

Оливио Адилсон Педро

СРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИДЕАЛЬНО-РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ ДЛЯ ДВУХ- И ТРЕХКАНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ

Аннотация: в рамках этой работы предложено сравнение задачи оптимизации траектории космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем для двух- и трехканального управления в окрестности круговой орбиты. Вводятся новые подходы задачи оптимизации траектории КА с ИР двигателем в замкнутой форме для двух- и трехканального управления. Употребляются уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира для описания движения КА в окрестности круговой орбиты. Для решения задачи оптимального управления употребляется принцип максимума. Сравниваются результаты задачи оптимизации траектории для двух- и трехканального управления. Приведены численные примеры оптимальных траекторий с идеально-регулируемым двигателем в окрестности круговой.

Ключевые слова: оптимальное управление, уравнения Hill-Clohessy-Wiltshire, космический аппарат, круговая орбита.

Abstract: within the framework of this work, a comparison of the problem of optimizing the trajectory of a spacecraft with an ideally controlled engine for two- and three-channel control in the vicinity of a circular orbit is proposed. New approaches are introduced to optimize the trajectories of spacecraft in closed form for two- and three-channel control. The Hill-Clohessy-Wiltshire equations are used to describe the motion of the spacecraft in the vicinity of a circular orbit. To solve the optimal control problem, the maximum principle is used. The results of the trajectory optimization problem for two- and three-channel control are compared. Numerical examples of optimal trajectories with an ideally regulated motor in the vicinity of a circular one are given.

Keywords: *optimal control, Hill-Clohessy-Wiltshire equations, spacecraft, circular orbit.*

1. Введение

Задача оптимизации расхода топлива космического аппарата очень важна во всех космических полетах, так как это экономит ресурсы и улучшает космические операции. Минимизация расхода топлива эквивалентна процессу функциональной минимизации. Как правило, мы используем принцип максимума Понтрягина для минимизации функционала, этот принцип очень просто понять, если мы знаем понятие производных определенной функции.

Задача оптимального управления относительным движением космического аппарата (КА) имеет большое значение, помогающее решение задачи сближения и стыковки КА, движущихся по околокруговым орбитам, реализации группового полета нескольких КА в заданной конфигурации, развертывания и поддержания низкоорбитальных систем для решения задач обеспечения связи и дистанционного зондирования Земли, обеспечение полетов между близкими, почти круговыми орбитами, решение задач, связанных с удалением космического мусора из защищенных областей космоса, близких к Земле. Таким образом, для решения вышеуказанных задач необходимо определить управление, обеспечивающее перевод рассматриваемой динамической системы из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за фиксированный интервал времени с минимальными затратами топлива.

В этом смысле целью данной статьи является оптимизировать управление относительным движением КА с идеально-регулируемым двигателем в окрестности круговой орбиты, для того чтобы минимизировать общий расход топлива. С 60-х годов начался процесс использования на КА электрических ракетных двигателей (ЭРД). Благодаря высокому удельному импульсу, ЭРД позволяют существенно снизить затраты топлива на орбитальное маневрирование. Однако, малая (по сравнению с традиционными жидкостными ракетными двигателями) тяга ЭРД приводит к необходимости их длительной работы. В 1960 году, для решения задачи сближения и стыковки Clohessy-Wiltshire получили линеаризованные

дифференциальные уравнения относительного движения КА в окрестности круговой орбиты [1], но еще в XIX веке аналогичные уравнения использовались Hill в его теории движения Луны [2].

Успешное использование электрической тяги с малой тягой в межпланетных миссиях включает Deep Space 1 (Rayman et al. 1999), Dawn (Rayman et al. 2007), Hayabusa (Kuninaka et al. 2005) и др. Идеализированной математической моделью ЭРД является модель идеально-регулируемого (ИР) двигателя. В рамках модели ИР-двигателя, его реактивная мощность (половина произведения тяги на скорости истечения) считается постоянной, но в рамках этого ограничения тяга и скорость истечения могут меняться произвольным образом [3; 4]. Математическая модель ИР-двигателя привлекает к себе внимание относительной простотой оптимального управления. Использование решения задачи оптимизации траекторий КА с ИР-двигателем в качестве начального приближения обеспечивает решение сложных задач оптимизации траекторий КА с двигателями ограниченной тяги, включая ЭРД и традиционные жидкостные ракетные двигатели.

В данной работе мы рассматриваем ИР-задачу оптимизации траектории с ограниченной тягой в закрытой форме как для двух-, так и для трехканального управления. Решение этой задачи в замкнутой форме используются в качестве начальных значений предположения для численной оптимизации траектории с постоянной скоростью ограниченной скорости истечения [5]. В простейшем случае направление вектора тяги не ограничено, при этом существует возможность реализации управления с помощью трех компонент реактивного ускорения, определяемых величиной тяги и двумя углами ее ориентации (углами тангажа и рысканья) – трехканальное управление. Помимо трехканального управления, в этой статье мы рассмотрим управление с ограничением на ориентацию вектора тяги, когда угол тангажа ограничивается нулевым значением, что приводит к нулевому значению радиальной составляющей реактивного ускорения – управление двухканальное [6]. Необходимость употребления двухканального управления часто появляется из-за ограниченных возможностей системы управления,

необходимости обеспечения условий радиосвязи или взаимной видимости сближающихся КА и по ряду других причин.

Для анализа относительного движения КА в окрестности круговых орбит необходима разработка специальных математических моделей движения. Наиболее популярной математической моделью относительного движения КА в окрестности круговых орбит является модель Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW). В этой математической модели для получения уравнений относительного движения используется вращающаяся (орбитальная) система координат и линеаризация дифференциальных уравнений относительного движения, основанная на предположении малости расстояния между рассматриваемыми КА по сравнению со средним радиусом орбиты.

2. Постановка задачи

Известны начальный и конечный фазовый вектор относительного движения КА с идеально-регулируемым двигателем в окрестности заданной круговой орбиты: $X(t_0) = X_0$, $X(t_f) = X_f$. Предполагается, что движение КА происходит в центральном гравитационном поле, то есть на КА действует только основной член гравитационного ускорения и реактивное ускорение. Требуется определить траекторию состояния как кусочно-непрерывную функцию времени $X(t): R \rightarrow R^6$. Каждая траектория состояния неявно генерируется управлением (программой реактивного ускорения) $a(t): R \rightarrow R^3$, через динамику системы $\dot{X} = f(t, X(t), a(t))$. Таким образом, требуется определить управление, обеспечивающее перевод рассматриваемой динамической системы из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за фиксированный интервал времени с минимальными затратами топлива, определяемыми функционалом $J \rightarrow \min$ [7; 8].

3. Решение задачи оптимального управления с идеально-регулируемым двигателем

Рассмотрим движение КА относительно точки О, движущейся вокруг Земли по невозмущенной круговой орбите заданного радиуса r_0 . Введем в рассмотрение систему координат, ось x которой направлена вдоль радиус-вектора точки О, ось y – в трансверсальном направлении, а ось z дополняет

систему координат до правой. В этой системе координат уравнения НСВ в безразмерных переменных имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \frac{dy}{dt} = v_y, \frac{dz}{dt} = v_z, \frac{dv_x}{dt} = 3x + 2v_y + a_x, \frac{dv_y}{dt} = a_y - 2v_y, \frac{dv_z}{dt} = a_z - z, \quad (1)$$

где t – время; x, y, z – координаты КА; v_x, v_y, v_z – компоненты вектора скорости КА; a_x, a_y, a_z – компоненты вектора реактивного ускорения.

Требуется перевести систему (1) из заданного начального положения в $t = 0$:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, v_x(0) = v_{x0}, v_y(0) = v_{y0}, v_z(0) = v_{z0}, \quad (2)$$

в конечное положение, заданное в фиксированный момент времени $t = \Delta t$:

$$x(\Delta t) = x_f, y(\Delta t) = y_f, z(\Delta t) = z_f, v_x(\Delta t) = v_{xf}, v_y(\Delta t) = v_{yf}, v_z(\Delta t) = v_{zf}, \quad (3)$$

с минимальными затратами топлива.

4. Задача минимизации массы топлива

Задача минимизации массы топлива эквивалентна задаче минимизации функционала [9,10,11]

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} a^2 dt, \quad (4)$$

где $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – величина реактивного ускорения.

Можно разбить на две независимые подзадачи для движения КА в плоскости орбиты и вдоль оси z . Тогда, движение в плоскости орбиты и вне плоскости орбиты можно представить системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_3}{dt} = A_3 x_3 + B_3 a_3, \quad (5a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = A_2 x_2 + B_2 a_2 \quad (5b)$$

с функционалом

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} a^2 dt, \quad (6a)$$

$$J_z(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} a_z^2 dt, \quad (6b)$$

где $x_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}, x_{3z} = \begin{pmatrix} z \\ v_z \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, A_{3z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{3z} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, a_{3z} = a_z, a_3 = |a_3|$ для трехканального управления и

$x_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}, x_{2z} = \begin{pmatrix} z \\ v_z \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, A_{2z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{2z} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_y \end{pmatrix}, a_{2z} = a_z$ для двухканального управления. Краевые условия, с

учетом (2), (3), можно записать в виде

$$x(0) = x_0, x(\Delta t) = x_f \quad (7a)$$

$$x_z(0) = x_{z0}, x_z(\Delta t) = x_{zf} \quad (7b)$$

Можно записать функцию Понтрягина для обеих подзадач в виде:

$$H = -\frac{1}{2}a^2 + p^T Ax + p^T Ba \quad (8)$$

где p – вектор сопряженных переменных. Оптимальное управление, согласно принципу максимума, определяется из условия максимизации гамильтониана по управлению a , тогда получим выражение для оптимального управления в виде:

$$a = B^T p \quad (9)$$

подставляем (9) в (8) получим гамильтониан

$$H = -\frac{1}{2}p^T B B^T p + p^T Ax \quad (10)$$

Система дифференциальных уравнений оптимального движения, соответствующая гамильтониану (10) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B B^T p, \frac{dp}{dt} = -A^T p \quad (11)$$

Решение системы (11) имеет вид:

$$p_3(t) = \Phi_3^T(-t)p_{03}, x_3(t) = \Phi_3(t)[x_{03} + \Gamma_3(t)p_{03}], \Gamma_3(t) = \int_0^t \Phi_3(-s) B_3 B_3^T \Phi_3^T(-s) ds \quad (12a)$$

$$p_2(t) = \Phi_2^T(-t)p_{02}, x_2(t) = \Phi_2(t)[x_{02} + \Gamma_2(t)p_{02}], \Gamma_2(t) = \int_0^t \Phi_2(-s) B_2 B_2^T \Phi_2^T(-s) ds \quad (12b)$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица однородной системы $\frac{dx}{dt} = Ax$, p_0 – начальное значение вектора сопряженных переменных для движения в плоскости опорной орбиты, при $t = 0$.

Для решения задачи оптимального управления требуется вычислить p_0 , при котором удовлетворяются краевые условия (7a) и (7b). Очевидно, что из (12) можно получить такое решение в виде:

$$p_0^3 = \Gamma_3^{-1}(\Delta t)[\Phi_3(-\Delta t)x_3 - x_{03}] \text{ и } p_0^2 = \Gamma_2^{-1}(\Delta t)[\Phi_2(-\Delta t)x_2 - x_{02}], \quad (13a)$$

$$p_{0z}^3 = \Gamma_{z3}^{-1}(\Delta t)[\Phi_{z3}(-\Delta t)x_{z3} - x_{0z}] \text{ и } p_{0z}^2 = \Gamma_{z2}^{-1}(\Delta t)[\Phi_{z2}(-\Delta t)x_{z2} - x_{0z}] \quad (13b)$$

где p_{0z} – начальное значение вектора сопряженных переменных для движения вдоль нормали к плоскости опорной орбиты, при $t = 0$.

Матрицы Φ и Γ вычисляются аналитически, также вводя обозначения $c = \cos t$, $s = \sin t$, получим:

$$\Phi_3(t) = \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 4-3c & 0 & s & 2-2c \\ 6s-6t & 1 & 2c-2 & 4s-3t \\ 3s & 0 & c & 2s \\ 6c-6 & 0 & -2s & 4c-3 \end{pmatrix}, \Phi_{3z}(t) = \Phi_{2z}(t) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, \Gamma_3(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13t+3sc-16s}{2} & 3(s-t)^2 & \frac{(c-1)(5-3c)}{2} & 14s-3sc-11t \\ 3(s-t)^2 & 14t-32s+3t^3+24tc-6sc & 5t-3sc-8s+6tc & 6c^2+12ts+4c-\frac{9}{2}t^2-10 \\ \frac{(c-1)(5-3c)}{2} & 5t-3sc-8s+6tc & \frac{5t-3sc}{2} & 3(1-c)^2 \\ 14s-3sc-11t & 6c^2+12ts+4c-\frac{9}{2}t^2-10 & 3(1-c)^2 & 6sc+19t-24s \end{pmatrix}$$

для трехканального управления и

$$\Gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2sc+6t-8s & 3(s-t)^2 & -2(1-c)^2 & 14s-4sc-10t \\ 3t^2-6ts+2(c-1)+4s^2 & 8t-24s+3t^3+24tc-8sc & 4t+6tc-6s-4sc & -\frac{(4s-3t)^2}{2} \\ -2(1-c)^2 & 5t-3sc-8s+6tc & 2(t-sc) & 2(c-1)(2c-1) \\ 14s-4sc-10t & -\frac{(4s-3t)^2}{2} & 2(c-1)(2c-1) & 8sc+17t-24s \end{pmatrix}$$

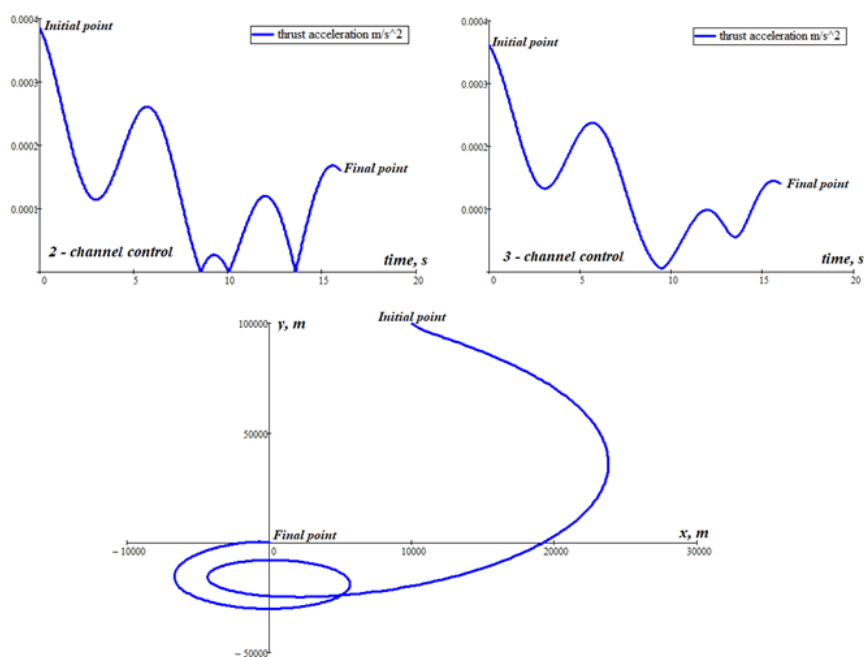
для двухканального управления,

$$\Gamma_{3z}(t) = \Gamma_{2z}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} - \frac{sc}{2} & -\frac{s^2}{2} \\ -\frac{s^2}{2} & \frac{t}{2} + \frac{sc}{2} \end{pmatrix}$$

После вычисления начального вектора сопряженных переменных по формулам (13), оптимальная траектория вычисляется с использованием второго выражения из (12), а оптимальное управление – с использованием выражения (11) и первого выражения из 12).

5. Численные примеры

Рассмотрим движение КА относительно точки О, движущейся по невозмущенной околоземной круговой орбите радиусом 6871 км. Гравитационный параметр Земли примем равным $3.9860044 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$. Рассмотрим задачу перелета за $\Delta t = 14400$ секунд из точки фазового пространства $r_0 = (10\text{км}, 100\text{км}, -5\text{км})^T$, $v_0 = (1\text{м/с}, -10\text{м/с}, 3\text{м/с})^T$ в начало координат, то есть в точку $r_f = 0$, $v_f = 0$. На рис. 1 представлена оптимальная траектория для случая трех- и двухканального управления, а также зависимости от времени реактивного ускорения для трех- и двухканального управления.



На рис. 1 представлена оптимальная траектория, а также зависимости от времени реактивного ускорения для трех- и двухканального управления.

На рис. 2 представлены изолинии, то есть зависимости функционала от времени начала маневра (включения двигателя) и длительности маневра для случая трех- и двухканального управления, а также зависимости от времени скорости для трех- и двухканального управления.

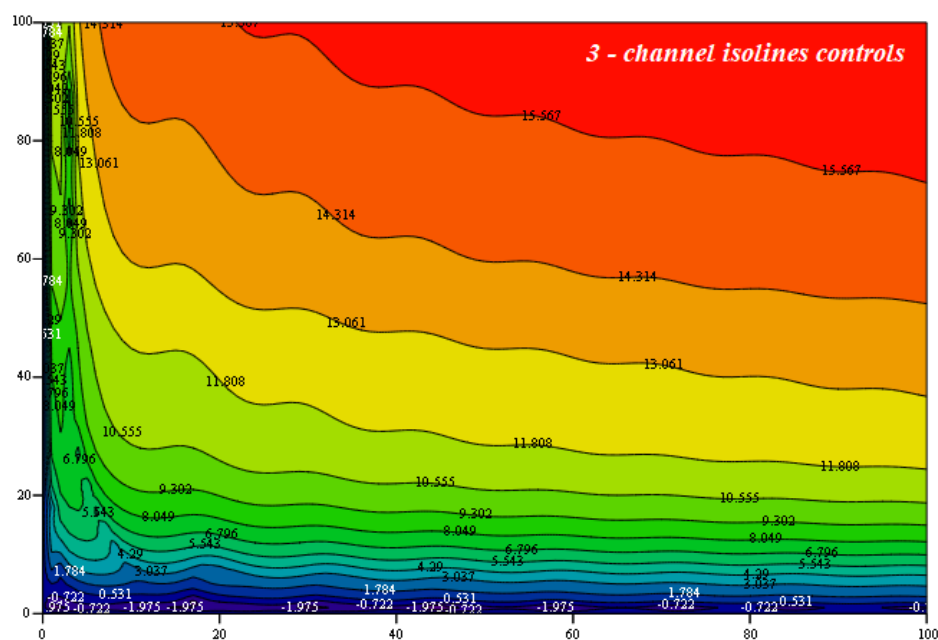


Рис. 2. Зависимости функционала от времени начала маневра и длительности маневра для случая трехканального управле

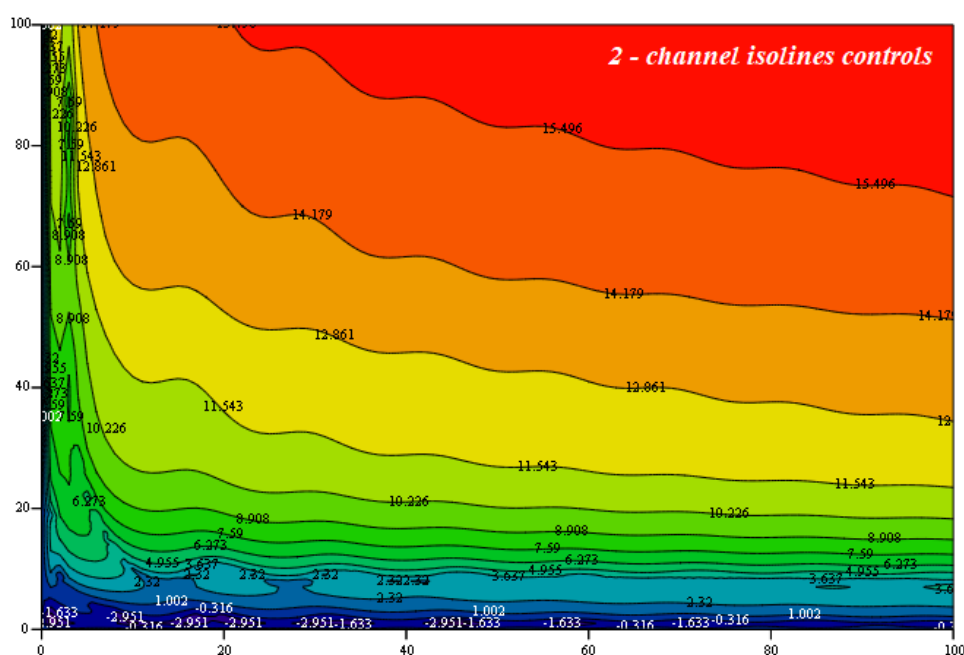


Рис. 3. Зависимости функционала от времени начала маневра и длительности маневра для случая двухканального управления

Графики изолиний обоих случая показали очень близкие значения функционалов, при трехканальном управлении можно снизить затраты топлива почти на 1,6%, а при двухканальном управлении можно снизить затраты топлива почти на 2,3%. Очевидно, для случая трех- и двухканального управления

минимальный затрат топлива с учетом графиков изолиний попадет в интервал от $-0,722$ до $1,789$ и от $-0,316$ до $1,002$, то есть в темно-синей области, где находятся минимальные значения функционала.

6. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимизации траектории КА с ограниченной тягой в окрестности круговой орбиты. Рассмотрена задача перелета в заданную точку, скорости и фиксированное время. Приведены постановки задачи оптимального управления для случая трех- и двухканального управления. При трехканальном управлении нет ограничений на направление вектора тяги, а при двухканальном управлении радиальная составляющая тяги всегда равна нулю. Рассмотрены задачи минимизации затрат топлива для ограниченной мощности модели двигательной установки КА. Для этой задачи получено аналитическое решение в явном виде, помогающее решить многие практические задачи, когда используется в качестве начального приближения. Оптимальные решения задачи с трех- и двухканальным управлением оказались очень близки друг к другу.

Список литературы

1. Clohessy W.H. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous / W.H. Clohessy, R.S. Wiltshire // J. Astronaut. Sci. – 1960. – Vol. 27. №9. – P. 653–678.
2. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // Am. J. Math. – 1878. – Vol. 1. – P. 5–26.
3. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космич. исслед. – 2008. – 46, №3. – С. 224–237.
4. Гродзовский Г.Л. Механика космического полета с малой тягой / Г.Л. Гродзовский, Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев. – М.: Наука, 1969.
5. Irving J.H. «Low-Thrust Flight: Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields», in Space Technology, H. Seifert (Ed.), John Wiley and Sons, Inc., – New York, 1959.

6. Petukhov V.G. Optimization of the Finite-Thrust Trajectory in the Vicinity of a Circular Orbit / V.G. Petukhov, A.P. Olívio // *Advances in the Astronautical Sciences*. – 2021. – Vol. 174. – P. 5–15.
7. Гродзовский Г.Л. Механика космического полета с малой тягой / Г.Л. Гродзовский, Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев . – М.: Наука, 1966. – 180 с.
8. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе [и др.]. – М.: Наука, 1976.
9. Irving J.H. «Low-Thrust Flight: Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields», in *Space Technology*, H. Seifert (Ed.), John Wiley and Sons, Inc. – New York, 1959.
10. Gobetz F.W. Optimal variable-thrust transfer of a power-limited rocket between neighboring circular orbits // *AIAA Journal*. – 1964. – Vol. 2. №2. – P. 339–343.
11. Petukhov V.G. Optimization of interplanetary trajectories for spacecraft with ideally regulated engines using the continuation method // *Cosmic Research*. – 2008. – Vol. 46. №3. – P. 219–232.

Оливио Адилсон Педро, аспирант, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», Россия, Москва
