Садовников Николай Владимирович

д-р пед. наук, доцент, профессор

Гаврина Зоя Алексеевна

канд. физ.-мат. наук, преподаватель

Филиал ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Министерства обороны Российской Федерации в г. Пензе

г. Пенза, Пензенская область

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕХОДА ОТ БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ (БЛ) К ПОРЯДКОВОЙ ЛОГИКЕ (ПЛ) ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ВОЕННОМ ВУЗЕ

***Аннотация**: в статье описан оригинальный авторский подход к изучению элементов порядковой логики (ПЛ) на основе обобщения основных операций: дизъюнкции и конъюнкции в бесконечнозначной логики БЛ. После обобщения дизъюнкцию БЛ можно рассматривать как r-функцию f(r) при r=n, а конъюнкцию БЛ- как f(r) при r=1. Так как многие значения логики (БЛ) к порядковой логике (ПЛ) для возможности блочного описания систем на основе понятий квазиматрица и её числовой характеристики – логического определителя, которые играют ту же роль, что и обычная квадратная матрица с её определителем для линейной системы.*

***Ключевые слова**: переход от бесконечнозначной логики БЛ к порядковой ПЛ, нелинейная система, квазиматрица, логический определитель, r-операция, f(r) функция, функция порядковой логики, эквивалентные преобразования в ПЛ, закон тавтологии в ПЛ, переместительный закон в ПЛ, распределительный закон в ПЛ, обобщения как метод научного назначения.*

На этапе перехода от обычной (двузначной) логики к бесконечнозначной (БЛ) в качестве базовых операций фигурируют выделения максимального (дизъюнкция) и минимального (конъюнкция) из множества элементов, а также нахождения симметричного относительного центра этого множества элемента (для операции отрицания БЛ). Практические потребности приводят часто к необходимости более общих построений, когда нужно использовать выделение произвольного порядкового элемента из заданного множества. Это и будет составлять основу порядковой логики (ПЛ). БЛ и порядковая логика являются оптимальным математическим аппаратом при изучении многих систем как экономического, так и технического (в том военно-технического) характера. Однако этот аппарат не учитывает проблемы размерности системы. Для решения этой проблемы необходим переход от детального описания системы к блочному, укрупненному. Подобный переход широко применяется в теории линейных систем, где функции блочных параметров выполняют соответствующие матрицы. Для решении многих венно-технических задач матричное исчисление недостаточно, по сколько исследуемые нами системы часто оказываются не линейными. Поэтому выделяют необходимость дальнейшего развития математического БЛ и порядковый логики с целью получения возможности блочного описания систем. В порядковой логике (ПЛ) элементарными понятиями является понятия *квазиматрицы* и её числовой характеристики – *логического определителя,* которые для изучаемых нелинейных систем играет ту же роль, что и обычная квадратная матрица с её определителем для линейной системы.

Вводимые порядковые логические определители позволяют решать проблему размерности при изучении систем с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Рассмотрим конечные множества A=$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ из n элементов $a_i, a_i \in [A, B]$. Рас положим элементы в *порядке неубывания*: $a^{(1)} \leq a^{(2)} \leq \ldots a^{(n)}$, $a^{(i)} \in A$.

Введем над множеством A операцию выделения произвольного порядкового элемента $a^{(r)}$ этого множества – *r-операции* $y = f^{(r)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a^{(r)}$, r=1, 2, …, n. (1)

Здесь r – называется *рангом* операции.

Функция $f^{(r)}$ – называется *r-функцией.*

Заметим, что *r операция* обобщает операции конъюнкции БЛ и дизъюнкции БЛ, переходя в них в соответственно при r=1 и r=n. Результатом r- операции над элементами множества A является *r-ый по рангу* (порядку) элемент этого множества, т.е. один из элементов множества A.

После этого можно ввести *определения функции порядковой логики* как функции, аргументы которой $a_1, a_2, \dots, a_n$ взяты из множества A, и которая представляется в виде суперпозиции r-операций над A с различными значениями ранга r.

Пример такой функции – сама r-функция (1). Более сложный пример – функция $y = f^{(2)}[f^{(2)}(a_1, a_2, a_3), f^{(3)}(a_1, a_2, a_3, a_4)]$.

Любая функция порядковой логики $y = f^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ на любом наборе аргументов принимает значение одного из аргументов. Это связанно с тем, что r-операция, суперпозицией которых представляется выражения y, всегда имеет своим результатом одну из переменных, участвующих в операции. Таким образом *область значений* функции f – множество A.

Задать функцию порядковой логики $y = f(a_1, \dots, a_n)$ значений рассмотреть все n! вариантов упорядочения аргументов и указать для каждого варианта аргумент a_i, значение которого принимает функция. Такие задание функции порядковой логики – частной случай первичного задания любой функции БЛ. Поэтому от такого, первичного задания функции порядковой логики можно перейти к её аналитическому представлению с помощью суперпозиции операций БЛ – конъюнкции БЛ и дизъюнкции БЛ. Операция отрицания БЛ здесь не участвует, так как r-операция всегда имеет своим результатом значение одной из переменных, но не её отрицания.

Методика перехода та же, что и для функции БЛ.

Рассмотрим *пример*: функция ПЛ $y = f^{(2)}(a_1, a_2, a_3)$ – медиана – задана таблицей. Найдем аналитическое представление этой функций с помощью БЛ.

Таблица 1

Упорядочение аргументов	Значение функции
$a_1 \le a_2 \le a_3$	a_2 (a_2-среднее значение-медиана)

$a_1 \leq a_3 \leq a_2$	a_3
$a_2 \leq a_1 \leq a_3$	a_1
$a_2 \leq a_3 \leq a_1$	a_3
$a_3 \leq a_1 \leq a_2$	a_1
$a_3 \leq a_2 \leq a_1$	a_2

Согласно таблице функцию можно представить:

$$y = \begin{cases} a_1 \text{ при } a_2 \leq a_1 \leq a_3 \text{ или } a_3 \leq a_1 \leq a_2 \\ a_2 \text{ при } a_1 \leq a_2 \leq a_3 \text{ или } a_3 \leq a_2 \leq a_1 \\ a_3 \text{ при } a_1 \leq a_3 \leq a_2 \text{ или } a_3 \leq a_3 \leq a_1 \end{cases}$$

Объединяя при помощи операции *конъюнкции БЛ* первую строку при втором условии со второй строкой при втором условии, первую строку при первом условии с третьей строкой при втором условии и вторую строку при первом с третьей строкой при первом условии, найдем:

$$y = \begin{cases} a_1a_2 \text{ при } a_1a_2 \geq a_3 (\text{т. е. при } a_1a_2 \geq a_1a_3, a_2a_3) \\ a_1a_3 \text{ при } a_1a_3 \geq a_2 (\text{т. е. при } a_1a_3 \geq a_1a_2, a_2a_3) \\ a_2a_3 \text{ при } a_2a_3 \geq a_1 (\text{т. е. при } a_2a_3 \geq a_1a_2, a_1a_3) \end{cases}$$

Объединяя теперь все три строки в одну с помощью операции *дизъюнкции БЛ*, получим искомое представление

$$y = a_1a_2 \mathrm{V} a_1a_3 \mathrm{V} a_2a_3$$

Из вышесказанного ясно, что функции порядковой логики – это специальный класс функций БЛ. Поэтому логические выражения порядковой логики можно подвергать эквивалентным преобразованиям с целью их приведения к наиболее простому и удобному виду, используя общие законы БЛ. Однако есть и ряд специфических законов порядковой логики.

Это – *закон тавтологии*:

$y = f^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$ (2)

-*переместительный закон:*

$f^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = f^{(r)}(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, (3)

где $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$- перестановка множества аргументов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

-*распределительный закон*:

$f^{(r)}\left[y^{(g1)}(a_1, a_2, \dots, a_n), y^{(g2)}(a_1, \dots, a_n), \dots, y^{(gx)}(a_1, \dots, a_n)\right] = y^{(gr)}(a_1, \dots, a_n)$, (4)

где $g_1 < g_2 < g_3, 1 \leq r \leq p$

Выделим два его частных случая:

$\wedge_{i=1}^{n} f^{(ri)}(a_1, \dots, a_n) = f^{\left(\wedge_{i=1}^{n}(ri)\right)}(a_1, \dots, a_n)$ (5)

$$\bigvee_{i=1}^{n} f^{(ri)}(a_1, \dots, a_n) = f^{\left(\vee_{i=1}^{n}(ri)\right)}(a_1, \dots, a_n)$$

Эти законы позволяют преобразовать исходные представления функций порядковой логики, не обязательно имеющие вид выражений БЛ.

Для выработки умения аналитического представления функций ПЛ, заданной первоначально таблицей, можно предложить курсантам аналогичные задания с другими значениями функции в таблице 1. Для упрощения решения задачи аналитического представления функции ПЛ можно ограничиться функциями ПЛ трех аргументов.

Предложенный нами подход перехода от логики (БЛ) к порядковой логике (ПЛ) основан на использовании обобщения как метода научного исследования при введении основных операций *конъюнкции ПЛ* и *дизъюнкции ПЛ* на основе их обобщения в БЛ.

Список литературы

1. Садовников Н.В. Логико-математические методы в экономике: монография / Н.В. Садовников. – Пенза, 2003. – 147 с.

2. Садовников Н.В. Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования: монография / Н.В. Садовников. – Пенза: ПГТУ, 2005. – 283 с.

3. Садовников Н.В. Экономико-математическое моделирование. Логические методы исследования экономических систем в условиях неопределенности: учебное пособие с грифом УМО / Н.В. Садовников, А.Ф. Зубков. – Пенза: Пензенский технологический институт, 2003. – 148 с.