac{\Gamma'}{2\pi\rho} \sin(\nu - \theta) - \frac{1}{2}\gamma(s) + \frac{1}{2} \int_L' \gamma(\sigma) A(s, \sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \iint_D [q_{01}(P)B(s, P) + \gamma_0(P)A(s, P)] d\xi d\eta. \quad (8)$$

На втором этапе ищется скорость  $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$  течения в области  $D$  по значению нормальной составляющей  $v_{2n}$  этой скорости на границе  $L$ .

Поскольку циркуляция скорости  $v_2$  по контуру  $L$  равна нулю, то

$$v_{2\tau}(s_0) = -\frac{1}{l} \int_L \Delta v_{2\tau}(s) ds, \quad v_{2\tau}(s) = v_{2\tau}(s_0) + \Delta v_{2\tau}(s). \quad (9)$$

Итак, суммируя (8) и (9), найдем  $v_\tau$  на  $L$ . Кроме того, можно найти радиальную  $v_r$  составляющую скорости на контуре лопасти

$$v_r = v_\tau \cos(\nu - \theta) - v_n \sin(\nu - \theta),$$

определяющую скос потока в направлении, ортогональном к осредненным поверхностям тока квазитрёхмерного течения.

#### *Заключение*

Таким образом, рассмотрена третья составляющая часть квазитрёхмерной модели течения в проточных частях турбомашин. Приведены основные уравнения, описывающие течение в плоскости  $q_1 = \text{const}$ . Решение этой задачи позволит определить характер отклонения истинных поверхностей тока от поверхностей вращения осредненного течения. Тем самым появляется возможность построения пространственной картины течения.

#### *Список литературы*

1. Lorenz H. Neue Theorie und Berechnung der Kreislräder. – München; Berlin, 1906.

2. Wu Chung-Hua. A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed-flow types // Transactions of the ASME. – 1952. – V. 74. №8. – P. 1363–1380.

3. Викторов Г.В. Решение прямой задачи теории решеток в относительном течении // Труды Всесоюзн. Н.И.ин-та гидромашиностроения. – 1968. – Вып. 38.

4. Викторов Г.В. Третья двумерная задача для лопастных систем турбомашин // Труды Московского энергетического института. – 1975. – Вып. 259. – М.: МЭИ. – С. 13–25.

5. Поташев А.В. Методика расчета течения в проточных частях турбомашин с многорядными лопаточными элементами / А.В. Поташев, Е.В. Поташева // Компрессорная техника и пневматика. – 2019. – №3. – С. 9–18.

6. Поташев А.В. Учет сжимаемости осредненного осесимметричного потока в проточной части турбомашин / А.В. Поташев, Е.В. Поташева // Компрессорная техника и пневматика. – 2017. – №6. – С. 4–8.

7. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.

8. Этинберг И.Э. Гидродинамика гидравлических турбин / И.Э. Этинберг, Б.С. Раухман. – Л.: Машиностроение, 1978. – 280 с.