

Гончар Лариса Исхаковна

канд. физ.-мат. наук, доцент

Петров Роман Русланович

студент

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский горный университет»

г. Санкт-Петербург

DOI 10.31483/r-137650

УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

***Аннотация:** в статье рассматривается актуальная проблема повышения качества математического образования. Предлагается содержание занятия по дисциплине математическая физика, на котором показано, как применяется изучаемый математический аппарат в задачах геофизики. Применение данной методики проведения занятия позволяет повысить уровень освоения материала.*

***Ключевые слова:** вертикальное электрическое зондирование, каротаж скважины, дифференциальные уравнения, функции Бесселя, математическая модель, уравнение Лапласа, цилиндрические координаты, уравнение Бесселя.*

Математическое образование специалиста предполагает овладение навыками использования изучаемого аппарата в профессиональных и исследовательских задачах. Часто студенты плохо понимают, как полученные математические знания можно использовать для решения практических задач. Следовательно, актуальной является задача при изучении математики показывать студентам применение изученных методов в задачах и примерах по тематике будущей профессиональной деятельности.

Математический язык позволяет точно и однозначно описывать постановку задачи: исходные данные, как установлены связи, что требуется найти. При решении поставленных задач используются методы математической физики (в области постановки прямых краевых задач и решения уравнений в частных производных). С помощью уравнений математической физики описываются

связи между моделями среды и поля, поэтому исследование свойств корректности постановки обратных задач включает в себя исследование свойств устойчивой и однозначной разрешимости соответствующих уравнений математической физики. Уравнения математической физики – это условное название моделей тех связей, которые используются для расчета физических полей по известным физическим моделям. Они установлены для всех практически используемых в геофизике рациональных физических полей и имеют вид дифференциальных, интегральных уравнений. Уравнению Лапласа удовлетворяет не только потенциал гравитационного поля вне области, содержащей источники, но и все его производные вместе с их линейными комбинациями. Этому уравнению в свободном пространстве, т. е. в области, где отсутствуют источники, удовлетворяют и многие другие геофизические поля – компоненты магнитного поля, естественного электрического, теплового для установившегося температурного режима поля при постоянных электропроводности и теплопроводности среды. Уравнение Лапласа – это фундаментальное уравнение в геофизике, а функции, ему удовлетворяющие, называются гармоническими. Недостаточный объем математической подготовки, отсутствие в учебных планах важнейших разделов математики, на которые опирается теория и методы решения обратных задач геофизики приводит к существенным трудностям: студенты, например, не могут написать волновое уравнение, составить краевые задачи для уравнений эллиптического типа.

Математическая физика является той математической дисциплиной, которая является мостом между базовой математической подготовкой и использованием математики при изучении курсов, ориентированных на будущую профессию. В этой дисциплине сочетается анализ реальной ситуации с построением физической и математической моделей изучаемого явления или процесса. Например, интерпретация геофизических данных непосредственно связана с понятием модели. Извлечение информации из геофизических данных само по себе предполагает моделирование (создание модели).

Анализ источников [2; 5; 8; 10; 11] показал, что математическое моделирование таких важных геофизических методов исследования как электроразведка и каротаж скважины, активно продолжается и развивается. Его результаты позволяют повышать качество интерпретации результатов геофизических исследований. Следовательно, при подготовке инженерных кадров важно с самого начала обучения высшей математике показывать ее связь с практическими исследовательскими задачами.

В данной работе предлагается содержание занятия, совмещающего изучение темы «Уравнение Бесселя и методы его решения» и ознакомление с математическими моделями некоторых прямых задач математической физики, в которых это уравнение решается, на примере задач геофизики.

В первой части занятия учащиеся получают основные сведения о дифференциальном уравнении, которое будет использоваться при решении задачи математической физики. Уравнение Бесселя – это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Оно имеет вид: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$. Решение такого уравнения ищем в виде обобщенного степенного ряда $y = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$, после подстановки в уравнение при нецелом

значении ν получим два линейно независимых частных решения: $J_\nu(x) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}, \quad J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k - \nu}.$$

Полученные функции являются примерами цилиндрических функций и называются функциями Бесселя первого рода. Общее решение уравнения Бесселя в этом случае имеет вид:

$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$. При целых значениях $\nu = n$ функции Бесселя первого рода становятся линейно зависимыми: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, поэтому в качестве второго линейно независимого решения используется функция Бесселя второго

рода: $Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$; $Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x)$. В этом случае общее решение

уравнения Бесселя принимает вид: $y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$.

Уравнение вида $x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0$ называется модифицированным уравнением Бесселя. Фундаментальную систему решений такого уравнения при нецелом значении ν составляют модифицированные функции Бесселя первого рода: $I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$, $I_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$. Тогда общее решение можно записать как: $y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x)$.

При целых значениях $\nu = n$ модифицированные функции Бесселя первого рода становятся линейно зависимыми, поэтому в качестве второго линейно независимого решения используется модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда): $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\pi\nu)}$; $K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x)$. В этом случае общее решения уравнения Бесселя принимает вид: $y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x)$. Таким образом, студенты понимают, что уравнение Бесселя бывает двух типов и общее решение каждого из них является линейной комбинацией соответствующих цилиндрических функций (функций Бесселя).

На следующем этапе можно показать при решении каких прямых задачах геофизики появляется это уравнение. В разведочной геофизике используются методы исследования скважин (каротаж, зондирование) с помощью скалярных полей разной физической природы. Рассмотрим математические модели процессов, используемых, при электрическом зондировании и каротаже скважины. И в том, и в другом случае электрод помещается в среду, создает поле той или иной природы и необходимо рассчитать зависимость потенциальной функции от расстояния до электрода и ее распределение по вертикальной оси. Разница заключается в том, что при электроразведке дневная поверхность расположена близко от электрода, а при каротаже – далеко и краевым эффектом можно пренебречь. Исследуется установившийся стационарный процесс, следовательно, имеем задачу Дирихле, которая записывается следующим образом: $\Delta u(\nu) = 0$, $\nu \in V$, $u|_\Gamma = u_0$, где Γ - граница области V . Из-за геометрии скважины математические модели таких задач удобно формулировать в цилиндрической

системе координат. В цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) уравнение Лапласа для потенциальной функции $u = u(\rho, \varphi, z)$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

При использовании точечного электрода потенциальная функция не зависит от полярного угла, т. е. $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$, поэтому уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \text{ Решаем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах}$$

методом разделения переменных: $u = R \times Z$, где $\begin{matrix} R = R(\rho) \\ Z = Z(z) \end{matrix}$. После подстановки и

разделения переменных имеем: $\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = a$. Важно отметить, что знак

константы a определяется граничными условиями задачи. В случае электрозондирования наличие плоской границы раздела параллельной дневной поверхности требует, чтобы функция $Z(z)$ была апериодической. Следовательно, $a = -m^2$, тогда получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Одно из них имеет вид: $z'' - m^2 z = 0$ и его решением будет функция $Z(z) = Ae^{-mz} + Be^{mz}$. Второе уравнение представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка: $\rho^2 R'' + \rho R' + \rho^2 m^2 R = 0$. Поскольку порядок уравнения целое число, то общее решение записывается с помощью функций Бесселя нулевого порядка первого рода $J_0(\rho m)$ и второго рода $Y_0(\rho m)$ и имеет вид: $R = AJ_0(\rho m) + BY_0(\rho m)$. Тогда потенциальную функцию можно записать: $u_m(\rho, z) = [A_m J_0(m\rho) + B_m Y_0(m\rho)](C_m e^{-mz} + D_m e^{mz})$.

Таким образом, получено математическое решение задачи. Далее необходимо пояснить студентам, что полученную функцию нужно проверить на соответствие требованиям, предъявляемым к функции, описывающей физический процесс. Потенциальная функция должна быть ненулевой, конечной и однозначной. В данном случае нарушается требование конечности решения задачи, поскольку функция Бесселя второго рода $Y_0(m\rho)$ обращается в бесконечность

при $\rho = 0$, следует обнулить соответствующие коэффициент $B_m = 0$. Далее, необходимо учесть, что функция должна быть ограниченной при $z \rightarrow +\infty$, поэтому нужно положить $C_m = 0$. Получим окончательно: $u_m(\rho, z) = A_m J_0(m\rho) D_m e^{-mz}$. Переобозначив коэффициенты, имеем: $u_m(\rho, z) = A_m e^{-mz} J_0(m\rho)$. Проинтегрировав полученные функции по всем возможным значениям m , т.е. то 0 до ∞ , окончательно получим выражение для потенциальной функции: $u(\rho, z) = \int_0^{\infty} A(m) e^{-mz} J_0(m\rho) dm$.

Значения коэффициентов далее вычисляются с учетом конкретных граничных условий и параметров среды. Если выражения для полученных коэффициентов $A(m)$ и $C(m)$ записать в виде рядов, то после преобразований будет получена формула: $u = \frac{q}{\rho} + 2q \sum_{e=1}^{\infty} \frac{k^e}{\sqrt{\rho^2 + 4h^2 e^2}}$, которая является основной для расчета двухслойных палеток метода вертикального электрического зондирования и используется при практических работах.

Вторая практическая значимая задача – это основная задача теории каротажа. Основой теории каротажа и методики интерпретации его результатов является решение прямой задачи для стационарного электрического поля в модели изотропной среды с одной цилиндрической границей. Модель скважины представляет собой неограниченный по высоте круговой цилиндр, заполненный изотропной средой. Источник первичного поля – точечный токовый электрод, расположенный на оси симметрии цилиндра. В этом случае после разделения переменных в уравнении Лапласа, знак константы определяется тем, что функция $Z(z)$ должна быть периодической. В результате получим обыкновенные дифференциальные уравнения, одно из которых имеет вид: $z'' + m^2 z = 0$ и его решением будет функция $Z(z) = A_m \cos(mz) + B_m \sin(mz)$. Тогда второе уравнение представляет собой модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка: $\rho^2 R'' + \rho R' - \rho^2 m^2 R = 0$. Поскольку порядок уравнения целое число, то общее решение записывается с помощью модифицированных функций Бесселя нулевого порядка первого рода $I_0(m\rho)$ и второго рода $K_0(m\rho)$ и имеет вид:

$R = A_m I_0(m\rho) + B_m K_0(m\rho)$. Тогда потенциальную функцию можно записать:
 $u_m(\rho, z) = [A_m I_0(m\rho) + B_m K_0(m\rho)] [C_m \cos(mz) + D_m \sin(mz)]$.

Учитывая, что решением задачи Дирихле должна быть ненулевая ограниченная и однозначная функция, обнулим соответствующие коэффициенты и после интегрирования получим выражения для u_1 и u_2 - потенциальных функций

внутри и вне цилиндра: $u_1(\rho, z) = \int_0^\infty A(m) I_0(m\rho) \cos(mz) dm$,

$$u_2(\rho, z) = \int_0^\infty B(m) K_0(m\rho) \cos(mz) dm.$$

Таким образом, в результате совместного обсуждения математического аппарата и прикладных задач, в которых он используется, у студентов формируется необходимый уровень математической компетенции, которая является основой профессиональных компетенций. Формируются навыки системного анализа, умение создавать математические модели физических и технологических процессов. Повышается качество усвоения знаний, появляется интерес к научно-исследовательской деятельности.

Список литературы

1. Даниловский К.Н. Неитерационная двумерная инверсия данных бокового каротажного зондирования на основе глубокого обучения / К.Н. Даниловский [и др.] // Геология и геофизика. – 2022. – С. 20–27.
2. Спичак В.В. Электромагнитный прогноз открытой пористости вне скважин / В.В. Спичак, О.К. Захарова // Геология и геофизика. – 2021. – С. 9–19.
3. Liu X., Chen J. Electric field and potential distribution in layered homogeneous borehole fluids and its logging responses of resistivity logging through casing // Geoenergy Science and Engineering. – 2023. – No. 224. – DOI 10.1016/j.geoen.2023.211532. – EDN MYOMJO

4. Wang L. Real-time forward modeling and inversion of logging-while-drilling electromagnetic measurements in horizontal wells // Petroleum Exploration and Development. – 2021. – No. 1 (48). – P. 159–168. – DOI 10.1016/s1876-3804(21)60012-5. – EDN PLVNWA
5. Wu Z.G. Numerical simulation and dimension reduction analysis of electromagnetic logging while drilling of horizontal wells in complex structures // Petroleum Science. – 2020. – No. 3 (17). – P. 645–657. – DOI 10.1007/s12182-020-00444-y. – EDN SOYJFR
6. Zhang P., Brick Y., Sharma M.M. Numerical Study of an Electrode-Based Resistivity Tool for Fracture Diagnostics in Steel-Cased Wellbores. 2018.
7. Al-Khairi R.T. q-Laplace Type Transforms of q-Analogues of Bessel Functions // Journal of King Saud University – Science. – 2020. – No. 1 (32). – P. 563–566. – DOI 10.1016/j.jksus.2018.08.012. – EDN JBAAEV
8. Wang J.H., Zhu B.O. Stable computations of the spherically layered media theory with high lossy media by using scaled Bessel functions // Journal of Electronic Science and Technology. – 2025. – No. 1 (23).
9. Wang L., Li H., Fan Y. Bayesian Inversion of Logging-While-Drilling Extra-Deep Directional Resistivity Measurements Using Parallel Tempering Markov Chain Monte Carlo Sampling // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2019. – No. 10 (57). – P. 8026–8036. – DOI 10.1109/TGRS.2019.2917839. – EDN KPCSDC
10. Sirota D. Yu. Calculation of apparent resistivity for the vertical electric sounding of multi-layer environment // Vestnik of Kuzbass State Technical University. – 2023. – No. 2. – P. 4–14. – DOI 10.26730/1999-4125-2023-2-4-14. – EDN DMJFPE
11. Каринский А.Д. The effects of tool eccentricity and formation anisotropy on resistivity logs: forward modeling / А.Д. Каринский, Д.С. Даев // Геология и геофизика. – 2016. – №10. – DOI 10.15372/GiG20161007. – EDN WTHVZZ