Жмурова Ирина Юньевна
канд. пед. наук, доцент
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»
г. Ростов-на-Дону, Ростовская область

DOI 10.31483/r-103266

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ В СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ

***Аннотация**: статья посвящена проблемам изучения тригонометрии выпускниками отечественной школы. Автором рассматриваются особенности изучения тригонометрии на различных этапах математического образования, анализируются типичные ошибки, допущенные обучающимися при решении тригонометрических уравнений.*

***Ключевые слова**: уравнение, тригонометрический круг, единичная окружность, школьный курс математики, государственная итоговая аттестация, тригонометрическая функция, интеграционные связи.*

Тригонометрия традиционно является важнейшим разделом школьного курса математики. Так или иначе, но многие содержательно-методические линии школьного курса математики рассматривают тригонометрический аспект как свою неотъемлемую часть [4, с. 86]. Это, безусловно, и функциональная линия: тригонометрические функции и обратные к ним – важная часть содержания программы курса алгебры и начал анализа, и линия уравнений и неравенств: тригонометрические уравнения являются составляющей контрольно-измерительных материалов ГИА по математике, а для нахождения области определения уравнения иногда необходимо решить соответствующее тригонометрическое неравенство. Линия преобразований обеспечивается необходимостью преобразовывать тригонометрические выражения как для решения уравнений, так и для исследования свойств тригонометрической функции. Решение геометрических задач –

как планиметрических, так и стереометрических – тоже очень часто вынуждает учащихся использовать тригонометрические формулы.

Кроме того, изучение тригонометрии способствует реализации многочисленных интеграционных связей – как интродисциплинарных (внутренних) – например, между алгеброй и анализом, между алгеброй и геометрией, так и интердисциплинарных – тригонометрические функции часто используются при решении физических задач в механике, оптике и т.д. [3, с. 24]. Таким образом, изучение тригонометрических функций, уравнений, зависимостей – существенная часть школьного математического образования, что актуализирует необходимость говорить о методике ее изучения.

Первое знакомство с тригонометрией у современных школьников происходит в курсе геометрии 8 класса – это так называемая тригонометрия прямоугольного треугольника. Тригонометрические функции определяются для углов от 0˚ до 90˚ как соотношения сторон прямоугольного треугольника: синус и косинус – отношение катета к гипотенузе, а тангенс – отношение катетов. Уже на этом этапе учащиеся знакомятся с основным тригонометрическим тождеством, являющимся, фактически следствием теоремы Пифагора. Как правило, никаких проблем с пониманием и запоминанием этой формулы ни на этом, ни на последующих этапах изучения тригонометрии, не возникает. В 9 классе (по-прежнему в рамках геометрии) предпринимается попытка связать тригонометрические функции с координатами точек единичной полуокружности для вычисления координат точки плоскости и определить тригонометрические функции тупых углов, но, по-прежнему, используется, в основном, геометрия прямоугольного треугольника.

Полноценное же изучение тригонометрических функций и их свойств начинается лишь в старшей школе. Тригонометрические функции действительного аргумента вводятся с помощью тригонометрической окружности: синус и косинус числа – это, соответственно, ордината и абсцисса точки единичной окружности, соответствующей длине дуги, равной данному числу. Это определение, как правило, плохо понимается и в дальнейшем учащиеся делают все, чтобы не использовать единичную окружность.

К сожалению, широко распространено мнение о том, что главное в тригонометрии – это знание тригонометрических формул. На наш взгляд, тригонометрическим формулам придается неоправданно большое значение. На наш вопрос – как вы думаете, сколько тригонометрических формул необходимо знать наизусть для того, чтобы успешно решать тригонометрические уравнения – большинство респондентов (учителей математики и студентов-бакалавров педагогического образования) назвали число в интервале от 40 до 60! Это неоправданно большое число, на самом деле, формул, которые действительно необходимо помнить не больше 20. Основная причина ошибок, которые допускают обучающиеся при решении тригонометрических уравнений, преобразовании тригонометрических выражений, использовании свойств тригонометрических функций состоит не в незнании той или иной тригонометрической формулы, а в непонимании сути основных понятий.

Так, например, при решении простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$ или $\cos x = a$ учащиеся формально записывают ответ с использованием обратных тригонометрических функций, не задумываясь об их области определения: довольно распространенной является запись ответа с использованием арксинуса или арккосинуса аргумента, модуль которого больше единицы.

При преобразовании арккосинуса отрицательного аргумента в работах старшеклассников часто встречается запись $\arccos(-a) = -\arccos a$, вместо $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

При решении уравнения $\sin x = a$, записывая ответ в виде общей формулы, многие обучающиеся пишут выражение

$$x = (-1)^n \arcsin a + 2\pi n, n \in Z,$$

вместо $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$. Это связано, в основном, с тем, что формула не выводилась, как, впрочем, и другие тригонометрические формулы. Все они даются списком для заучивания, а многие учителя не требуют даже и этого: учащимся разрешается использовать готовые списки («шпаргалки») имеющихся формул. В связи с этим обучающиеся не чувствуют области применения той или иной формулы, путают их. Очень часто, например, решение простейшего уравнения вида $\sin x = a$ записывают в виде $x = \pm \arcsin a$, получая, разумеется, неверные корни.

На наш взгляд, дабы избежать подобных ошибок, необходимо контролировать не знание/незнание тех или иных формул, а умение видеть ситуацию, добиваться понимания сути происходящего. Для этого необходимо максимально визуализировать ситуацию любыми доступными способами. И, безусловно, наиболее эффективно это можно делать с использованием тригонометрического круга. Тригонометрический круг позволяет быстро и правильно записать решение не только простейшего уравнения вида $t(x) = a$, где $t(x)$ – одна из тригонометрических функций, но и уравнения вида $\sin x = \pm \sin y$, $\cos x = \pm \cos y$ и даже $\sin x = \pm \cos y$ без использования формул суммы и разности синусов или косинусов (надо заметить, что это одни из наиболее трудно запоминаемых формул – более 70% выпускников не могут похвастаться уверенным их применением!).

Безусловно, понимание использование отображения множества действительных чисел в множество точек единичной окружности – не самый легкий для понимания материал и многие учителя пытаются «экономить» учебное время, не углубляясь в свойства данного отображения. Но время, «потраченное» на изучение этой темы с лихвой окупиться в дальнейшем, ведь с помощью тригонометрического круга можно увидеть все основные свойства тригонометрических функций, понять формулы приведения, формулы сложения и многое другое.

Роль тригонометрического круга трудно переоценить, особенно после появления в контрольно-измерительных материалах государственной итоговой аттестации выпускников средней школы задания, связанного с отбором корней уравнения. Для того, чтобы найти корни тригонометрического уравнения, входящие в заданный промежуток, использование тригонометрической окружности максимально полезно с одной стороны, и требует минимальных затрат времени, с другой. Особенно это касается таких тригонометрических уравнений, которые сводятся к решению простейших уравнений с «нетабличной» правой частью. Корни подобных уравнений невозможно отобрать ни с помощью решения двойного неравенства, ни с помощью правильно организованного перебора. А вот на окружности они видны «невооруженным» взглядом, даже если длина промежутка превышает длину окружности. В этом случае необходимо представить данный промежуток в виде объединение нескольких дуг, длина каждой из которых, меньше длины одной окружности.

При изучении тригонометрических уравнений необходимо, прежде всего, показать, что все они могут быть разбиты на несколько типов в зависимости от метода решения. Для решения тригонометрических уравнений можно использовать большое количество способов, практически каждое уравнение можно решать различными методами. Перечислим основные методы решения тригонометрических уравнений. Все они, так или иначе, предназначены для сведения данного уравнения к одному или нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям и могут быть объединены к одной из двух групп: общие методы решения алгебраических уравнений и специфические методы, характерные именно для тригонометрии.

К первой группе можно отнести разложение исходного уравнения в произведение нескольких сомножителей и его сведение к совокупности нескольких, более простых, уравнений и сведение уравнения к алгебраическому (чаще всего квадратному) относительно некоторой тригонометрической функции. Для этого используются тригонометрические формулы, преобразующие алгебраическую сумму тригонометрических функций в произведение, основное тригонометрическое тождество, тригонометрические функции кратного (как правило, двойного) аргумента. Ко второй – формулы понижения степени, преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность, введение дополнительного аргумента и использование универсальной тригонометрической подстановки.

Для сильных обучающихся, проявляющих интерес к математике, в рамках внеурочной деятельности можно рассмотреть системы тригонометрических уравнений и тригонометрические неравенства. Эти темы давно перестали рассматриваться в обязательном курсе алгебры и начал анализа даже в профильных классах, но их образовательный потенциал трудно переоценить. Решая тригонометрическое неравенство различными способами – как с помощью построения соответствующего графика функций, так и с помощью тригонометрического круга, учащиеся не только получают новые знания, но и усваивают новые навыки, реализуют интродисциплинарные (внутренние) связи между содержательно-методическими линиями математики: функциональной линией и линией уравнений и неравенств [2, с. 43–50]. Для решения же системы тригонометрических уравнений приходится находить общее решение диофантова уравнения первой степени с несколькими переменными – тема, которая «не вписывается» в рамки даже профильного курса математики [1, с. 46–49]. Тем не менее, формирование навыка решения подобного уравнения позволяет рассмотреть определенные подходы к решению теоретико-числовых задач – наиболее сложных и «дорогих» задач государственной итоговой аттестации выпускников.

Таким образом, изучение тригонометрии в школьном курсе математики способствует интеллектуальному развитию выпускников, формированию и развитию абстрактного и логического мышления, пониманию единства и многообразия картины мира. Тригонометрический аппарат используется при решении большого количество задач геометрии, физики, механики и других областей человеческой деятельности, поэтому изучение тригонометрии способствует реализации как интро-, так и интердисциплинарных связей математики [3, с. 48]. Кроме того, большое разнообразие методов решения тригонометрических уравнений позволяет учащимся систематизировать свои знания и по другим разделам математики, что, несомненно, позволяет этому разделу занять достойное место в общем курсе школьной математики.

Список литературы

1. Болибрух А. Решение систем тригонометрических уравнений / А. Болибрух, В. Уроев, М. Шабунин // Квант. – 1987. – №11. – С. 46–49.

2. Демьянов В. Тригонометрические неравенства / В. Демьянов // Квант. – 1971. – №4. – С. 43–50.

3. Жмурова И.Ю. Методическая система обучения дискретной математике бакалавров педагогического образования / И.Ю. Жмурова. – Казань: Бук, 2016. – 142 с. – ISBN 978-5-906873-24-8. – EDN WHSNRR.

4. Лебедева С.В. Методика обучения и воспитания (математика). Модуль 1. Непрерывный курс математики: содержательный аспект: учебно-методическое пособие / С.В. Лебедева. – Саратов, 2014. – 149 с.