Пермякова Марина Юрьевна
канд. пед. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Шадринский государственный
педагогический университет»
г. Шадринск, Курганская область

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ В РЕШЕНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Аннотация*: в статье рассматривается один из видов математических задач с использованием производной. Поскольку на обучение решению задач такого вида в школьной программе отводится достаточно небольшой объем времени, автором обосновывается возможность использования для их решения приведенного алгоритма. Выделены этапы решения экстремальных задач (задач на оптимизацию) для функций, заданных на отрезке. Автором приводится пример решения такой задачи.*

Ключевые слова*: экстремальные задачи, алгоритм решения экстремальных задач, наибольшее значение функции, наименьшее значение функции.*

Одной из особенностей математики является алгоритмичность решения многих её задач. Алгоритмом, как известно, называется определённое указание относительно того, какие операции и в какой последовательности надо выполнить, чтобы решить любую задачу определённого типа.

Самым сложным типом задач в школе, решаемых с применением производной, являются текстовые задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функции [1]. Когда аналитическое выражение исследуемой функции не дано и его нужно составить. Прежде чем начать обучение учащихся решению оптимизационных задач, необходимо, чтобы у них на должном уровне были сформированы следующие знания и умения.

1. Умение проводить анализ условия задачи с целью усвоения ситуации, заданной в ней, выявления ее предметной области и связей между объектами.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

2. Знание необходимого и достаточного условий существования экстремума функции. Так как оптимизационная задача – это задача на экстремум.

3. Знание алгоритма нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке (интервале, полуинтервале) и умение применять его на практике.

Основное внимание при обучении учащихся решению задач на оптимизацию должно быть обращено на сознательную отработку этапов решения. Для этого школьники должны быть ознакомлены с алгоритмами решения таких задач [2].

Алгоритм решения экстремальных задач для функций, заданных на отрезке.

1. *Анализ условия задачи*.

На этом этапе выделяются процессы и объекты, подлежащие рассмотрению, выполняется чертеж или схема.

2. *Представление искомой величины в виде формулы*.

На втором этапе искомую величину представляют в виде формулы.

3. *Выбор независимой переменной, определение границ её изменения*.

На этом этапе успех решения задачи будет зависеть от разумного выбора независимой переменной. Именно этот этап вызывает наибольшие трудности у учащихся, поэтому ему необходимо уделить особое внимание.

4. *Составление функции* $y = f(x)$.

На четвертом этапе записываем искомую величину в виде функции $y = f(x)$. Это в дальнейшем облегчает решение задачи.

5. *Нахождение оптимизируемой величины на D* (*f*).

Этот этап решения содержит еще 6 шагов решения задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

1. Найти производную составленной функции.

2. Найти критические точки, принадлежащие области определения независимой переменной, отметить их на числовой прямой.

3. Определить знак производной в каждом из полученных промежутков.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

4. Определить экстремальные значения независимой переменной с учетом следующих условий.

1) если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции меняет знак с «+» на «–», то в точке $x = x_1$ функция имеет максимум;

2) если при переходе через точку x_1 слева направо производная меняет знак с «–» на «+» – то функция имеет минимум;

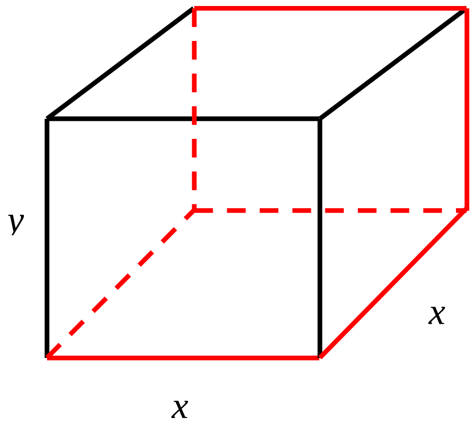
3) если при переходе через точку x_1 слева направо производная знака не меняет, то экстремума в этой точке нет.

5. Вычислить значения оптимизируемой величины в экстремальных значениях независимой переменной и на концах области определения.

6. Выбрать из полученных значений оптимизируемой величины, значение удовлетворяющее условию.

6. *Запись ответа по условию задачи.*

Пример 1.



Для монтажа оборудования необходима подставка объемом 1296 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет вмонтировано в пол, а ее задняя стенка – в стену цеха. Для соединения подставки по ребрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

Решение.

1. Процесс – это монтаж подставки.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Объекты и их формы: параллелепипед, в основании которого лежит квадрат. Создаем рисунок по условию задачи.

Из анализа условия выделяем цветом на чертеже те элементы, которые не будут участвовать в решении задачи (закрашиваем ребра, которые будут вмонтированы в пол и стенку цеха).

2. Далее выражаем в виде формулы искомую величину. Так как размеры подставки зависят от длины ребер, то нам надо найти: $L = 3x + 2y$.

3. Затем в качестве независимой переменной принимаем длину ребра основания, соответственно $x > 0$ (т.к. это длина отрезка-ребра).

4. Составляем функцию $y = f(x)$, так как функция зависит от одной переменно, то пользуясь условием задачи, выражаем y через x.

$V=x^2y$, 1296 *дм*$^3= x^2y$, $y=\dfrac{1296}{x^2}$, $y=3x+2\cdot\dfrac{1296}{x^2}$.

5. Имея обычную функцию, учащиеся без труда определяют её наименьшее значение и записывают ответ с учетом условия задачи.

$$y' = (3x+\frac{2592}{x^2}) = 3-\frac{5184}{x^3} = \frac{3(x^3-1728)}{x^3}, \quad y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-1728=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3=12^3$$

$\Leftrightarrow \; x = 12$

т.е. функция у при $x > 0$ имеет единственную критическую точку $x = 12$.

Если $0 < x < 12$, то $0 < x^3 < 1728$ и $y' < 0$. Если $x > 12$, то $x^3 > 1728$ и $y' > 0$.Значит, $x = 12$ является точкой минимума и $y_{наим} = y(12)$. Тогда высота подставки равна $y = \dfrac{1296}{x^2} = \dfrac{1296}{144} = 9$.

6. Записывают ответ на языке задачи.

Ответ: 12 дм, 12 дм и 9 дм.

При решении задач на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции с геометрическим содержанием от учащихся не следует требовать развернутого пояснения, которое обычно приводится при решении чисто геометрических задач [3]. Например, не нужно обосновывать, почему этот угол является линейным углом двугранного угла, почему этот треугольник прямо-

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

угольный и т. д. Все эти геометрические факты играют здесь лишь вспомогательною роль.

Решение такой задачи должно быть оформлено с учетом приведенного выше алгоритма для задач такого типа. Основное внимание при обучении учащихся решению задач на оптимизацию должно быть обращено на сознательную отработку основных этапов решения (анализ условия, выбор переменной величины, нахождение искомой величины). Эта тема может оказаться интересной для написания учебно-исследовательского проекта школьниками. Можно обратить внимание учащихся на случай, когда функция, следуя условию задачи, оказывается заданной на интервале. Круг рассматриваемых задач в этом случае будет значительно расширен.

Список литературы

1. Методика обучения математике. Практикум: учеб. пособ. для вузов / В.В. Орлов [и др.]; под ред. В.В. Орлова, В.И. Снегуровой. – М.: Юрайт, 2022. – 379 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://urait.ru/bcode/489761 (дата обращения: 31.08.2022).

2. Смоленцев Н.К. Математический анализ: числовые последовательности и функции одной переменной: учеб.-метод. пособ. / Н.К. Смоленцев. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2020. – 169 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=684967 (дата обращения:).

3. Ястребов А.В. Методика преподавания математики: задачи: учеб. пособ. для вузов / А.В. Ястребов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2021. – 201 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://urait.ru/bcode/471281 (дата обращения: 30.08.2022).

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)