Куприянова Марина Владимировна
канд. экон. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный
радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина»
г. Рязань, Рязанская область

МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация*: в статье рассмотрена математическая модель управления сложной социально-экономической системой с учетом нелинейного мультипликативного эффекта реинвестирования. Практическая ценность предложенного подхода заключается в возможности выбора оптимального соотношения доходности и риска, в том числе в условиях работы с заемным капиталом и левериджем.*

Ключевые слова*: моделирование, управление капиталом, оптимальное управление в экономике, реинвестирование.*

Многие социально-экономические, финансовые, производственные, биологические системы обладают способностью мультиплицировать некоторый значимый ресурс: это может быть капитал, популяция, валовой продукт [1; 4]. Базовыми характеристиками таких систем являются их стохастичность и мультипликативность (способность циклически приумножать, генерировать «рабочий ресурс»). В простейшем одномерном случае системная модель такого генератора (Gen) имеет следующий вид (рис. 1):

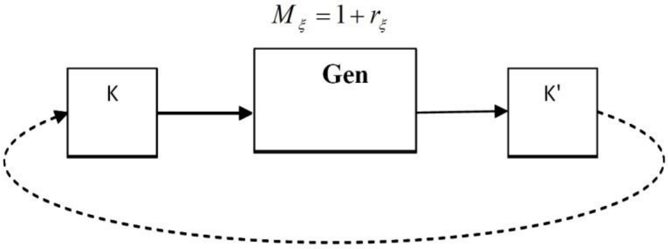

Рис. 1. Системная модель одномерного генератора

Математическая модель (1) представляет собой разностное уравнение 1-го порядка (каскад) относительно основного ресурса K (в зависимости от предметной области это может быть любой мультиплицируемый накопитель -

капитал, численность экономической или социосистемы, энергия генератора, информация и пр.):

$$K_{n+1} = K_n + r_\xi K_n = (1 + r_\xi^{(n)}) K_n = M_\xi^{(n)} K_n, \ (n \in N) \tag{1}$$

$r_\xi^{(n)}, M_\xi^{(n)}$ – стохастические тактовые доходность и мультипликатор системы на *n*-ом такте генератора.

Мультипликатор капитала будет вычисляться по формуле (2):

$$M^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} (1 + r_\xi^{(i)}) \tag{2}$$

Уравнения динамики (1) и (2) – это только часть математической модели таких систем, поскольку, как показывает практика и численные эксперименты, стохастический характер доходности $r_\xi^{(n)}$ и нелинейный мультипликативный характер динамики капитала (2) могут привести и постоянно приводят к невосполнимым потерям и «краху» таких систем, если предоставить их самим себе и не управлять ими. В связи с этим и возникло такое направление, как управление капиталом (*Money management* [5]) сначала в финансовой сфере, а затем и в других экономических и смежных дисциплинах. Для накопителей, удовлетворяющих модели (1), (2) в предположении стационарности функции распределения тактовой доходности r_ξ, единственный способ снизить риски в таких системах – это перекалибровать волатильность, вводя в систему на каждом такте постоянную долю (фракцию) φ ресурса, оставляя часть капитала в резерве. В этом случае динамика капитала (каскад) будет иметь вид (3):

$$K_{n+1} = K_n + \varphi r_\xi K_n = (1 + \varphi r_\xi^{(n)}) K_n = M_\xi^{(n)} K_n, \ (n \in N) \tag{3}$$

Мультипликатор капитала будет вычисляться по формуле (4):

$$M^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} (1 + \varphi r_\xi^{(i)}) \tag{4}$$

Хотя по своему смыслу фракция $\varphi \in [0,1]$, предположим, что $\varphi \in (-\infty, +\infty)$, поскольку современные финансовые инструменты позволяют работать с заемным капиталом ($\varphi < 0$) и с левериджем ($|\varphi| > 1$).

Необходимым условием эффективной работы генератора является условие «преимущества»: средняя доходность должна быть положительной ($\langle r_\xi \rangle > 0$). Обычно этим и ограничиваются и используют максимально доступную фракцию φ, что при маржинальной торговле на высоковолатильных рынках практически гарантированно приводит к потере капитала. Поэтому необходимо тщательно рассчитать оптимальную фракцию φ_{opt}, которая обеспечивает максимально эффективную работу генератора.

Приведенная эффективность мультипликативной системы определяется среднегеометрическим мультипликатором (5):

$$M_1^{(n)} = \sqrt[n]{M^{(n)}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+\varphi r_\xi^{(i)})} = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\varphi r_\xi^{(i)})}{n}\right) \qquad (5)$$

В пределе (при $n \to \infty$) получим асимптотическое выражение для M_G - среднегеометрического значения мультипликатора (коэффициента усиления) генератора на один такт(6):

$$M_G = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\varphi r_\xi^{(i)})}{n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\varphi r_\xi^{(i)})}{n}\right) = \exp\left\langle \ln\left(1+\varphi r_\xi\right)\right\rangle \qquad (6)$$

Обозначим функцию $G(\varphi)$, фактор Келли (7):

$$G = \langle \ln(1+\varphi r_\xi)\rangle = \overline{\ln(1+\varphi r_\xi)} \qquad (7)$$

Тогда (6) можно переписать в компактном виде (8):

$$M_G = \exp(G(\varphi)) \qquad (8)$$

Оптимальная фракция φ_{opt} является решением оптимизационной задачи (9):

$$G(\varphi) = \langle \ln(1+\varphi r_\xi)\rangle \xrightarrow{\varphi} \max \qquad (9)$$

Значительно богаче по возможностям многомерные социально-экономические генераторы. Они позволяют изучать портфельные и конкурентные стратегии при построении воспроизводящих систем и создавать эффективные методики управлении многомерными био-социо-экономическими генераторами. В таких системах ресурс (например, капитал) перед тактированием распределяется между несколькими одномерными генераторами (в современных биржевых системах количество таких компонент может исчисляться десятками и сотнями тысяч), затем собирается и снова перераспределяется, но уже с другими весами в зависимости от контекста внешней и/или внутренней среды. При этом в общем случае отдельные генераторы являются стохастическими и коррелированными между собой.

Системная модель таких многомерных генераторов («автоклавов») имеет следующий вид (рис. 2).

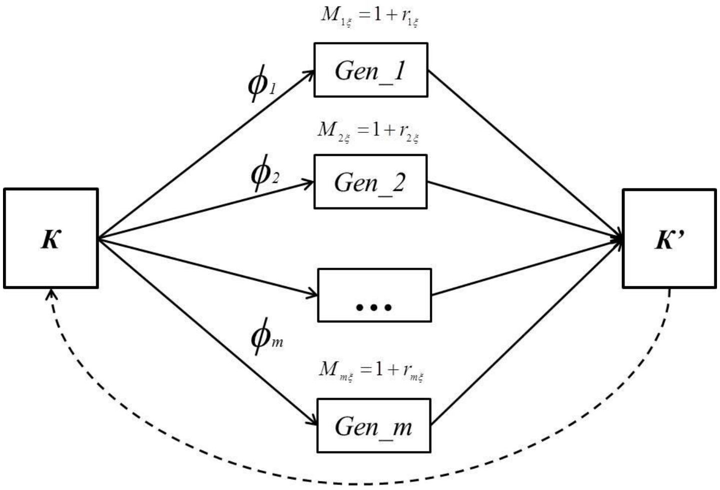

Рис. 2. Системная модель многомерного генератора

В этой модели:

$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ – вектор весов портфеля, причем в отличие от модели Марковица [4], в общем случае $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \neq 1$ и $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \in (-\infty, +\infty)$ – все зависит от назначения системы и характеристик её внешней и внутренней среды;

$\vec{r}_\xi = (r_{1\xi}, r_{2\xi}, ..., r_{m\xi})$ - случайный вектор доходностей многомерного генератора, компонентами которого являются случайные доходности отдельных осцилляторов. Предполагается стационарность функции распределения вектора $\vec{r}_\xi$ и постоянство весового вектора $\vec{\varphi}$.

После элементарных преобразований получим разностное уравнение 1-ого порядка (каскад), описывающее динамику ресурса (капитала) в многомерном генераторе (10).

$$K_{n+1} = (1 + \vec{\varphi} \cdot \vec{r}_\xi^{(n)}) K_n = M_\xi^{(n)} K_n, \ (n \in N) \qquad (10)$$

В формуле (10) $\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_{\xi}^{\,(n)}$- скалярное произведение векторов $\vec{\varphi}$ и $\vec{r}_{\xi}^{\,(n)}$, а $M_{\xi}^{(n)}=1+\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_{\xi}^{\,(n)}$ – случайный мультипликатор на весовом векторе $\vec{\varphi}$. Из (10) получим выражение для мультипликатора многомерного генератора после n тактов (11):

$$M^{(n)}=\prod_{i=1}^{n}(1+\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_{\xi}^{\,(i)}) \qquad (11)$$

Аналогично одномерному случаю получается выражение для асимптотического среднегеометрического мультипликатора системы (12):

$$M_{G}(\vec{\varphi})=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_{\xi}^{\,(i)})}{n}\right)=$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_{\xi}^{\,(i)})}{n}\right)=\exp\left\langle\ln\left(1+\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_{\xi}^{\,(i)}\right)\right\rangle \qquad (12)$$

Введем обозначение (13):

$$G(\vec{\varphi})=\langle\ln(1+\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_{\xi})\rangle=\overline{\ln(1+\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_{\xi})} \qquad (13)$$

Получим в итоге формулу для расчета и анализа эффективности многомерного социально-экономического генератора (14):

$$M_{G}(\vec{\varphi})=\exp(G(\vec{\varphi})) \qquad (14)$$

Предположим, что случайный процесс, порождаемый стохастическим каскадом (10) является стационарным и описывается совместной плотностью вероятностей исходов составных одномерных генераторов $p(\vec{r}_{\xi})$ и тогда оптимальное управление воспроизводящей генерационной системой будет определяться решением следующей оптимизационной многомерной задачи в пространстве весов (15):

$$G(\vec{\varphi})=\langle\ln(1+\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_{\xi})\rangle\xrightarrow{\vec{\varphi}\in R^{m}}\max \qquad (15)$$

Соотношение (15) может быть положено в основу систем управления сложными социально-экономическими системами, поскольку в отличие от портфельных моделей Марковица [4], ориентированных на один рабочий такт, здесь в явном виде учитывается нелинейный мультипликативный эффект реинвестирования. Новизна подхода заключается и в том, что в модели автоматически выбирается оптимальное соотношение доходности и риска. При этом модель позволяет автоматически учитывать работу с заемным капиталом (ресурсом) и левериджем. Следует отметить, что в настоящее время существуют мощные современные нейросетевые пакеты для решения экстремальных задач этого класса [3]. Задача (15) легко обобщается на нестационарные случайные процессы, используя нейросетевые алгоритмы и методы адаптивной обработки сигналов [2].

Список литературы

1. Вернадский В.И. Биосфера и ноосфера [Текст] / В.И. Вернадский. – М.: АСТ, 2022. – 640 с.

2. Уидроу Б. Адаптивная обработка сигналов [Текст] / Б. Уидроу, С. Стирнз. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.

3. Хамхоева Ф.Я. Нейронные сети в экономическом анализе: плюсы и минусы [Текст] / Ф.Я. Хамхоева // Norwegian Journal of Development of the International Science. – 2020. – №. 51–4. – С. 72–75.

4. Шарп У.Ф. Инвестиции [Текст] / У.Ф. Шарп, Дж.В. Бэйли, Г.Дж. Александер. – М: Инфра-М, 2018. – 1028 с.

5. Vince R. The handbook of portfolio mathematics: formulas for optimal allocation and leverage [Текст] / R. Vince. – Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. – 422 p.