Мусайбеков Рашид Кабдулкалимович
магистр, преподаватель-лектор
Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова
г. Кокшетау, Республика Казахстан
Мубараков Акан Мукашевич
д-р пед. наук, профессор
РГП на ПХВ «Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева»
г. Кокшетау, Республика Казахстан
Сулейменов Кенесары Машимович
канд. физ.-мат. наук
РГП на ПХВ «Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева»
г. Кокшетау, Республика Казахстан

DOI 10.31483/r-110338

О ПРИМЕНЕНИИ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

***Аннотация**: при решении тригонометрических выражений, тригонометрических уравнений, геометрических задач необходимы упрощения, их тождественные преобразования. Во введении статьи сказано об определенных приемах, облегчающих работу. Далее приведены преобразования тригонометрических выражений в алгебраическом тождестве, в геометрической задаче, в тригонометрических выражениях, при решении тригонометрического уравнения применением универсальной тригонометрической подстановки. Каждое высказывание опирается на некоторые источники, и они приведены в статье. Указаны отдельные приемы, облегчающие работу при преобразовании тождественных выражений, при решении тригономентрических уравнений. Приведены два чертежа.*

***Ключевые слова**: тождественные преобразования, тригонометрические выражения, алгебраическое тождество, геометрическая задача, тригонометрическое уравнение универсальная тригонометрическая подстановка.*

Введение. Выполняя тождественные преобразования в тригонометрических выражениях, мы должны использовать определенные приемы, которые облегчают работу. Это такие действия, как:

– перенос слагаемых из одной части выражения в другую (прибавление или же вычитание одинаковых слагаемых),

– умножение или деление на одно и тоже выражение (величину), отличное от нуля, а также выполнение таких действий как:

– использование формул сокращенного умножения,

– вынесение общего множителя за скобки,

– выделение полного квадрата,

– разложение на множители квадратного трехчлена (знание нахождения дискриминанта и корней квадратного уравнения),

– введение новой переменной.

Все эти действия необходимы для упрощения применяемых тригонометрических выражений. Необходимый материал можно найти в следующих источниках [1, 9, 19].

Анализ современных публикаций.

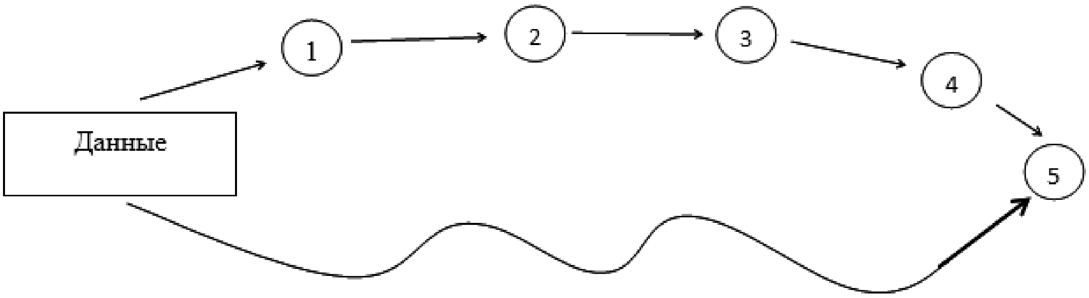
1. Преобразование тригонометрических выражений в алгебраическом тождестве.

1. Доказать тождество: $sin^6\alpha + cos^6\alpha + 3sin^2\alpha cos^2\alpha = 1$

Доказательство:

$$sin^6\alpha + cos^6\alpha + 3sin^2\alpha cos^2\alpha(1)=(sin^2\alpha)^3 + (cos^2\alpha)^3+3sin^2\alpha cos^2\alpha(2)=(sin^2\alpha + cos^2\alpha)(sin^4\alpha - sin^2\alpha cos^2\alpha + cos^4\alpha)+ 3sin^2\alpha cos^2\alpha(3)=sin^4\alpha - sin^2\alpha cos^2\alpha + cos^4\alpha + 3sin^2\alpha cos^2\alpha=sin^4\alpha + 2sin^2\alpha cos^2\alpha + cos^4\alpha(4)=(sin^2\alpha + cos^2\alpha)^2(5) = 1;\ 1=1$$

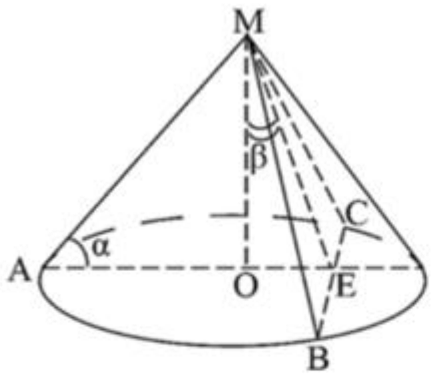
На основе доказанного тождества можно составить схему:



В данной схеме линия (1) →(2) →(3) →(4) →(5) указывает конечную цель, а жирная стрелка, замыкающая цепь, означает достижение этой цели [11, 14, 17, 7, 3].

2. Преобразование тригонометрических выражений в геометрической задаче.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основанияпод углом α. В этом конусе проведена плоскость черезего вершину под углом β к его высоте. Определить площадь полученного сечения [13, 16, 2, 4, 18, 20].



Дано: конус, OA=R

$$\angle MAO = \alpha, \angle OME = \beta$$

$$S_{MBC} - ?$$

Решение:

$S_{MBC} = \frac{1}{2} BC * ME, \Delta MBC -$ равнобедренный, т.к. MB=MC (образующие конуса).

Из $\varDelta MOE$: $\cos\beta = \frac{MO}{ME} \Rightarrow ME = \frac{MO}{\cos\beta}$ (1). Из $\varDelta MOA$: $tg\alpha = \frac{MO}{AO} \Rightarrow MO = AO * tg\alpha$ (2). Значение MO из (2) подставим в (1): $ME = \frac{AO*tg\alpha}{\cos\beta}$ (3)

Рассмотрим $\varDelta MOA$: $cos\ \alpha = \frac{AO}{MA} \Rightarrow MA = \frac{AO}{cos\ \alpha} = \frac{R}{cos\ \alpha}$; $MA = MB = \frac{R}{cos\ \alpha}$(4)

Из $\varDelta MBE$: $BE = \sqrt{MB^2 - ME^2} = \sqrt{\frac{R^2}{cos^2\alpha} - \frac{R^2*tg^2\alpha}{cos^2\beta}} = \sqrt{\frac{R^2cos^2\beta - R^2*tg^2\alpha*cos^2\alpha}{cos^2\alpha*cos^2\beta}} =$

$$= \frac{R}{cos\ \alpha * \cos\beta}\sqrt{cos^2\beta - sin^2\alpha}$$

$$cos^2\beta = \frac{1 + cos2\beta}{2};\ sin^2\alpha = \frac{1 - sin2\alpha}{2}$$

$$\sqrt{cos^2\beta - sin^2\alpha} = \sqrt{2cos\frac{2\beta+2\alpha}{2} * cos\frac{2\beta-2\alpha}{2}} = \sqrt{\cos(\beta+\alpha) * cos(\beta-\alpha)}$$

$$BE = \frac{R}{cos\ \alpha * \cos\beta} * \sqrt{\cos(\beta+\alpha) * cos(\beta-\alpha)}$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} * \frac{2R * \sqrt{\cos(\beta+\alpha) * cos(\beta-\alpha)} * Rtg\alpha}{cos\ \alpha * \cos\beta * cos\beta} =$$

$$= \frac{R^2tg\alpha\sqrt{\cos(\beta+\alpha) * cos(\beta-\alpha)}}{cos\ \alpha * cos^2\beta} =$$

$$= \frac{R^2tg\alpha\sqrt{\cos(\beta+\alpha) * cos(\beta-\alpha)}}{cos\ \alpha * cos^2\beta}$$

Ответ: $\frac{R^2tg\alpha\sqrt{\cos(\beta+\alpha)*cos(\beta-\alpha)}}{cos\ \alpha*cos^2\beta}$

3. Тождественные преобразования в тригонометрических выражениях.

Вычислить:

$$tg9^\circ - tg63^\circ + tg81^\circ - tg27^\circ = (tg9^\circ + ctg9^\circ) - (tg63^\circ + ctg63^\circ) =$$

$$\left(\frac{sin9^\circ}{cos9^\circ} + \frac{cos9^\circ}{sin9^\circ}\right) - \left(\frac{sin63^\circ}{cos63^\circ} + \frac{cos63^\circ}{sin63^\circ}\right) = \frac{sin^29^\circ + cos^29^\circ}{cos9^\circ \cdot sin9^\circ} - \frac{sin^263^\circ + cos^263^\circ}{sin63^\circ \cdot cos63^\circ} = \frac{2\cdot 1}{2cos9^\circ \cdot sin9^\circ} -$$

$$\frac{2\cdot 1}{2sin63^\circ \cdot cos63^\circ} = \frac{2}{sin18^\circ} - \frac{2}{sin126^\circ} = \frac{2(sin126^\circ - sin18^\circ)}{sin18^\circ \cdot sin126^\circ} = \frac{2\cdot 2sin54^\circ \cdot co72^\circ}{sin18^\circ \cdot sin126^\circ} =$$

$$\frac{4\sin(180^\circ - 126^\circ)\cdot\cos(90^\circ - 18^\circ)}{sin18^\circ \cdot sin126^\circ} = \frac{4sin126^\circ \cdot sin18^\circ}{sin18^\circ \cdot sin126^\circ} = 4$$

Ответ: 4 [8].

4. Тождественные преобразования при решении тригонометрического уравнения применением универсальной тригонометрической подстановки.

Хорошие тождественные преобразования можно выполнить, решая тригонометрическое уравнение, применением универсальной тригонометрической подстановки.

Уравнение вида $asinx + bcosx = c$ решается применением универсальной подстановки $tg\frac{x}{2} = t$, тогда $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$; $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Делая такую подстановку, т.е. $tg\frac{x}{2} = t$, считаем, что $cos\frac{x}{2} \neq 0$, т.е. $x \neq \pi + 2\pi n, n\epsilon Z$.

Решить уравнение: $sinx + \sqrt{3}cosx = 2$

Решение:

Сделаем замену $tg\frac{x}{2} = t$, тогда $\frac{2t}{1+t^2}$+$\frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2}$ =2, т.е. $(\sqrt{3} + 2)\, t^2 - 2\, t - (\sqrt{3} - 2) = 0$, $D_1 = 0, t = \frac{1\cdot(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = 2 - \sqrt{3} = tg15^{\circ}$

$$tg15^{\circ} = tg(45^{\circ} - 30^{\circ}) = \frac{tg45^{\circ} - tg30^{\circ}}{1 + tg45^{\circ}\cdot tg30^{\circ}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} = 2 - \sqrt{3} = tg\frac{x}{2}$$

$$tg\frac{x}{2} = tg15^{\circ} \Rightarrow \frac{x}{2} = arctg(tg15^{\circ}) + \pi n, n\epsilon Z$$

$$\frac{x}{2} = arctg(tg15^{\circ}) + 180^{\circ}n, n\epsilon Z$$

$$\frac{x}{2} = 15^{\circ} + 180^{\circ}n, n\epsilon Z \Rightarrow x = 30^{\circ} + 360^{\circ}n, n\epsilon Z$$

Ответ: $30^{\circ} + 360^{\circ}n, n\epsilon Z$ $30^{\circ} + 360^{\circ}n, n\epsilon Z$ [12, 6, 10, 5, 15].

Выводы. Итак, выполнение тождественных выражений необходимо в тригонометрических выражениях, при решении стереометрических задач, тригонометрических уравнений при применении универсальной подстановки. Эти преобразования способствуют выработке у учащихся таких качеств как:

– повышение интереса к изучаемой теме;

– гибкость мышления;

– находчивость;

– настойчивость к достижению определенных результатов;

– умение связывать теоретический материал с практическим.

Список литературы

1. Абылкасымова А.Е. Алгебра: учебник для 9 кл. общеобразоват. шк. / А.Е. Абылкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский [и др.]. – Ч. 2. – Алматы, Мектеп, 2019. – 152 с.

2. Асмолов А.Г. Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе: от действия к мысли: пособие для учителя / А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, Н.А. Володарская [и др.]; под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2008. – EDN QWLCBR

3. Болтянский В.Г. Как учить поиску решения задач / В.Г. Болтянский, Я.И. Груденов // Математика в школе. – 1988. – №1.

4. Гайнуллина Р.А. Формирование универсальных учебных действий и компетенций как условие достижения стандартов в общеобразовательном процессе / Р.А. Гайнуллина, Г.А. Ишпаева, Е.В. Савинова [и др.] [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/599535/ (дата обращения: 22.09.2012).

5. Гольштейн З.М. Сборник задач по математике для подготовительных курсов ТУСУР: учебное пособие / З.М. Гольштейн, Г.А. Корниевская, Г.А. Коротченко [и др.]. – Томск: Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1998. – 190 с.

6. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. для учителя / Я.И. Груденов. – М: Просвещение, 1990. – 224 с.

7. Кожабаев К.Г. Теория и методика воспитательно-развивающего обучения математике в школе: монография / К.Г. Кожабаев. – Кокшетау, 2004. – 210 с. – EDN QUIHXP

8. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике / Е.Д. Куланин, В.П. Норин, С.Н. Федин [и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Рольф, Айрис-пресс, 1988. – 624 с.

9. Макарычев Ю.Н. Алгебра, 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубленный уровень / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков [и др.]. – М.: Просвещение, 2018. – 400 с.

10. Махров В.Г. О некоторых видах уравнений с дополнительными условиями / В.Г. Махров // Математика в школе. – 1995. – №2.

11. Мусайбеков Р. Некоторые приемы развития мышления учащихся / Р. Мусайбеков // Ұлт тағылымы. – 2008. – №2.

12. Мусайбеков Р.К. Использование многоуровневых заданий при изучении темы «Тригонометрические уравнения» / Р.К. Мусайбеков // Валихановские чтения–9: сборник материалов международной научно-практической конференции. – Кокшетау, 2004. – 310 с.

13. Мусайбеков Р.К. Из опыта применения универсальных учебных действий на уроке / Р.К. Мусайбеков // Интерактивная наука. – 2016. – №10. – DOI 10.21661/r-114852. – EDN XDELAX

14. Оганесян В.А. Методика преподавания математики в средней школе / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканин [и др.] – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

15. Письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис, 1996. – 256 с.

16. Погорелов А.В. Геометрия: учеб. для 7–11 кл. сред. шк. / А.В. Погорелов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.

17. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

18. Сериков В.В. Личностно ориентированное образование: феномен, концепция, технологии: монография / отв. ред. В.В. Сериков. – Волгоград, 2000.

19. Солтан Г.Н. Алгебра: учебник для 9 класса общеобразовательной школы+СД / Г.Н. Солтан, А.Е. Солтан, А.Ж. Жумадилова. – Кщкшетау: Келешек–2030, 2019. – 320 с.

20. Деятельность учителя по формированию учебных универсальных действий [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ir-zhi.ru/teachers/fgos-noo/uud (дата обращения: 12.04.2012).