(cc) BY

Бурнаева Елена Михайловна
учитель
МБОУ «Дубенская СОШ»
д. Дубенки, Республика Мордовия

ЗАДАЧИ О КАСАТЕЛЬНОЙ

Аннотация*: в данной статье рассматриваются примеры решения задач о касательной. Тема работы может представлять интерес для учителей, преподающих в старших классах, и для учащихся старших классов.*

Ключевые слова*: касательная, уравнение касательной, график функции.*

В учебниках для средней школы к этой теме приведено немного задач, обычно, это задачи технического характера, где уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x\text{-}x_0)$ требуется подставить конкретную точку x_0 и конкретную функцию y=f(x). Большая сложность задач определяется, как правило, только большей сложностью функций.

Задачи о касательной становятся гораздо содержательнее, если для их решения требуется не только владение формулой уравнения касательной, но и умение применять знания других разделов школьного курса.

Рассмотрим ряд задач, в которых после составления уравнения касательной требуется использовать свойства квадратного трёхчлена.

Задача 1. Найдите наименьшее целое значение параметра p, при котором график функции $y = x^2 + px + q$ пересекает ось Ox в двух различных точках и касается прямой $y = 2x\text{-}6$.

Решение. Условие пересечения графиком оси Ox в двух различных точках означает, что $p^2 > 4q$. Так как парабола $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 2x\text{-}6$, трёхчлен $y = x^2 + (p\text{-}2)x + (q + 6)$ имеет единственный корень. Поэтому $4q = p^2\text{-}4p\text{-}20$ и учитывая, что $p^2 > 4q$, получим: $\text{-}4p\text{-}20 < 0, p > \text{-}5,$ наименьшее целое при этом: $p = \text{-}4$.

Ответ: -4.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Задача 2. Парабола $y = x^2 + px + q$ касается оси Ох в точке М и прямой $y = 12x$-17 в точке N. Найдите квадрат расстояния между точками М и N.

Решение. Так как парабола $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 12x$-17, то трёхчлен $y = x^2 + (p\text{-}12)x + (q + 17)$ имеет единственный корень (абсцисса точки N),

$4q = p^2\text{-}24p + 76.$

Касание параболы и оси Ох означает, что $p^2 = 4q$. Отсюда следует, что

$\text{-}24p + 76 = 0$ и $p = \frac{19}{6}, q = \frac{361}{144}$.

Вершина параболы, находящаяся в точке М, имеет координаты $M\left(\text{-}\frac{19}{12}; 0\right)$.

Абсцисса точки N $x_N = \text{-}\frac{p\text{-}12}{2} = \frac{53}{12}$.

Ординату находим из уравнения прямой $y = 12x$-17: $y_N = 36$.

Итак, точка касания имеет координаты $N\left(\frac{53}{12}; 36\right)$ и $|MN| = \left(\frac{53}{12} + \frac{19}{12}\right)^2 + 36^2 = 1332$.

Ответ. 1332.

Задача 3. Через начало координат проведены две прямые, касающиеся графика функции $y = \frac{4}{x^2+24x+7}$ в двух различных точках М и N. Найдите абсциссу середины отрезка MN.

Решение. Обозначим k – абсциссу точки касания. Составим уравнение касательной: $y = \frac{4}{k^2+24k+7} \text{-} \frac{4(2k+24)}{(k^2+24k+7)^2}(x\text{-}k)$.

Так как эта прямая проходит через начало координат O(0;0), то

$$\frac{4}{k^2 + 24k + 7} \text{-} \frac{4(2k + 24)}{(k^2 + 24k + 7)^2} = 0,$$

$$3k^2 + 48k + 7 = 0.$$

Корни данного уравнения и есть абсциссы точек М и N. Абсцисса середины отрезка MN:

$$x = \frac{k_1 + k_2}{2}, x = \frac{\text{-}\frac{48}{3}}{2} = \text{-}8.$$

Ответ. -8.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Задача 4. Через точку М, лежащую на оси Оу, проходит единственная прямая, касающаяся графика функции $y = \frac{x^2+3x-12}{x+3}$. Найдите ординату точки М.

Решение. Преобразуем функцию $y = \frac{x^2+3x-12}{x+3}$, $y = x-\frac{12}{x+3}$. Допустим, что $N\left(p; p-\frac{12}{p+3}\right)$ – точка касания указанной прямой и графика функции. Тогда уравнение касательной запишем в виде: $y = p-\frac{12}{p+3} + \left(1 + \frac{12}{(p+3)^2}\right)(x-p)$.

Пусть точка М пересечения этой касательной с осью Оу имеет ординату y_0, тогда $y_0 = -12\frac{2p+3}{(p+3)^2}$. Поскольку через точку М проходит единственная прямая, касающаяся графика функции, то уравнение $y_0 = -12\frac{2p+3}{(p+3)^2}$ должно иметь единственное решение, что возможно лишь в случае, когда дискриминант квадратного уравнения $p^2y_0 + (6y_0 + 24)p + (9y_0 + 36) = 0$ равен нулю, то есть $(3y_0 + 12)^2 = 9y_0^2 + 36y_0$, $y_0 = -4$.

Ответ. -4.

Задача 5. На параболе $y = ax^2 + bx + 5$ существует единственная точка М, обладающая тем свойством, что если в этой точке провести касательную к параболе, то отрезок этой касательной, заключенный между координатными осями, делится точкой М пополам. Найдите ординату вершины параболы.

Решение. Пусть $M(p; ap^2 + bp + 5)$ – точка, в которой проведена касательная $y = (ap^2 + bp + 5) + (2ap + b)(x-p)$. Найдём координаты точек пересечения касательной с координатными осями: $N(0; -ap^2 + 5), P\left(\frac{ap^2-5}{2ap+b}; 0\right)$.

Так как М – середина отрезка NP, то $\frac{ap^2-5}{2ap+b} = 2p$ или $3ap^2 + 2bp + 5 = 0$. Поскольку М существует и единственна, то последнее уравнение относительно p должно иметь единственное решение, что возможно при $b^2 = 15a$.

Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}$, ордината $y_0 = 5-\frac{b^2}{4a} = 5-\frac{15a}{4a} = 1{,}25$

Ответ. 1,25.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)