

**Сапегин Владимир Андреевич**

аспирант

ФГБОУ ВО «Армавирский государственный  
педагогический университет»

г. Армавир, Краснодарский край

Научный руководитель

**Смыковская Татьяна Константиновна**

д-р пед. наук, профессор, профессор

ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный  
социально-педагогический университет»

г. Волгоград, Волгоградская область

DOI 10.31483/r-108116

**РАЗНОУРОВНЕВЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ  
ПО МАТЕМАТИКЕ (НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ:  
«ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ»)**

*Аннотация:* в статье описаны особенности содержания разноуровневой (для трёхуровневых групп) лабораторной работы. Автор показывает требования к содержанию цели и задач лабораторной работы, общим теоретическим сведениям по теме лабораторной работы, технологии выполнения и выводам по выполнению лабораторной работы. Данные составляющие лабораторной работы подобраны и охарактеризованы для темы «Функционально-графический метод решения иррациональных уравнений с параметрами». Обоснован выбор оборудования (программа «GeoGebra» и ее инструменты) для выполнения лабораторной работы. Автор определяет требования к необходимым разноуровневым (для трёхуровневых групп) инструментам программы «GeoGebra».

*Ключевые слова:* разноуровневое обучение, математика, содержание лабораторных работ, оборудование лабораторной работы, задачи с параметрами, иррациональные уравнения.

Лабораторные работы систематически применяют учителя при проведении уроков физики, химии, биологии и информатики. Отмечаем, что ряд учёных (Г.И. Саранцев [9], С.Г. Манвелов [5], В. Гуревича [7] и др.) рассматривают их как средство обучения на уроках математики. В рамках данной статьи мы будем придерживаться того, что «лабораторная работа – это такое средство обучения, при котором учащиеся под руководством учителя и по заранее намеченному плану проделывают опыты или выполняют определенные практические задания и в процессе их воспринимают и осмысливают новый учебный материал, закрепляют полученные ранее знания». Анализ педагогической практики образовательных организаций РФ [1, 10] показал, что наиболее часто на уроках математики используют следующие виды лабораторных работ: 1) на конструирование; 2) на вычисления; 3) на построения и др.

Определим требование к их содержанию для обучающихся трёхуровневых групп (А, Б, В), сформированных в соответствии с их математической подготовкой. Отмечаем, что обучающиеся распределены в уровневые группы в соответствии: 1) с владением методами решения задач с параметрами; 2) со скоростью восприятия информации, представленной в символическом виде; 3) с особенностями восприятия информации, представленной в графическом виде; 4) с готовностью воспринимать информацию, представленную в текстовом виде [8].

Ф.А. Орехов [6] выделяет следующие составляющие лабораторных работ по математике: 1) цель и задачи лабораторной работы; 2) оборудование для её выполнения; 3) общие теоретические сведения по теме лабораторной работы; 4) технология выполнения и выводы по выполнению лабораторной работы. Экспериментальным путем нами были выделены требования к указанным выше составляющим. На основании этого и с учетом особенностей учащихся, отнесенных к определенной уровневой группе, составлены их характеристики. Далее разработаны разноуровневые лабораторные работы по теме «Иррациональные уравнения с параметрами».

Приведем пример по теме «Решение иррациональных уравнений ( $\sqrt{f(x)} = g(a)$ ,  $\sqrt{f(x)} = g(x, a)$ ,  $\sqrt{f(x, a)} = g(x)$ ,  $\sqrt{f(x, a)} = g(x, a)$ )» функционально-графическим методом» (см. табл. 1).

Таблица 1

## Содержание цели и задач лабораторной работы

Уровневая группа А	
Цель	изучение специфики функционально-графического метода при решении иррациональных уравнений с параметрами определенного типа
Задачи	– изучение теоретического материала (понятия и их определение, теоремы); – рассмотрение типовых функций ( $y = \sqrt{g(x)}$ , $y = \sqrt{g(x, a)}$ ) и построение их графиков; – решение типовых иррациональных уравнений $\sqrt{f(x)} = g(a)$ , $\sqrt{f(x)} = g(x, a)$ , $\sqrt{f(x, a)} = g(x)$ , $\sqrt{f(x, a)} = g(x, a)$ , сопровождающихся графической интерпретацией
Уровневая группа Б	
Цель	изучение специфики функционально-графического метода при решении иррациональных уравнений с параметрами
Задачи	– изучение теоретического материала (понятия и их определение, теоремы); – изучение предложенного доказательства теоремы; – исследование типовых функций ( $y = \sqrt{g(x)}$ , $y = \sqrt{g(x, a)}$ ) и построение их графиков; – решение типовых иррациональных уравнений $\sqrt{f(x)} = g(a)$ , $\sqrt{f(x)} = g(x, a)$ , $\sqrt{f(x, a)} = g(x)$ , $\sqrt{f(x, a)} = g(x, a)$
Уровневая группа В	
Цель	изучение возможностей функционально-графического метода при решении иррациональных уравнений с параметрами, а также конструировании задач для решения функционально-графическим методом решения
Задачи	– изучение теоретического материала (понятия и их определение, теоремы); – рассмотрение функций, содержащих иррациональные выражения, построение их графиков, исследование в соответствии с изменяющимися параметрами (коэффициентами при переменных); – решение типовых иррациональных уравнений $\sqrt{f(x)} = g(a)$ , $\sqrt{f(x)} = g(x, a)$ , $\sqrt{f(x, a)} = g(x)$ , $\sqrt{f(x, a)} = g(x, a)$ ; – решение смешанных уравнений, содержащих иррациональные выражения (в том числе $\sqrt{f(x, a)} = b^x$ , где $b^x$ – показательное выражение и т. д.)

Анализ образовательной практики общеобразовательных организаций РФ [2–4] показал, что при проведении лабораторных работ по математике используются инструменты программы «GeoGebra». Отметим, что для проведения лабораторной работы применяем оборудование (программа «GeoGebra» или программа «Desmos»; инструменты предложенных программ (точки, прямые и др.)).

При выполнении лабораторной работы обучающиеся используют различные инструменты программы «GeoGebra» (см. табл. 2).

Таблица 2

## Инструменты программы «GeoGebra» для трёх уровней групп

Инструмент	Как используется обучающимися	Уровневая группа		
		А	Б	В
Перемещение	При решении всех задач для перемещения графиков функций	+	+	+
Точка	При решении всех задач для отметки пересечения графиков функций	+	+	+
Прямая	При решении задач определенного типа, в которых иррациональные уравнения с параметрами содержат следующие зависимости: $ax$ , $ax + a$ , $ax + b$ , $ax + a + b$ , $a$	+	+	+
Отрезок	При решении задач определенного типа, в которых есть ограничения на зависимости: $ax$ , $ax + a$ , $ax + b$ , $ax + a + b$ , $a$	-	+	+
Луч	При решении задач определенного типа, в которых есть ограничения на зависимости: $ax$ , $ax + a$ , $ax + b$ , $ax + a + b$ , $a$	-	+	+
Пересечение	При решении всех задач для нахождения пересечения	+	+	+
Окружность по центру и точке	При решении задач, в которых записаны следующие выражения $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ или приводимые к ним	-	+	+
Полуокружность по двум точкам	При решении задач, в которых записаны выражения: $\sqrt{f(x)}$ , $\sqrt{f(x, a)}$ . Подкоренное выражение представлено квадратичным выражением с отрицательным коэффициентом при старшей степени	-	-	+
Гипербола	При решении задач определенного типа, в которых иррациональные уравнения с параметрами содержат следующие зависимости: $\frac{a}{x}$ , $\frac{a}{x} + a$ , $\frac{a}{x} + b$ , $\frac{a}{x} + a + b$	-	+	+
Парабола	При решении задач определенного типа, в которых иррациональные уравнения с параметрами содержат следующие зависимости: $ax^2$ , $ax^2 + a$ , $ax^2 + bx$ , $ax^2 + ax$ , $ax^2 + bx + c$ , $ax^2 + c$	+	+	+
Ползунок параметра	При решении всех задач для определения значений параметра	+	+	+

Нами было установлено, что для каждой уровневой группы предложены функции одного типа и их графики, а отличия заключаются в содержании графической иллюстрации функции.

На рисунке 1 представлена графическая интерпретация функций, необходимых для решения задач с параметрами, для трёхуровневых групп.

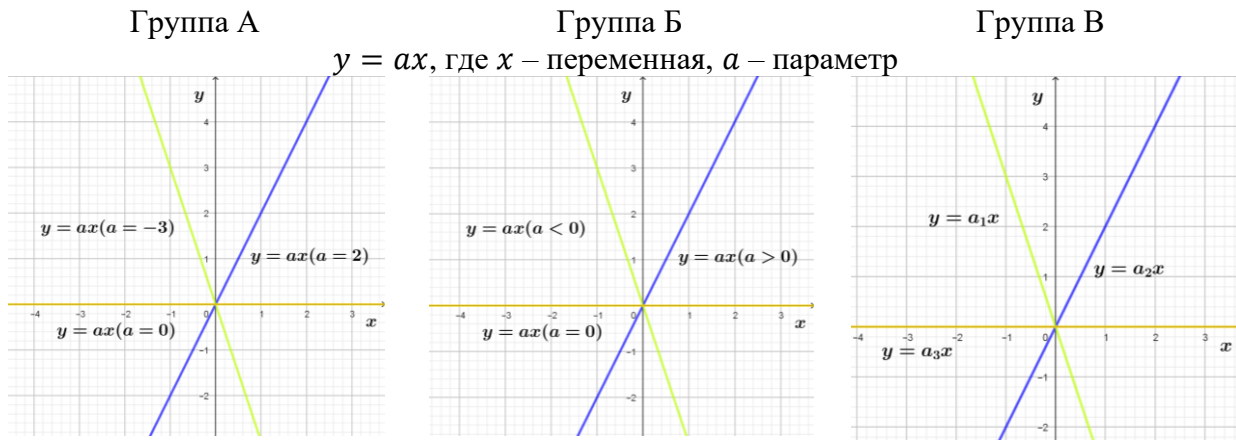


Рис. 1. Функции и их графики для уровней групп

В таблице 3 представлено содержание теоретических сведений (метод решения, область определения функции, область значения функции, свойства монотонности функции, свойства чётности и нечётности функции, свойства периодичности функции) для уровневой группы В по теме «Функционально-графический метод решения иррационального уравнения типа  $\sqrt{f(x)} = g(x, a)$ » для уровневой группы А

Таблица 3

Теоретические сведения (фрагмент) по теме  
«Функционально-графический метод решения иррационального  
уравнения типа  $\sqrt{f(x)} = g(x, a)$ » для уровневой группы В

Теоретические сведения	Содержание
Функционально-графический метод решения уравнений	Функционально-графический метод решения уравнений – это метод, основанный на применении свойств функций и их графической иллюстрации
Область определения функции	Если задана функция $f$ , которая отображает множество $X$ в $Y$ , то есть: $f: X \rightarrow Y$ , то множество $X$ называется областью определения функции $f$ и обозначается $D(f)$
Свойства ограниченности функций	Функция $f$ , заданная на множестве $X$ , называется ограниченной сверху (снизу) на этом множестве, если существует такое число $M$ , что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$ ( $f(x) \geq M$ ): $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in X (f(x) \leq M (f(x) \geq M))$

Таким образом, для трёх уровней групп представлены единые теоретические сведения, отличающиеся их содержанием. Для группы А предложена словесная формулировка определений, для группы Б предложена словесная формулировка определений, содержащая минимальное количество математических символов, для группы В предложена символьная формулировка определения, имеющая строгую математическую запись. Экспериментальным путём нами было установлено, что технология выполнения лабораторной работы для уровней групп имеют свои отличительные особенности. Опросы учителей математики и выпускников 2021–2023 гг. школ Кавказского района (Краснодарский край) показали, что проведение лабораторных работ эффективно, если используются разноуровневые инструктивные материалы для обучающихся. В таблице 4 приведено содержание хода выполнения лабораторной работы для уровней групп.

Таблица 4

## Содержание хода выполнения лабораторной работы для уровней групп

Уровневая группа А	
Наличие поэтапной инструкции по выполнению	– лабораторной работы (цель и задачи); – задания лабораторной работы (прочтите внимательно условие задания для решения функционально-графическим способом; постройте графики функций правой и левой части уравнения с параметрами, используя теоретическую сводку; и т. п.); – выводов (как изменяется график функции при подстановке определенных значений параметра; в чём ключевая идея решения задач с параметрами функционально-графическим способом). Каждый вывод сопровождается комментарием
Уровневая группа Б	
Наличие	– краткого плана по выполнению лабораторной работы (цели и задачи); – наводящих вопросов по выполнению заданий (каким методом необходимо решать иррациональное уравнение с параметром; что необходимо для решения уравнения функционально-графическим методом и т. д.); – этапа по написанию вывода, содержащего вопросы для его оформления
Уровневая группа В	
Наличие	– схемы по выполнению лабораторной работы; – заданий на конструирование иррациональных уравнений с параметрами, которые необходимо решать функционально-графическим способом; – вопросов исследовательского характера к написанию выводов и выполнению заданий (какой метод решения задачи с параметрами наиболее эффективен; предложите схему по решению задачи с параметрами и т. д.)

Таким образом, экспериментальным путем было установлены требования к содержанию плана по выполнению лабораторной работы, заданий к предметным задачам и выводам.

Приведем фрагмент организации лабораторной работы для уровневой группы Б.

Решите уравнение  $\sqrt{x-1} = ax + a + 1$ .

Для выполнения данного задания используются плакаты функций и их графики (для обучающихся предложены различные функции и их графики для решения предложенного уравнения, необходимо самостоятельно выбрать необходимые функции и их графики), а также оборудование приложения «GeoGebra»: точка, прямая, перемещение, пересечение, ползунок значения параметра  $a$ .

Приведем несколько вопросов для обучающихся группы Б.

1. Какой метод решения необходимо использовать при решении уравнения?
2. Возможно, ли построить графики функций левой и правой частей уравнения? Если возможно то, что за графики получатся?
3. Сколько вариантов графиков функций  $y = ax + a + 1$  возможно построить?
4. От чего зависит количество графиков функций  $y = ax + a + 1$ ?
5. При построении графиков функций  $y = ax + a + 1$  и  $y = \sqrt{x-1}$  возможны случаи пересечения? В скольких точках?
6. При каких значениях параметра  $a$  графики функций пересекаются?

Для приведенных составляющих лабораторной работы (цели и задач лабораторной работы, общих теоретических сведений, технологии выполнения и выводам по выполнению лабораторной работы) нами были определены требования к содержанию. Отмечаем, что цели и задачи лабораторной работы для уровневых групп представлены в соответствии с различной технологией выполнения каждой группой. Для общих теоретических сведений требуется учитывать символную и знаковую запись текстового материала, а также наличие эскизов графиков функций и их составляющих. При описании технологии выполнения работы и написании выводов принимаем во внимание присутствие поэтапного плана (схемы) для

уровневых групп. Отмечаем, что оборудованием для выполнения лабораторной работы являются инструменты приложения «GeoGebra».

Таким образом, лабораторная работа является средством разноуровневого обучения старшеклассников решению иррациональных уравнений с параметрами. Нами обоснованы требования к ее содержанию.

### ***Список литературы***

1. Аксенова О.В. Лабораторные работы по математике как инструмент формирования и контроля функциональной математической грамотности обучающихся / О.В. Аксенова, В.Ю. Бодряков, А.Е. Миронова // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. – 2021. – №6. – С. 118–129. EDN PFQFRO

2. Бодряков В.Ю., Цифровые лабораторные работы по математике как современный инструмент формирования обучающегося-исследователя / В.Ю. Бодряков, А.А. Быков // Педагогическое образование в России. – 2022. – №3. – С. 148–159. EDN WJLXUU

3. Занько Н.В. Лабораторные работы по алгебре в 7 классе с использованием в качестве инструментария анимационных рисунков / Н.В. Занько, А.А. Лариончикова // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IX Всерос. с междунар. участием науч.-методич. конф. – Красноярск: Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева. – 2020. – С. 111–116. EDN BPNHDE

4. Лариончикова А.А. Платформа Geogebra classroom как способ организации лабораторных работ на уроках математики / А.А. Лариончикова // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы XI Всерос. с междунар. участием науч.-методич. конф., посвященной 90-летию КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск: Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева. – 2022. – С. 167–170. EDN RUYILA

5. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики / С.Г. Манвелов. – М.: Просвещение, 2005. – 175 с. EDN QUBKUH



6. Орехов Ф.А. Графические лабораторные работы по геометрии в восьмилетней школе как средство эффективного процесса учения детей: дис. ... канд. пед. наук. – Магнитогорск, 1964. – 225 с.
7. Практическое руководство по математике. С задачами и темами для лабораторных работ: учеб. пособие: Ч. 1/ под ред. В. Гуревича, В. Минорского. – М.: Работник просвещения, 1929. – 312 с.
8. Сапегин В.А. Разноуровневые тестовые задания по теме «Иррациональные уравнения с параметрами» / В.А. Сапегин, Т.К. Смыковская // Обзор педагогических исследований. – 2023. – Т. 5. №6. – С. 152–157. EDN MFUXDS
9. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
10. Тажгалиева А.А. Лабораторные работы в обучении математике в условиях реализации ФГОС ООО / А.А. Тажгалиева, Г.З. Умбетова // Теоретический и практический потенциал современной науки: сб. науч. ст.: Ч.1. –Перо, 2018. – С. 65–68. – EDN СТQВАН