Садовников Николай Владимирович
д-р пед. наук, доцент, профессор
Шипанова Елена Викторовна
канд. пед. наук, доцент
Новичкова Татьяна Юрьевна
канд. пед. наук, доцент
Филиал ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Министерства обороны Российской Федерации в г. Пензе
г. Пенза, Пензенская область

МИНИМАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ – СТОЛБЦА (ЛО – СТОЛБЦА) ПО ЭЛЕМЕНТАМ

***Аннотация**: в статье представлено минимальное разложение логического определителя – столбца по элементам.*

***Ключевые слова**: логический определитель ЛО, логический определитель – столбец, ЛО-столбец, минимальное разложение ЛО-столбца, логическое дополнение элемента ai.*

Получено минимальное разложение ЛО – столбца по его элементам через логическое дополнение элемента a_i в логическом определителе ЛО A_n^r. Это логическое дополнение получается из A_n^r исключением максимально возможного числа элементов и соответствующим изменениям ранга r. В процессе обобщения получим общее явное выражения ЛО – столбца произвольного (n-p)-го ранга с n элементами. Оно обозримо лишь для ЛО A_n^r с большими либо с малыми значениями ранга r (r$\approx$n, r$\approx$1). ЛО со средними значениями ранга r удобно раскрывать с помощью первоначально полученного итерационного разложения.

Найдем минимальное разложение ЛО – столбца по его элементам, т.е. такое разложение в ДНФ БЛ $A_n^r = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}^{(r)} = \underset{i}{V}\, a_i\, \overset{r}{\tilde{A}}_{n\setminus a_i} (1)$, в котором содержится минимальное число конъюнкций а А; здесь $\tilde{A}_{n\setminus a_i}$ – минимальное логическое дополнение элемента a_i, в логическое определителе ЛО A_n^r, т.е. ЛО, полученный из A_n^r исключением максимально возможного числа элементов и соответствующим изменением ранга r. Будем исходить из формулы раскрытия ЛО – столбца: $A_n^r = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}^{(r)} = \underset{i_1 \neq \dots \neq i_{n-r+1}}{V} a_{i_1} \dots a_{i_{n-r+1}}$, где $a_i \in \{a_1, \dots, a_n\}$, (2)

конкретизировав ее в виде:

$$A_n^r = \underset{1 \le i_1 \le \dots \le i_{n-r+1} \le n}{V} a_{i_1} \dots a_{i_{n-r+1}}, \text{ где } a_{i_k} \in \{a_1, \dots, a_n\} \quad (3)$$

Положив в (3) r = n, получим разложение ЛО

$$A_n^n = \overset{i=1}{\underset{n}{V}}\, a_i, \quad (4)$$

которое, очевидно, минимально.

Далее, положив в (3) r = n-1, получим такое разложение ЛО:

$$A_n^{n-1} = \underset{1 \le i_1 \le i_2 \le n}{V} a_{i_1} a_{i_2} = a_1 a_2 \vee \dots \vee a_{1n} a_{23} \vee \dots \vee a_2 a_n \vee \dots \vee a_{n-1} a_n, \quad (5)$$

Вынесем за скобки общий элемент в каждой выделенной дизъюнкции. В результате, учитывая формулу (4), найдем разложение:

$$A_n^{n-1} = \overset{i=1}{\underset{n-1}{V}}\, a_i \Big(\overset{j=i+1}{\underset{n}{V}}\, a_j \Big) = \overset{i=1}{\underset{n-1}{V}}\, a_i \begin{vmatrix} a_{i+1} \\ \cdots \\ a_n \end{vmatrix}^{(n-i)} = \overset{i=1}{\underset{n-1}{V}}\, a_i \tilde{A}_{n\setminus a_i}, \quad (6)$$

которое является искомым минимальным разложением для определителя A_n^{n-1}.

Действительно, из разложения любого логического дополнения в (6) $\tilde{A}^{n-1}_{n\backslash a_i} = \underset{j=i+1}{\overset{n-1}{V}} a_j$ нельзя исключить ни одного элемента a_j, т.к. соотношения между элементами a_j с различными индексами j неизвестны. Последнее показывает, что неизвестны и соотношения между различными конъюнкциями в (6), так, что ни одну из них нельзя исключить из разложения (6).

Аналогично, положив в (2) r = n-2, найдем выражение ЛО:

$$A_n^{n-2} = \underset{1\le i_1\le i_2\le i_3\le n}{V} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} = a_1 (\underset{2\le i_2\le i_3\le n}{V} a_{i_2} a_{i_3}) \vee a_2 (\underset{3\le i_2\le i_3\le n}{V} a_{i_2} a_{i_3}) \vee \ldots \vee a_{n-2}(a_{n-1}a_n)$$

в котором каждая скобка, согласно (5), является некоторым ЛО, причем из нее нельзя уже исключить ни одного элемента a_{i_k}; нельзя также исключить ни одной из n-2 конъюнкций. Отсюда, с учетом (6), получаем минимальное разложение для ЛО:

$$A_n^{n-2} = \overset{n-2}{\underset{}{\overset{i=1}{V}}} a_i \left[\overset{i=j+1}{\underset{}{\overset{n-1}{V}}} a_j (\overset{k=j+1}{\underset{}{\overset{n}{V}}} a_k) \right] = \overset{n-2}{\underset{}{\overset{i=1}{V}}} a_i \begin{vmatrix} a_{i+1} \\ \cdots \\ a_n \end{vmatrix}^{n-1-i} = \overset{n-2}{\underset{}{\overset{i=1}{V}}} a_i \cdot \tilde{A}^{n-2}_{n\backslash a_i} \quad (7)$$

Рассмотрим общий случай.

Теорема 1. ЛО – столбец r-го ранга с n элементами A_n^r может быть представлен в виде следующей дизъюнктной нормальной формы ДНФ бесконечнозначной логики БЛ, являющейся минимальным разложением:

$$A_n^r = \begin{vmatrix} a_{i+1} \\ \cdots \\ a_n \end{vmatrix}^{r} = \overset{r}{\underset{}{\overset{i=1}{V}}} a_i \cdot \tilde{A}^{r}_{n\backslash a_i}, \quad (8)$$

в которой $\tilde{A}^{r}_{n\backslash a_i}$ - минимальное логическое дополнение элемента a_i в ЛО A_n^r, выражение как

$$\tilde{A}^{r}_{n\backslash a_i} = \begin{vmatrix} a_{i+1} \\ \cdots \\ a_n \end{vmatrix}^{(r+1-i)} \quad (9)$$

Доказательство: Положим в (2) r = n-p, где p-любое натуральное число в интервале $0 \le p \le n-1$. Получим выражение:

$$A_n^{n-p} = \underset{1\le i_1 \le \ldots \le i_{p+1} \le n}{V} a_{i_1} \ldots a_{i_{p+1}} = a_1 (\underset{2\le i_2 \le \ldots \le i_{p+1} \le n}{V} a_{i_2} \ldots a_{i_{p+1}}) \vee$$

$$a_2 (\underset{3\le i_3 \le \ldots \le i_{p+1} \le n}{V} a_{i_3} \ldots a_{i_{p+1}}) \vee \ldots \vee a_{n-p} (a_{n-p+1} \ldots a_n), \quad (10)$$

Поскольку соотношения между элементами a_{i_k} с различными индексами i_k неизвестны, то из любой скобки в (10) нельзя исключить ни одного элемента. С другой стороны, эти скобки являются некоторыми ЛО.

Действительно, согласно (2):

$$\underset{2\le i_2 \le \ldots \le i_{p+1} \le n}{V} a_{i_2} \ldots a_{i_{p+1}} = \underset{2\le i_2 \le \ldots \le i_{p+1} \le n}{V} a_{i_1} \ldots a_{i_p} = \underset{2\le i_1 \le \ldots \le i_p \le n}{V} a_{i_1} \ldots a_{i(n-1)\ldots(n-p)+1} = \begin{vmatrix} a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{vmatrix}^{(n-p)}$$

$$\underset{3\le i_3 \le \ldots \le i_{p+1} \le n}{V} a_{i_3} \ldots a_{i_{p+1}} = \underset{3\le i_2 \le \ldots \le i_{p+1} \le n}{V} a_{i_1} \ldots a_{i_p} =$$

$$\underset{3\le i_1 \le \ldots \le i_p \le n}{V} a_{i(n-2)\ldots(n-p-1)+1} = \begin{vmatrix} a_3 \\ \ldots \\ a_n \end{vmatrix}^{(n-p-1)}$$

и т. д. Далее, соотношения величин различных скобок оказываются тоже неизвестными. Поэтому неизвестны и соотношения величин n-p конъюнкций в (10), так что ни одна из них не может быть исключена. Таким образом, из (2) вытекает следующая ДНФ представления ЛО – столбца с минимальным числом конъюнкций $A_n^{n-p} = \overset{i=1}{\underset{n-p}{V}} a_i \cdot \tilde{A}_{n\backslash a_i}^{n-p}$, (11)

где $\tilde{A}_{n\backslash a_i}^{n-p}$ - минимальное логическое дополнение элемента a_i в ЛО A_n^{n-p}, представляющее собой ЛО:

$$\tilde{A}_{n\backslash a_i}^{n-p} = \begin{vmatrix} a_{i+1} \\ \cdots \\ a_n \end{vmatrix}^{(n-p)+1-i} . \quad (12)$$

Заменив в (11), (12) n-p на r, получим (8),(9).

Последовательное применения разложения (8) или (11) позволяет получать выражение ЛО меньшей сложности (т.е. с меньшим числом элементарных двуместных операций БЛ).

Основываясь на формуле (8) или (11), можно получить явное и с меньшим числом операций выражение произвольного ЛО – столбца через его элементы. Действительно, явное выражение ЛО $A_n^n, A_n^{n-1}, A_n^{n-2}$ уже было получено нами ранее.

Для A_n^{n-3}, согласно (11), можно записать:

$$A_n^{n-3} = \overset{s=1}{\underset{n-3}{V}} a_s \begin{vmatrix} a_{s+1} \\ \cdots \\ a_n \end{vmatrix}^{[(n-s)-2]} \quad (13)$$

Здесь S-ое логическое дополнение.

$$\tilde{A}_{n\backslash a_3}^{n-3} = \begin{vmatrix} a_{s+1} \\ \ldots \\ a_n \end{vmatrix}^{[(n-s)-2]}$$

, s=1,…,n-3 является ЛО с n-s элементами ранга n-(s-2), которое можно вычислить по формуле (7).

$$\begin{vmatrix} a_{s+1} \\ \ldots \\ a_n \end{vmatrix}^{[(n-s)-2]} = \underset{i=s+1}{\overset{n-2}{V}} a_i \left[\underset{j=i+1}{\overset{n-1}{V}} a_j \left(\underset{k=j+1}{\overset{n}{V}} a_k \right) \right].$$

В результате получаем явное выражение определителя:

$$A_n^{n-3} = \overset{s=1}{\underset{n-3}{V}} a_s \left\{ \overset{i=s+1}{\underset{n-2}{V}} \left[\overset{j=i+1}{\underset{n-1}{V}} a_j \left(\overset{k=j+1}{\underset{n}{V}} a_k \right) \right] \right\}, \quad (14)$$

Этим же путем отыскиваются явные выражения ЛО последующих рангов: n-4,n-5 и т. д.

Общее явное выражение ЛО – столбца произвольного (n-p)-го ранга с n элементами

$$A_n^{n-p} = \bigvee_{k_p=1}^{n-p} a_{k_p}\left(\bigvee_{k_{p-1}=k_p+1}^{n-p+1} a_{k_{p-1}} \cdot \left(\bigvee_{k_{p-2}=k_{p+2}}^{n-p+2} a_{k_{p-2}} \ldots \left(\bigvee_{k_1=k_2+1}^{n-1} a_{k_1}\left(\bigvee_{k_0=k_1+1} a_{k_0}\right)\right)\ldots\right)\right) \qquad (15)$$

Заменив здесь n-p на r получим симметричную с (15) формулу:

$$A_n^r = \bigvee_{k_{n-1}=1}^{r} a_{k_{n-1}}\left(\bigvee_{k_{n-1}-1=k_{n-1}+1}^{r+1} a_{k_{n-1}-1}\left(\bigvee_{k_{n-1}-1=k_{n-1}+1}^{r+2} a_{k_{n-1}-2}\ldots\left(\bigvee_{k_1=k_2+1}^{n-1} a_{k_1}\left(\bigvee_{k_0=k_1+1}^{n} a_{k_0}\right)\right)\ldots\right)\right) \qquad (16)$$

Формулы (16) обозримы лишь для ЛО A_n^r с большими (r $\approx$ n) либо малыми (r $\approx$ 1) значениями ранга r. ЛО со средними значениями ранга удобнее раскрывать с помощью итерационного разложения (8).

Список литературы

1. Садовников Н.В. Логико-математические методы в экономике. Монография / Н.В. Садовников. – Пенза: ПГТА, 2013. – 147 с.

2. Москинова Г.И. Дискретная математика / Г.И. Москинова. – М.: Логос, 2000. – 240 с.

3. Левин В.И. Структурно-логические методы исследования сложных систем с применением ЭВМ / В.И. Левин. – М.: Наука, 1997.

4. Садовников Н.В. Экономико-математическое моделирование. Логические методы исследования экономических систем в условиях неопределенности: учебное пособие с грифом УМО / Н.В. Садовников, А.Ф. Зубков. – Пенза: Пензенский технологический институт, 2003. – 148 с.