

DOI 10.31483/r-112218

Сапегин Владимир Андреевич

К ВОПРОСУ О РАЗНОУРОВНЕВЫХ УЧЕБНЫХ ЗАДАНИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ИНЖЕНЕРНО- МАТЕМАТИЧЕСКОГО КЛАССА

Аннотация: в главе рассмотрены разноуровневые учебные задания по математике для инженерно-математического класса. Выделены и обоснованы требования к математическим вопросам, математическим диктантам, математическим упражнениям и учебным заданиям для обучающихся трех уровней групп (предложенных автором). Приведены учебные задания по теме «Иррациональные уравнения с параметрами» в соответствии с представленными требованиями.

Ключевые слова: разноуровневые учебные задания, разноуровневые учебные упражнения, разноуровневые вопросы, разноуровневые математические диктанты, задачи с параметрами, уровневые группы, инженерно-математический класс.

Abstract: the chapter discusses multi-level math assignments for an engineering and mathematics class. The requirements for mathematical questions, mathematical dictation, mathematical exercises and educational tasks for students of three level groups (proposed by the author) are highlighted and justified. The training tasks on the topic «Irrational equations with parameters» are given in accordance with the presented requirements.

Keywords: multi-level learning tasks, multi-level learning exercises, multi-level questions, multi-level mathematical dictation, tasks with parameters, level groups, engineering and mathematics class.

В настоящее время актуализировалась проблема организации обучения математике в инженерно-математическом классе в связи с тем, что государство поставило запрос на увеличение специалистов в технической специальности. В соответствии с этим происходят изменения в содержании учебного предмета

«Математика» адаптированного для работы в инженерно-математическом классе, а также создаются наиболее оптимальные условия для формирования математического аппарата старшеклассников, планирующих продолжить обучение в технических вузах. В соответствии с положениями федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (ФГОС СОО) [15], анализом образовательной практики лицеев, гимназий, школ востребованным является инженерно-математический класс.

В связи с вышесказанным целесообразно разрабатывать учебные задания для обучения математике старшеклассников. В психолого-педагогических исследованиях нет однозначного определения и различения понятий «учебное задание» и «учебная задача» [14].

Так, в работах С.Л. Рубинштейна акцентируется внимание на «учебном задании». Автор раскрывает понятие «задание», обосновав его особенности (мотив, цель, условия, субъект и объект) [11]. С.Л. Рубинштейн отмечает, что «учебное задание» является средством обучения.

Иная позиция у А.Н. Леонтьева, который утверждает, что «задание – это поставленная цель на основе определенных условий» [7]. Автор характеризует понятие, обозначая особенности учебного задания на основе «потребности», «мотива» и «деятельности».

Анализируя исследование О.Р. Розикова, было установлено, что «учебные задания» рассматриваются в связи с учебным материалом. По мнению автора, учебное задание – это «измененная форма учебного материала, которая зависит от целей обучения» [10].

Также Г.А. Балл [2] акцентирует внимание на определении понятия «учебная задача». Анализируя психолого-педагогические исследования по методике обучения математике, было установлено, что многие ученые (Ю.М. Колягин, Л.М. Фридман, В.А. Далингер, Г.М. Серегин, А.А. Аксенов и др.) рассматривают задачу, как систему. Отметим, что нет единого мнения по определению понятий «учебная задача», «учебное задание», «учебное упражнение», которые используются при обучении математике. Г.А. Саранцев акцентирует внимание

на том, что «отождествление упражнения и задачи вызывает сомнение в целесообразности двух различных терминов для обозначения одного понятия» [13]. В рамках данной статьи мы будем придерживаться позиции Т.А. Бабаковой, которая считает, что учебные задания – «форма предъявления требований к результатам обучения» [1].

Ретроспективный анализ исследований Ю.М. Колягина, Г.А. Саранцева, В.А. Далингера и др., позволил нам установить, что существуют основные виды учебных заданий: вопрос, упражнение, задача, практическое задание, программированное задание и др.

Учитывая требования ФГОС СОО, мы установили, что существуют следующие виды учебных заданий: на формирование предметных и метапредметных учебных действий, а также функциональной грамотности.

В настоящее время широко используется дифференциация при обучении математике в инженерно-математическом классе в связи с невозможностью сформировать группы с однородной математической подготовкой обучающихся. Мы считаем, что целесообразно разрабатывать учебные задания «в соответствии с особенностями учащихся, отнесенных к определенной уровневой группе в соответствии: 1) с владением методами решения задач; 2) со скоростью восприятия информации, представленной в символическом виде; 3) с особенностями восприятия информации, представленной в графическом виде; 4) с готовностью воспринимать информацию, представленную в текстовом виде» [12]. Таким образом, в рамках данной статьи мы придерживаемся того, что учебное задание – это измененная форма учебного материала, которая зависит от целей обучения в уровнях групп.

Экспериментальным путем нами было установлено, что одна из целей изучения математики в инженерно-математическом классе является математическая подготовка на определенном уровне. Отметим, что мы выделяем три уровня группы инженерно-математического класса: Группа А (обучающиеся, имеющие базовые требования к математической подготовке для решения задач), группа Б (обучающиеся, стремящиеся продолжить обучение в техниче-

ских и экономических вузах, для них необходимы повышенные требования к математической подготовке для решения задач), группа В (обучающиеся, стремящиеся продолжить обучение в вузах, в которых предъявляются высокие требования к математической подготовке абитуриентов).

Рассмотрим особенности учебных заданий для трех уровней групп. Отметим, что вопросы, как одни из видов учебных заданий систематически используются на уроках математики. Вопрос – «задание, сформулированное в вопросительной форме, не содержащее информации для ответа» [1]. В частности, при изучении новой темы целесообразна постановка проблемной ситуации, которая решается ответом на множество вопросов для определения темы урока. В последующем, при рассмотрении темы целесообразно использовать вопросы для определения первоначального уровня усвоения предметного содержания у обучающихся. Контроль по освоению предметного содержания осуществляется по карточкам с вопросами.

Экспериментальным путем нами были установлены требования к составлению вопросов для трех уровней групп (табл. 1).

Таблица 1

Требования к составлению вопросов для трех уровней групп

Требование	Уровневая группа		
	А	Б	В
В формулировке вопроса минимальное количество понятий	+	-	-
В формулировке вопроса минимальное количество слов и символов	+	-	-
Вопрос актуален в рамках изучения нового материала	+	-	-
Вопрос выстраивается таким образом, чтобы ответ состоял из минимального количества слов и символов	+	+	-
В формулировке вопроса используются математические понятия	-	+	+
Вопрос состоит из слов и символов	-	+	-
Вопрос актуален в рамках изучения нового материала, а также ранее изученного	-	+	-
Вопрос выстраивается таким образом, чтобы ответ состоял не только из минимального количества слов и символов, но и целого предложения	-	+	-
Вопрос актуален в рамках изучения нового материала, ранее изученного, а также будущих тем для изучения	-	-	+
Вопрос выстраивается таким образом, чтобы ответ состоял не только из целого предложения, но и были приведены рассуждения	-	-	+

Приведем фрагмент карточки с вопросами учителя для изучения темы «Иррациональные уравнения с параметрами»: для трех уровней групп (рис. 1).

<p><i>Вопросы для группы А</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Что является множеством значений переменной, при которых обе части данного уравнения имеют смысл? 2. При решении иррациональных уравнений могут ли получиться сторонние корни? 3. Какие числа называются иррациональными?
<p><i>Вопросы для группы Б</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Какие выражения называются иррациональными? 2. Какие уравнения называются иррациональными? 3. Возможно, ли представить иррациональные числа в виде дроби? 4. Какие методы решения иррациональных уравнений вы знаете? 5. Возможно, ли при решении иррационального уравнения получить пустое множество? Если, да, то приведите примеры.
<p><i>Вопросы для группы В</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Какой график получится, если функция содержит корень в второй степени, а подкоренное выражение представлено суммой квадратов переменной и числа? 2. Существуют ли неравносильные преобразования для решения иррациональных уравнений? 3. Какую область определения имеют выражения $\sqrt{(x-2)^2}$, $\sqrt{x^2-4}$, $\sqrt{2x-5}$.

Рис. 1. Фрагмент карточки с вопросами учителя для изучения темы «Иррациональные уравнения с параметрами»: для трех уровней групп

Наряду с вопросами, как показывает практика, применимы и математические диктанты. Под математическим диктантом будем понимать короткую письменную самостоятельную работу, состоящую из связанных между собой вопросов, во время которой обучающиеся воспринимают задание на слух (полностью или частично), решают его или записывают только ответ. Данный вид учебного задания позволяет сформировать у обучающихся умения воспринимать информацию на слух, запоминать ее, обрабатывать и преобразовывать.

Экспериментальным путем нами выявлены требования к содержанию математического диктанта, содержащего вопросы на проверку: усвоения основных понятий и определений, сформированности умения выполнять графическую интерпретацию задачи, этапов алгоритма решения задачи (табл.2).

Таблица 2

*Требования к содержанию математического диктанта
для трех уровней групп*

Вопросы на проверку	Требования к вопросам	Уровневая группа		
		А	Б	В
усвоения основных понятий и определений	Приведенному определению необходимо записать понятие	+	-	-
	Из приведенного набора понятий исключить лишнее	+	-	-
	В определении понятия необходимо вставить пропущенные слова	-	+	-
	Из приведенного набора понятий исключить лишнее и дать определение	-	+	-
	Для приведенного понятия необходимо записать определение	-	-	+
	Из приведенного набора определений исключить лишнее и дать соответствующее понятие	-	-	+
умения выполнять графическую интерпретацию задачи	Для формулы уравнения необходимо записать название графиков функций, необходимых для решения	+	-	-
	Под заданное уравнение (частный случай) необходимо изобразить произвольные графики уравнений, необходимых для решения этого уравнения или ему подобного	+	-	-
	Для формулы уравнения необходимо записать название графиков уравнений и их формулы (общий вид), необходимых для решения	-	+	-
	Для заданного уравнения необходимо изобразить графики уравнений, необходимых для решения данного уравнения	-	+	-
	Для формулы уравнения (общий вид) необходимо записать название всевозможных графиков уравнений и их формулы (общий вид), необходимых для решения заданного уравнения	-	-	+
	Для заданного в общем виде уравнения необходимо изобразить возможные графики уравнений, необходимых для решения заданного уравнения	-	-	+
	Приведен фрагмент алгоритма для решения задачи, который необходимо восстановить, заполнив одно или несколько слов	+	-	-
умения восстанавливать алгоритмы решения задачи	Приведен фрагмент алгоритма для решения задачи, который необходимо восстановить, заполнив одно или несколько слов, а также одну или несколько символьных записей	-	+	-
	Приведен алгоритма для решения задачи, который необходимо восстановить, заполнив одно или несколько слов, а также одну или несколько символьных записей	-	-	+

Приведем фрагмент математического диктанта по теме «Иррациональные уравнения с параметрами»: для трех уровней групп (рис. 2).

1. Уравнения, содержащие переменную под знаком радикала (корня) или под знаком возведения в дробную степень называются... (иррациональными уравнениями).
2. Исключите лишнее из приведенного списка: введение вспомогательных переменных, замена данного уравнения равносильной ему смешанной системой уравнений и неравенства, возведение обеих частей уравнения в разные натуральные степени, возведение обеих частей уравнения в одну и ту же натуральную степень. (возведение обеих частей уравнения в разные натуральные степени)
3. Запишите название графиков функций, необходимых для решения уравнения $\sqrt{x} = ax + a$. ($y_1 = \sqrt{x}$ – степенная функция, $y_2 = ax + a$ – пучок-лучок прямых)
4. Изобразите графики функций, необходимые для решения уравнения $\sqrt{x} = x + a$.

Рис 2. Фрагмент математического диктанта для уровневой группы А

Е.С. Березанская указывает на то, что упражнения рассматриваются в арифметических преобразованиях и действиях (найти значение выражения, вычислить и т. д.), а задачи имеют более широкий смысл и предполагают построение модели решения [3].

В результате анализа работ Г.В. Дорофеева, Г.И. Саранцева и др. было установлено, что упражнения – «многоаспектное явление обучения, в признаки которого включаются такие как носитель действий, адекватных содержанию обучения математике, способ организации учебно-познавательной деятельности учащихся, средство целенаправленного формирования понятий и изучения математической теории» [13].

Экспериментальным путем было установлено, что для эффективного обучения математике целесообразно использовать несколько взаимосвязанных упражнений по заданной теме. Как отмечают Г.И. Саранцев [13], Г.В. Дорофеев [5], В.А. Далингер [4], система упражнений, направленная на формирование нового предметного действия, должна содержать следующие упражнения: подготовительного характера, на выполнения нового действий в стандартных ситуаций, на выполнение действия в совокупности с одним – двумя ранее изученными действиями, на применение действия в нестандартных ситуациях, контрольного характера.

Данная позиция получила подтверждение в ходе опроса учителей математики школ Кавказского района (Краснодарский край). На заседании районного объединения учителей математики в 2023–2024 учебном году проводился опрос по использованию взаимосвязанных упражнений на уроках математики. По результатам опроса было выявлено, что среди 50 учителей математики: 37 (74%) опрошенных отмечают, важность использования таких упражнений; 6 (12%) респондентов не используют взаимосвязанные упражнения; 7 (14%) учителей применяют системы упражнений при обучении математики. Таким образом, на уроках математики целесообразно применять несколько взаимосвязанных математических упражнений. В частности, было выявлено, что систематически используются следующие взаимосвязанные упражнения: подготовительного характера, с помощью которых вводятся основные алгоритмы для решения задач, на выполнение нового действия, контрольного характера.

Нами были выявлены требования к содержанию упражнений, предлагаемых в разных уровневых группах (табл. 3).

Таблица 3

Требования к содержанию упражнений для трех уровневых групп

Упражнения	Требование к содержанию упражнений	Уровневая группа		
		А	Б	В
Подготовительного характера	Содержат всевозможные процедуры для решения задачи, выделены операции, из которых состоят процедуры по решению задачи	+	-	-
	Содержат основные процедуры для решения задачи, выделены операции, из которых состоят процедуры по решению задачи	-	+	-
	Содержат частные процедуры для решения задачи, выделены операции, из которых состоит процедуры по решению задачи	-	-	+
на введение основных алгоритмов для решения задач	Разделение алгоритма по решению задачи на минимальное количество процедур и действий для их выполнения	+	-	-
	Разделение алгоритма по решению задачи на оптимальное количество процедур и действий для их выполнения	-	+	-
	Разделение алгоритма по решению задачи на максимальное количество процедур и действий для их выполнения	-	-	+
На выполнение	Выполнение действий в типовых ситуациях,	+	-	-

нового действия	которые рассматривались на уроке			
	Выполнение действий в нетиповых ситуациях, которые соответствуют уроку	-	+	-
	Выполнение действий в нетиповых ситуациях	-	-	+

Приведем упражнения для изучения темы «Иррациональные уравнения с параметрами»: для уровневой групп (рис. 3).

<i>Упражнения подготовительного характера</i>
1. Найдите область определения выражений: $\sqrt{x^2-4x+4}$; $\sqrt{x^2-ax+4}$. 2. Представьте выражение в виде суммы квадратов x^2-4x+a^2-2a+5 . 3. Упростите выражение: $\sqrt{x^2-4x+4}$.
<i>Упражнения, с помощью которых вводятся основные алгоритмы для решения задач</i>
1. Решите уравнение $\sqrt{x^2-4x+4} = ax+2$. 2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^2-3x} = ax+a-1$ имеет единственное решение.
<i>Упражнения на выполнение нового действия</i>
1. Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{x^2-1}+2x} = ax+1$.

Рис. 3. Взаимосвязанные упражнения для группы А

В результате анализа работ Г.В. Дорофеева [5], Г.И. Саранцева [13], Г.А. Балла [2], Ю.М. Колягина [6] и др. было установлено, что существуют различные способы дифференциации задач по математике: по уровню объема содержания учебной задачи; по уровню трудности учебной задачи; по уровню творчества учебной задачи и др. Так, В.В. Лучков [8], описывая трудность учебной задачи, акцентирует внимание на числе действий, необходимых для ее решения. В свою очередь, Г.А. Балл трудность учебной задачи связывает с фактическим или предполагаемым расходом ресурсов для решения задачи. В работе А.Т. Рогова [9] для количественной оценки сложности задачи применяется показатель «развернутости выполнения действий», заключающийся в отношении количества элементарных операций при реальном выполнении к их количеству в том же действии. Г.В. Дорофеев [5], рассматривая методы решения задач, показывает количество необходимых процедур для их решения, акцентируя внимание на уровень сложности задачи. В свою очередь,

Ю.М. Колягин [6] трудность учебной задачи связывает с субъективными факторами обучающихся (интеллектуальные возможности, потребности и интересы, опыт решения и др.). Учитывая позиции вышеприведенных исследователей об определении сложности учебных задач в соответствии с различными основаниями, нами было установлено, что для определения сложности задачи с параметрами целесообразно акцентировать внимание на методах их решения. В частности, используя аналитический метод решения уравнений с параметрами, учитывается количество процедур, необходимых для нахождения искомого значения параметра; выражения, входящие в запись формулы уравнения с параметрами. В свою очередь, решая задачу с параметрами функционально-графическим методом, определяем количество элементарных преобразований графиков функций, используемых для построения, а также сложность графической интерпретации и ее расположение в системе координат.

Нами были выделены требования к выражениям, входящих в запись иррациональных уравнений с параметрами, решаемых функционально-графическим методом, для трех уровней групп (табл. 4).

Таблица 4

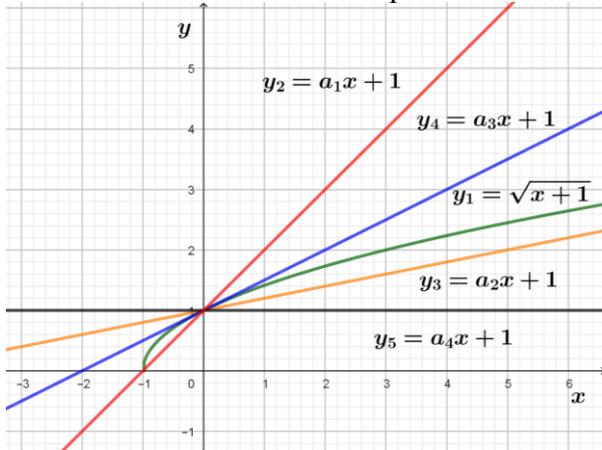
Требования к выражениям, входящих в запись иррациональных уравнений с параметрами для трех уровней групп

<i>Уровневая группа</i>	<i>Требования к выражениям, входящих в запись иррациональных уравнений с параметрами</i>
A	Подкоренное выражение является линейным или квадратным, выражение, записанное в правой части уравнения, является линейным; функция, записанная в правой части уравнения, изменяется в зависимости от значения параметра; функция, записанная в левой части уравнения, фиксированная; для построения графиков функций, записанных в правой и левой частях уравнения, не требуется преобразование выражений, входящих в запись функции
B	Подкоренное выражение является квадратным или кубическим, в записи уравнения могут присутствовать переменные под знаком модуля; правая часть уравнения является линейной, квадратной или дробно-рациональной; график функции, находящийся в правой части уравнения, фиксированный; график функции, находящийся в левой части уравнения, изменяется в зависимости от значения параметра; для построения графиков функций, расположенных в правой и левой частях уравнений, требуется минимальное количество преобразований выражений, входящих в запись функций
B	Подкоренное выражение является квадратным или кубическим; в записи

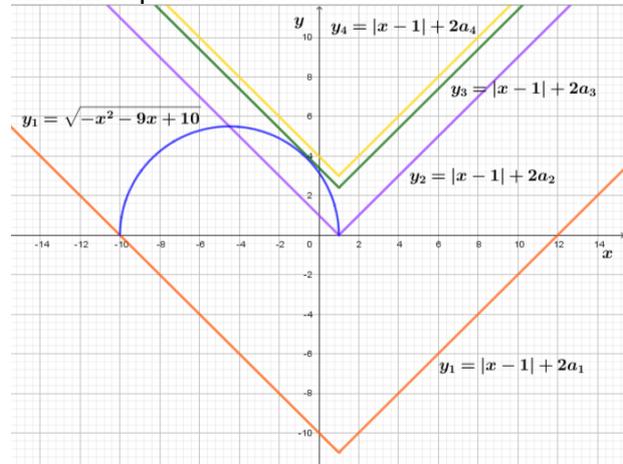
уравнения могут присутствовать под знаком модуля не только переменные, но и параметрические выражения; правая часть уравнения является квадратной или дробно-рациональной; график функции, расположенный в правой части уравнения, изменяется в зависимости от значения параметра; график функции, записанный в левой части уравнения, фиксированный; для построения графиков функций, расположенных в правой и левой частях уравнений, требуется максимально возможное количество преобразований выражений, входящих в запись функций

Приведем задачи с параметрами, решаемые функционально-графическим методом, и их графическую интерпретацию для трех уровней групп (рис. 4).

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1} = ax + 1$ имеет единственное решение.



Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{-x^2-9x+10} = |x-1| + 2a$ имеет единственное решение.



Группа А

Группа Б

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-2x+1} = |x^2-1| + 2a$ имеет единственное решение.

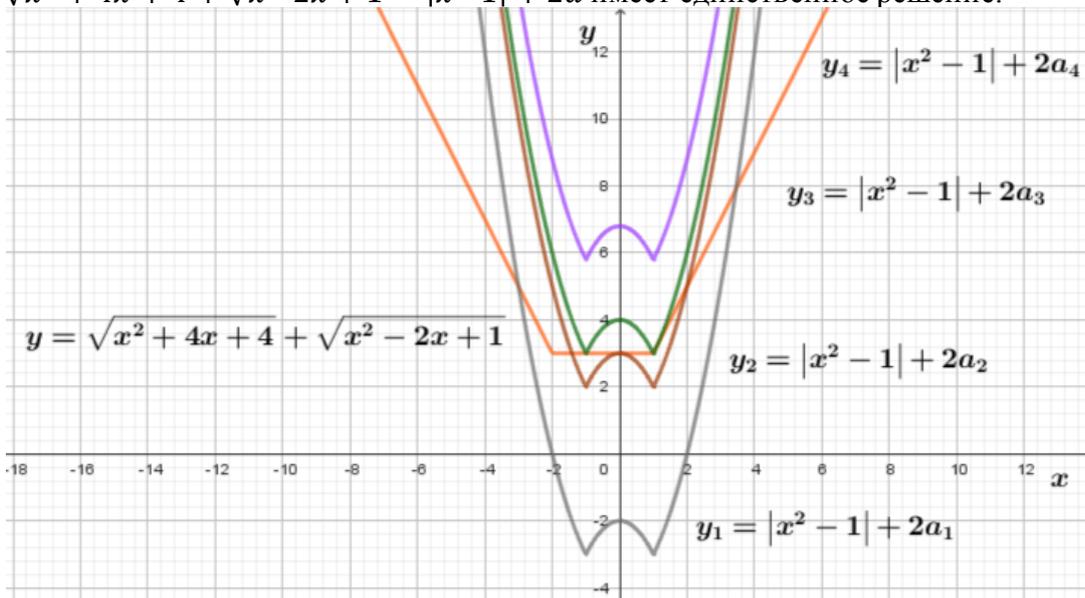


Рис. 4. Задачи с параметрами, решаемые функционально-графическим методом, и их графическая интерпретация для трех уровней групп

Таким образом, анализ литературы позволил выделить следующие виды учебных заданий: вопрос, диктант, упражнение, задача. Нами обобщены требования к составлению математических вопросов, чтобы учитывать возможность их реализации в рамках дифференциации обучения в инженерно-математическом классе. Для математического диктанта приведены и обоснованы требования к содержанию вопросов на проверку усвоения основных понятий и определений, умения выполнять графическую интерпретацию задачи, умения восстанавливать алгоритмы решения задачи обучающихся трех уровней групп. Нами выделены требования к взаимосвязанным математическим упражнениям, в соответствии с которыми разработаны взаимосвязанные упражнения для группы А. При реализации темы «Иррациональные уравнения с параметрами» экспериментально были апробированы задания, которые представлены в данной работе. Нами выделены требования к выражениям, входящих в запись задач с параметрами, решаемых функционально-графическим методом, для трех уровней групп. В соответствии с этим приведены уравнения с параметрами и их графическая интерпретация для предложенных групп. Таким образом, целесообразно разрабатывать учебные задания для инженерно-математического класса в аспекте дифференциации обучения.

Список литературы

1. Бабакова Т.А. Система заданий для самостоятельной учебной деятельности обучающихся как средство становления познавательной компетенции (на материале педагогических дисциплин) / Т.А. Бабакова // Непрерывное образование: XXI век. – 2020. – №3 (31). – DOI 10.15393/j5.art.2020.6047. EDN LQKLMY
2. Балл Г.А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект / Г.А. Балл. – М.: Педагогика, 1990. – 184 с.

3. Березанская Е.С. Сборник задач и упражнений по арифметике для средней школы / Е.С. Березанская. – М.: Учпедгиз, 1935. – 160 с.
4. Далингер В.А. Методика обучения математике. Практикум по решению задач: учебное пособие для прикладного бакалавриата / В.А. Далингер. – М.: Юрайт, 2024. – 271 с.
5. Дорофеев Г.В. Математика для каждого / Г.В. Дорофеев. – М.: Аякс, 1999. – 292 с.
6. Колягин Ю.М. Профильная дифференциация в обучении математике / Ю.М. Колягин // Математика в школе. – 1990. – №4. – С. 21–27.
7. Леонтьев А.Н. Проблемы развития психики / А.Н. Леонтьев. – М.: Педагогика, 1972. – 576 с.
8. Лучков В.В. Обучение психомоторным навыкам / В.В. Лучков // Вопросы психологии. – 1970. – №4. – С. 64–72.
9. Рогов А.Т. Моделирование параметров действия. Сообщение I. Форма действия и мера развернутости его / А.Т. Рогов // Новые исследования в психологии. – 1973. – №1. – С. 94–102.
10. Розиков О.Р. Теоретические основы оптимального применения системы учебных задач в обучении школьников (на материалах гуманитарных предметов): автореф. дис. ... д-ра пед. наук / О.Р. Розиков. – Тбилиси, 1986. – 50 с.
11. Рубенштейн С.Л. Проблемы общей психологии / С.Л. Рубенштейн. – М.: Педагогика, 1976. – 416 с.
12. Сапегин В.А. Разноуровневые тестовые задания по теме «Иррациональные уравнения с параметрами» / В.А. Сапегин // Обзор педагогических исследований. – 2023. – Т. 5. №6. – С. 152–157. EDN MFUXDS
13. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 1995. – 239 с.
14. Утёмов В.В. Виды учебных заданий для познавательного развития дошкольников / В.В. Утёмов, Т.П. Башлачёва // Концепт. – 2023. – №10. – DOI 10.24412/2304-120X-2023-11091. EDN LKNFXV

15. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: утв. приказом Минобрнауки от 17 мая 2012 г. №413: в ред. приказом Минпросвещения России от 23 ноября 2022 г. №1014. – 2022.

Сапегин Владимир Андреевич – аспирант ФГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет», Армавир, Россия, учитель МБОУ «СОШ №14 им. А.И. Покрышкина», Кавказская, Россия.
