Малахинская Снежана Николаевна

студентка

Филиал ФГБОУ ВО «Омский государственный

педагогический университет» в г. Таре

г. Тара, Омская область

ПОДХОДЫ К РАСКРЫТИЮ ТЕМЫ «ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ» В РАМКАХ ШКОЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ МАТЕМАТИКИ

***Аннотация**: в статье рассмотрены основные аспекты раскрытия темы «Формулы сокращенного умножения» различными авторами. Приведены основные направления работы, а также выявлены наиболее удачные подходы раскрытия данной темы.*

***Ключевые слова**: формулы сокращенного умножения, математика в школе.*

Тема «Формулы сокращенного умножения» является программной и содержится во всех учебниках 7 класса школьного курса математики. В каждом учебнике материал изложен с учетом возрастных особенностей, а также изложение материала излагается от простого к сложному.

Каждый автор излагает данную тему по-разному, так, например, автор учебника Ю.Н. Макарычев посвящает данной теме всю 5 главу «Формулы сокращенного умножения». Весь материал находится в систематическом порядке. Теоретический материал сначала разбирается на конкретных примерах, а затем обобщается. Материал подается с помощью различных цветов и шрифтов – это необходимо для того чтобы учащиеся обращали внимание на ту информацию которую необходимо запомнить. В первую очередь автор указывает на значимость изучения формул сокращенного умножения. Первой формулой автор приводит формулу квадрата суммы и квадрата разности. В своем объяснении автор приводит некоторые примеры квадрата суммы и квадрата разности [3].

Пример 1. Возведем в квадрат сумму $8x+3$.

▶ По формуле квадрата суммы получим

$$(8x+3)^2=(8x)^2+2\cdot 8x\cdot 3+3^2=64x^2+48x+9. \ \triangleleft$$

Пример 2. Возведем в квадрат разность $10x-7y$.

▶ Воспользовавшись тождеством (2), получим

$$(10x-7y)^2=(10x)^2-2\cdot 10x\cdot 7y+(7y)^2=100x^2-140xy+49y^2.$$

На основе формул квадрата разности и квадрата суммы автор выводит понятие формул куба суммы и куба разности. Для более наглядного изучения данных формул автор приводит примеры.

Пример 5. Возведем в куб сумму $2x+3$.

▶ Имеем

$$(2x+3)^3=(2x)^3+3(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2+3^3=8x^3+36x^2+54x+27. \ \triangleleft$$

Пример 6. Возведем в куб разность $3x-5$.

▶ Имеем

$$(3x-5)^2=(3x)^3-3(3x)^2\cdot 5+3\cdot 3x\cdot 5^2-5^3=27x^3-135x^2+225x-125. \ \triangleleft$$

Для закрепления полученных знаний автор приводит пункт, который посвящен практическим заданиям разной сложности. В конце каждого параграфа информация представлена в виде контрольного задания для повторения материала.

В учебнике С.М. Никольского материал представлен в отдельном 6 параграфе. Автор подводит учеников к теме формул сокращенного умножения с помощью правила умножения многочлена на многочлен. Далее автор приводит определения формулы квадрата суммы. В данном учебнике вслед за определением следуют задания, посвященные тренировке работы с данными формулами. В следующем пункте автор приводит определения квадрата разности, а также отводит отдельный пункт выведению полного квадрата. В данном пункте автор приводит объяснение материала с помощью приведения примеров [2].

Пример 1. Рассмотрим многочлен второй степени относительно x:

$$x^2+6x+5.$$

Этот многочлен можно преобразовать следующим образом:

$$x^2+6x+5=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+5=(x+3)^2-4.$$

Мы представили $6x$ в виде удвоенного произведения x и 3, прибавили к многочлену и вычли из него одно и то же число 3^2, далее применили формулу квадрата суммы для двучлена $x+3$.

Итак, получено равенство

$$x^2+6x+5=(x+3)^2-4,$$

показывающее, что многочлен второй степени x^2+6x+5 равен сумме квадрата двучлена $x+3$ и числа -4. В этом случае говорят, что из многочлена x^2+6x+5 **выделен полный квадрат**.

При изложении материала автор приводит определение суммы и разности кубов. В данном учебнике один из пунктов посвящен кубу разности. После приведения теоретического материала автор приводит практические задания для закрепления материала.

В учебнике Ш.А. Алимова изучению данной темы отводится два параграфа. В первом параграфе приводится определение разности квадратов. Данное определение выводится с помощью сравнения двух равенств. Второй параграф данного учебника посвящен квадрату суммы и квадрату разности. Так же в данном учебнике присутствует параграф, в котором приводятся несколько способов разложения многочлена на множители. Одним из способов является применение формул сокращенного умножения. В завершении каждого параграфа присутствую практические задания [1].

351 Представить в виде квадрата одночлена:
1) $4a^2$; $9b^2$; $16c^2$; $0{,}04x^2$;
2) $\frac{1}{9}a^2b^2$; $0{,}25x^2y^2$; $0{,}16m^4$; $0{,}81n^6$;
3) $0{,}01a^4b^2$; $\frac{9}{16}x^2y^4$; $\frac{25}{49}x^6z^4$; $1\frac{9}{16}m^4n^6$.

В учебнике Ю.М. Колягина изучение формул сокращённого умножения начинается с определения разности квадратов, так же как и в учебнике Ш.А. Алимова изложение данного материала начинается с сравнения двух равенств. В данном параграфе автор указывает значимость формул сокращенного умножения. Для первичного изучения материала автор приводит вводные упражнения, которые необходимо выполнить устно.

Вводные упражнения

$S_{ABCD} = a^2$
$S_{AEFG} = b^2$
$S_{GFEBCD} = S_{EBHL}$
$S_{GFEBCD} = a^2 - b^2$
$S_{EBHL} = (a-b)(a+b)$

Рис. 15

1. (Устно.) Записать в виде квадрата числа:
   1) 81; 2) 256; 3) 0,36; 4) 14400.
2. Представить в виде квадрата одночлена:
   1) a^4; 2) b^6; 3) a^2b^8; 4) x^2y^{10}.
3. Записать в виде многочлена стандартного вида результат умножения:
   1) $(x-7)(x-7)$; 2) $(a-b)(a-b)$; 3) $(m-2)(m+1)$;
   4) $(-2x+3)(x-4)$; 5) $(3a-5b)(b-6a)$; 6) $(3m-n)(3m+n)$.
4. Разложить на множители:

Далее в параграфе приведены упражнения для улучшения навыков работы с формулами сокращенного умножения. Следующий параграф посвящен формулам квадрата суммы и квадрата разности. В данном параграфе так же приведены вводные упражнения [4].

Автор учебника Г.В. Дорофеев отводит один параграф для изучения темы «Формулы сокращённого умножения». Данный параграф находится в главе посвященной многочленам. Из всех формул сокращенного умножения автор уделяет внимание только формулам квадрата суммы и квадрата разности. Автор приводит различные упражнения для закрепления навыков работы с данными формулами.

727 Представьте квадрат двучлена в виде трёхчлена:
а) $(2x-1)^2$; в) $(4z-3)^2$; д) $(4-2b)^2$; ж) $(1-2k)^2$;
б) $(5y+1)^2$; г) $(3a+2)^2$; е) $(3+6c)^2$; з) $(5+3t)^2$.

728 Выполните возведение в квадрат:
а) $(2x+3y)^2$; в) $(4u-3t)^2$; д) $(ab+2)^2$; ж) $(1-xz)^2$;
б) $(3a-2b)^2$; г) $\left(2m+\frac{1}{2}n\right)^2$; е) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$; з) $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$.

Помимо преобразования выражений автор учебника приводит задания на доказательства равенств, а так же приводит задания на исследование формул [5].

757 ИССЛЕДУЕМ 1) Используя формулу квадрата двучлена, возведите в квадрат трёхчлен $a+b+c$. (*Указание.* Сделайте замену $a+b=x$.) Проиллюстрируйте полученное равенство геометрически, изобразив квадрат со стороной $a+b+c$.

В учебнике Г.К. Муравина рассматривается только три формулы сокращенного умножения. Автор приводит один параграф для изучения данной темы. В данном учебнике изложение материала начинается с введения определений формул квадрата суммы и квадрата разности, так же автор приводит определение разности квадратов. Для лучшего запоминания в учебнике приводятся краткие словестные формулировки. После изложения теоретического материала в учебнике приводятся практические задания различного уровня сложности.

368. Запишите удвоенное произведение:

1) 34 и 12; 4) $25x$ и $-6z$; 7) $k-1$ и $k+1$;

2) -6 и $-d$; 5) $-\frac{1}{2}a$ и $-\frac{3}{5}c$; 8) $3t+2$ и $2t-1$.

3) $3a$ и $5b$; 6) $x+y$ и $-z$;

369. Представьте в виде удвоенного произведения:

1) 34; 4) $1{,}5a^2b$;

2) -7; 5) c^3d;

3) $6xy$; 6) $\frac{1}{3}n^4m^3$.

В следующем пункте данного параграфа приводятся примеры разложения многочленов на множители с помощью формул сокращенного умножения. В заключении параграфа присутствуют задания различной сложности [7].

В учебнике А.Г. Мордковича «Алгебра 7 класс» тема «Формулы сокращенного умножения» представлена в 24 и 30 параграфе. В учебнике приведены замечания – это необходимо для заострения внимания учеников на важных правилах при использовании формул сокращенного умножения. Так же в учебнике приведены примеры для решения различных задач. Во второй части учебника расположены упражнения для закрепления темы [6].

Помимо учебников данная тема рассматривается в работах многих ученых. Так М.П. Апанасевич предлагает начать рассмотрение темы «Формулы сокращенного умножения» с устных заданий. Данные задания служат итогом подготовительных упражнений.

1. Найдите **квадраты** выражений:
c; -4; $3m$; $5x^2y^3$.
2. Найдите **произведение** $3x$ и $6y$. Чему равно **удвоенное произведение** этих выражений?
3. Прочитайте выражения:
а) $a+b$; в) $(a+b)^2$; д) $(x-y)^2$;
б) a^2+b^2; г) $x-y$; е) x^2-y^2.
4. Выполните умножение $(x+6)(x-5)$.
5. Объясните: как умножить многочлен на многочлен?

При изучении данной темы предлагается ученикам провести исследовательскую работу в группах и вывести самостоятельно правильную формулу. Учащиеся делятся на 3–7 групп и решают следующие примеры:

(m+n)(m+n)=		$=m^2+2mn+n^2$
(c+d)(c+d)=		$=c^2+2cd+d^2$
(x+y)(x+y)=		$=x^2+2xy+y^2$
(p+q)(p+q)=		$=p^2+2pq+q^2$
(k+j)(k+j)=		$=k^2+2kj+j^2$
(8+m)(8+m)=		$=64+16m+m^2$

(n+5)(n+5)=		$=n^2+10n+25$

После решения данных примеров автор предлагает спросить у учеников, в чем сходство данных примеров. В результате работы учащиеся выводят общую формулу.

(m+n)(m+n)=	$(m+n)^2$	$=m^2+2mn+n^2$
(c+d)(c+d)=	$(c+d)^2$	$=c^2+2cd+d^2$
(x+y)(x+y)=	$(x+y)^2$	$=x^2+2xy+y^2$
(p+q)(p+q)=	$(p+q)^2$	$=p^2+2pq+q^2$
(k+j)(k+j)=	$(k+j)^2$	$=k^2+2kj+j^2$
(8+m)(8+m)=	$(8+m)^2$	$=64+16m+m^2$
(n+5)(n+5)=	$(n+5)^2$	$=n^2+10n+25$

Далее автор предлагает ученикам самостоятельно вывести формулу квадрата разности, так же разделив учеников на 3–7 групп в зависимости от количества детей. Автор предлагает решить следующие примеры.

(m-n)(m-n)=		$=m^{2-}2mn+n^2$
(c-d)(c-d)=		$=c^{2-}2cd+d^2$
(x-y)(x-y)=		$=x^{2-}2xy+y^2$
(p-q)(p-q)=		$=p^{2-}2pq+q^2$
(k-j)(k-j)=		$=k^{2-}2kj+j^2$
(8-m)(8-m)=		$=64-16m+m^2$
(n-5)(n-5)=		$=n^{2-}10n+25$

После решения данных заданий школьникам опять обнаружить сходства данных примеров. В результате проделанной работы так же выводят конечную формулу.

(m-n)(m-n)=	$(m-n)^2$	$=m^{2-}2mn+n^2$
(c-d)(c-d)=	$(c-d)^2$	$=c^{2-}2cd+d^2$
(x-y)(x-y)=	$(x-y)^2$	$=x^{2-}2xy+y^2$
(p-q)(p-q)=	$(p-q)^2$	$=p^{2-}2pq+q^2$
(k-j)(k-j)=	$(k-j)^2$	$=k^{2-}2kj+j^2$
(8-m)(8-m)=	$(8-m)^2$	$=64-16m+m^2$
(n-5)(n-5)=	$(n-5)^2$	$=n^{2-}10n+25$

В конце задания детям предлагается провести аналогию между выделенными двумя формулами [10].

Автор статьи В.Б. Дроздов отмечает, что изучение темы «Формулы сокращенного умножения» начинается с семи формул.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Для лучшего запоминания автор предлагает провести между формулами следующую аналогию: Формулы 1–4 объединяет то, что они являются частными случаями бинома Ньютона. Так же необходимо обратить внимание на то, что формула номер 2 может получиться из формулы 1, а формула 4 получается из формулы 3.

Совместно с детьми необходимо провести связь между формулами 3 и 5. Из формулы 3 получим:

$$a^3 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 =$$
$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Аналогичным способом мы можем получить из формулы 4 формулу 6.

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$$
$$= (a-b)(a+b)(a^2 + b^2) = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Таким образом, автор приводит полезные рекомендации и упражнения для хорошего запоминания формул сокращенного умножения [8].

Такие методисты как М.П. Апанасевич и В.Б. Дроздов предлагают задания для успешного изучения темы «Формулы сокращенного умножения».

Автор статьи В.Б. Дроздов отмечает, что изучение темы «Формулы сокращенного умножения» начинается с семи формул. Для лучшего запоминания автор предлагает провести между формулами аналогию.

Автор М.П. Апанасевич предлагает начать рассмотрение данной темы с устных заданий.

Изучение темы «Формулы сокращенного умножения» поможет ученикам при практическом применении тождественных преобразований. Так же формулы сокращенного умножения встречаются на экзаменах ОГЭ в 9 классе.

Список литературы

1. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров [и др.]. – 18-е изд. – М: Просвещение, 2011. – 224 с.

2. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников [и др.]. –18-е изд. – М: Просвещение, 2013.-287 с.

3. Алгебра 7 класс / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – 2015. – С. 163–198.

4. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2012. – 319 с.

5. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [и др.]. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 287 с.

6. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. –17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

7. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2009. – 286 с. – ISBN 978-5-358-07267-1.

8. Дроздов В.Б. Урок-тренировка в разложении на множители [6 способов разложения многочлена x3 + y3 + z3 – 3xyz на множители]. – 2000. – №10. – С. 19–20.