DOI 10.31483/r-126913

Минитаева Алина Мажитовна

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИМУЛЬТАННЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

***Аннотация**: в главе предлагается метод анализа экономических систем, основанный на использовании модели симультанных уравнений и машинного обучения. Рассмотрена архитектура полносвязной нейронной сети, способная отражать структуру системы управления с дискретным временем и позволять идентифицировать систему симультанных уравнений. Предлагается метод обучения нейронной сети, который позволяет оценить коэффициенты системы симультанных уравнений. Представлен метод прогнозирования многомерного временного ряда на основе оцененных структурных параметров системы с использованием перцептрона.*

***Ключевые слова**: многомерный временной ряд, симультанные уравнения, одновременные уравнения, система управления с дискретным временем, нейронная сеть, перцептрон, идентификация систем управления, машинное обучение.*

***Abstract**: the chapter proposes a method for analyzing economic systems based on the use of a model of simultaneous equations and machine learning. The architecture of a fully connected neural network capable of reflecting the structure of a discrete-time control system and allowing the identification of a system of simultaneous equations is considered. A method for training a neural network is proposed that allows estimating the coefficients of a set of simultaneous equations. A method for forecasting a multivariate time series based on the estimated structural parameters of the system using a perceptron is presented.*

***Keywords**: multivariate time series, simultaneous equations, discrete-time control system, neural network, perceptron, control system identification, machine learning.*

Введение

Анализ многомерных временных рядов является важной областью эконометрического моделирования, математической статистики и анализа данных. Многомерные временные ряды представляют собой наборы данных, в которых наблюдения собраны в последовательные моменты времени для нескольких переменных, что может быть полезным для моделирования и исследования сложных процессов, таких как экономические, медицинские, погодные, финансовые, энергетические и т. д. [1–6].

Ключевые аспекты анализа многомерных временных рядов включают в себя.

1. Предварительный анализ – включает в себя визуальный анализ временных рядов, поиск аномалий, проверку на стационарность и корреляцию между переменными.

2. Моделирование – можно, например, использовать методы VAR (Vector Autoregression), VECM (Vector Error Correction Model), многомерное распределение Гаусса, а также модели машинного обучения [10; 19], например, LSTM (Long Short-Term Memory) для нейронных сетей, чтобы анализировать зависимости между переменными.

3. Стационарность [14] или нестационарность – для устранения тренда и сезонности нестационарный временной ряд можно преобразовать, например, дифференцированием или использовать форсайт-модель X11, которая декомпозирует временной ряд на отдельные компоненты сезонности, тренда и случайных изменений.

4. Анализ корреляции между отдельными переменными временного ряда для выявления зависимостей и взаимосвязей между ними, для чего можно использовать корреляционные матрицы и коррелограммы.

5. Прогнозирование – для прогнозирования будущих значений ряда могут использоваться регрессионные или авторегрессионные модели [11], например, VARIMA (векторная авторегрессионная интегрированная модель скользящего среднего).

6. Оценка модели – после построения модели важно оценить ее точность и соответствие данным, что можно осуществить с помощью таких метрик, как среднеквадратичная ошибка (MSE), средняя абсолютная ошибка (MAE) и т. п.

7. Визуализация результатов анализа многомерных временных рядов – может помочь лучше понять данные и представить результаты моделирования.

8. Управление и интерпретация – определение выводов, которые можно сделать из анализа многомерного временного ряда, и действий, которые могут быть предприняты на основе этих выводов.

Анализ многомерных временных рядов может быть сложным и требовать глубокого понимания как статистики, так и предметной области данных. Важно выбирать подходы и модели, которые наилучшим образом соответствуют конкретным задачам и характеру данных.

Векторное стохастическое разностное уравнение первого порядка представляет собой математическую модель, описывающую эволюцию многомерного временного ряда с учетом стохастических (случайных) воздействий.

1. *Векторное стохастическое разностное уравнение первого порядка*.

В общем виде векторное стохастическое разностное уравнение первого порядка может быть записано следующим образом.

Пусть X_t – это вектор многомерного временного ряда на момент времени t, а X_{t-1} – вектор на предыдущем временном шаге $t-1$. Тогда векторное стохастическое разностное уравнение первого порядка может быть записано как:

$$X_t = AX_{t-1} + BU_t, \quad (1)$$

где:

– A – матрица коэффициентов, определяющая детерминированную (предопределенную) часть модели;

– B – матрица коэффициентов, определяющая стохастическую (экзогенную) часть модели;

– U_t – вектор стохастических шумовых компонент размера s, который может быть многомерным и имеет некоторые статистические свойства (например, нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу);

– X – это вектор размера p, компоненты которого зависят от шага t.

Размерность матрицы A будет $p \times p$, где p – это размерность вектора X_t. Матрица A определяет, как текущее значение вектора X_t зависит от предыдущего значения X_{t-1}, и, следовательно, она должна быть квадратной, чтобы сохранить соответствие размерностей.

Матрица B будет иметь размерность $p \times s$, где p – это размерность вектора X_t , а s – размерность вектора U_t. Матрица B определяет, как случайные воздействия от вектора U_t влияют на вектор X_t, и, следовательно, она имеет разные размерности по отношению к X_t и U_t.

Уравнение (1) описывает, как значения вектора X_t на текущем временном шаге зависят от значений на предыдущем шаге, а также как случайные воздействия BU_t могут влиять на эволюцию ряда.

Если вектор U является случайным вектором размера s, то его ковариационная матрица будет иметь следующий вид:

$$\mathrm{Cov}(U_t) = E[(U-\mu)_t (U-\mu)_t^{\top}],$$

где:

– E – оператор математического ожидания;

– μ – вектор средних значений случайного вектора U.

В нашем случае U имеет нулевое среднее, то есть $\mu=0$:

$$\mathrm{Cov}(U_t) = E[U_t U_t^{\top}]. \tag{2}$$

Эта ковариационная матрица (2) размером $s \times s$ описывает ковариации между компонентами вектора U. Конкретные значения в этой матрице зависят от статистических свойств случайного процесса, порождающего вектор U.

Распределение случайных значений экзогенных переменных U_t может зависеть от конкретной природы этих переменных и контекста задачи. Однако, в контексте стохастических временных рядов и стохастических моделей, часто предполагается, что экзогенные переменные имеют некоторое определенное статистическое свойство. Определение распределения экзогенных переменных важно, так как оно может повлиять на результаты анализа и моделирования. Поэтому выбор распределения должен быть обоснован на основе данных и экспертных знаний о предметной области.

Пример 1. Эконометрическая модель Сэмуэльсона-Хикса (также известная как модель IS-LM) описывает взаимосвязь между уровнем дохода (по сути, выпуском) и процентной ставкой в макроэкономике.

Предположим, что вектор X_t состоит из двух компонент:

– X_{1t} – уровень дохода (выпуск);

– X_{2t} – процентная ставка.

Тогда модель Сэмуэльсона-Хикса может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{1t} &= C(X_{1(t-1)}, X_{2(t-1)}) + I(X_{1(t-1)}, X_{2(t-1)}) + G + \varepsilon_{1t} \\ X_{2t} &= L(X_{1(t-1)}, X_{2(t-1)}) + M(X_{1(t-1)}, X_{2(t-1)}) + \varepsilon_{2t} \end{aligned} \qquad (3)$$

где:

– C – функция потребления, зависящая от уровня дохода и процентной ставки;

– I – функция инвестиций, зависящая от уровня дохода и процентной ставки;

– G – государственные расходы;

– L – функция предложения денег, зависящая от уровня дохода и процентной ставки;

– M – спрос на деньги, зависящий от уровня дохода и процентной ставки;

– ε_{1t} и ε_{2t} – случайные шоки, влияющие на уровень дохода и процентную ставку соответственно.

Это уравнение описывает, как изменения уровня дохода и процентной ставки в текущем периоде зависят от их предыдущих значений и экзогенных факторов (шоков). Модель Сэмуэльсона-Хикса используется для анализа экономического роста, макроэкономической политики и исследования воздействия фискальных и монетарных мер на экономику.

Пример 2. Модель Уэбба (Webb Model) является макроэкономической моделью, которая описывает зависимость между процентными ставками и изменением денежной массы в экономике. Для записи этой модели в виде векторного стохастического разностного уравнения первого порядка, мы можем определить вектор X_t, который включает в себя процентные ставки и денежную массу в момент времени t.

Предположим, что вектор Xt состоит из двух компонент:

– X_{1t} – процентные ставки;

– X_{2t} – изменение денежной массы.

Тогда модель Уэбба может быть записана в виде векторного стохастического разностного уравнения первого порядка (1), где:

– A – матрица коэффициентов размера 2×2, определяющая детерминированную часть модели. Например, она может содержать коэффициенты авторегрессии для процентных ставок и изменения денежной массы;

– B – матрица размера 2×s, где s – количество экзогенных переменных. Матрица B определяет, как изменения экзогенных переменных влияют на процентные ставки и изменение денежной массы;

– U_t – вектор размера s, представляющий экзогенные переменные или шумовые компоненты, которые могут воздействовать на модель.

Конкретные значения матриц A и B, а также характер экзогенных переменных U_t, будут зависеть от конкретной модели и данных.

2. *Дискретная система управления*.

Оба приведенных примера представляют собой линейные системы управления с дискретным временем. Пространство состояний линейной системы управления с дискретным временем может быть описано в матричной форме с использованием уравнения состояния [16].

Предположим, у нас есть линейная дискретная система управления с n состояниями, m входами управления и p выходами. Пространство состояний описывается в матричной форме или в виде системы симультанных уравнений (одновременных уравнений).

В матричной форме:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \tag{4}$$

где:

– $x(k)$ – вектор состояния на временном шаге k, размер n;

– $u(k)$ – вектор управляющего воздействия (входа) на временном шаге k, размер m;

– $y(k)$ – вектор выхода на временном шаге k, размер p;

– A – матрица состояния, размерность $n \times n$;

– B – матрица управления, размерность $n \times m$;

– C – матрица выхода, размерность $p \times n$;

– D – матрица прямой трансформации (feedthrough), размерность $p \times m$.

Матричное представление системы управления (4) включает матрицы коэффициентов A, B, C и D в системе дискретных уравнений состояния и выхода:

$$
\begin{gathered}
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где:

– $x_{i(k)}$ – i-я компонента вектора состояния x;

– $u_{j(k)}$ – j-й компонента вектора управления u;

– $y_{l(k)}$ – l-я компонента вектора выхода y;

– a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, и d_{ij} – коэффициенты матриц A, B, C, и D соответственно, определяющие структуру системы.

Запишем систему одновременных уравнений (структурную форму) с отдельными уравнениями для переменных векторов x и y:

Для вектора состояния x:

$$
\begin{aligned}
&x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \ldots + a_{1n}x_n(k) + b_{11}u_1(k) + b_{12}u_2(k) + \ldots + b_{1m}u_m(k) \\
&x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + \ldots + a_{2n}x_n(k) + b_{21}u_1(k) + b_{22}u_2(k) + \ldots + b_{2m}u_m(k) \\
&\ldots \\
&x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \ldots + a_{nn}x_n(k) + b_{n1}u_1(k) + b_{n2}u_2(k) + \ldots + b_{nm}u_m(k)
\end{aligned}
$$

Для вектора выхода y:

$$
\begin{aligned}
&y_1(k)=c_{11}x_1(k)+c_{12}x_2(k)+\ldots+c_{1n}x_n(k)+d_{11}u_1(k)+d_{12}u_2(k)+\ldots+d_{1m}u_m(k)\\
&y_2(k)=c_{21}x_1(k)+c_{22}x_2(k)+\ldots+c_{2n}x_n(k)+d_{21}u_1(k)+d_{22}u_2(k)+\ldots+d_{2m}u_m(k)\\
&\ldots\\
&y_p(k)=c_{p1}x_1(k)+c_{p2}x_2(k)+\ldots+c_{pn}x_n(k)+d_{p1}u_1(k)+d_{p2}u_2(k)+\ldots+d_{pm}u_m(k)
\end{aligned}
$$

Эти уравнения описывают систему симультанных уравнений многомерного временного ряда для линейной системы управления с дискретным временем.

3. *Модель симультанных уравнений для многомерного временного ряда.*

Структурная форма модели (система симультанных уравнений):

$$
\begin{aligned}
&\beta_{11}y_{t1}+\beta_{21}y_{t2}+\beta_{31}y_{t3}+\ldots+\beta_{k1}y_{\text{tk}}+\gamma_{11}x_{t1}+\gamma_{21}x_{t2}+\ldots+\gamma_{n1}x_{\text{tn}}=u_{t1};\\
&\beta_{12}y_{t1}+\beta_{22}y_{t2}+\beta_{32}y_{t3}+\ldots+\beta_{k2}y_{\text{tk}}+\gamma_{12}x_{t1}+\gamma_{22}x_{t2}+\ldots+\gamma_{n2}x_{\text{tn}}=u_{t2};\ldots \qquad (6)\\
&\beta_{1k}y_{t1}+\beta_{2k}y_{t2}+\ldots+\beta_{k-1,k}y_{t,k-1}+\beta_{\text{kk}}y_{\text{tk}}+\gamma_{1k}x_{t1}+\gamma_{2k}x_{t2}+\ldots+\gamma_{n2}x_{\text{tn}}\\
&\qquad =u_{\text{tk}};
\end{aligned}
$$

где:

– $y_{t1},y_{t2},\ldots,y_{tk}$ – это k эндогенных переменных (регрессанты, зависимые, внутренние);

– $x_{t1},x_{t2},\ldots,x_{tn}$ – это n предопределенных переменных (регрессоры, независимые, внешние);

– $u_{t1},u_{t2},\ldots,u_{tk}$ – это k экзогенных переменных (ошибки, шумовые компоненты, остаточные члены, отклонение i-ого уравнения модели для момента времени t);

– β_{ij} - параметр при эндогенной переменной y_{ti} в i-ом уравнении модели;

– γ_{ij} – параметр при экзогенной переменной в i-ом уравнении модели.

Модель в матричной форме:

$$\mathrm{B}y(t)+\Gamma x(t)=u(t).$$

Элементы β_{ij} и γ_{ij} матриц В и Г называются структурными коэффициентами модели.

Если оставить слева только вектор эндогенных переменных, то получится приведенная форма модели:

$$y(t)=-\mathrm{B}^{-1}\Gamma x(t)+\mathrm{B}^{-1}u(t). \qquad (7)$$

Произведем замену:

– $\Pi = -B^{-1}\Gamma$;

– $v(t) = B^{-1}u(t)$.

Модель (7) после замены принимает краткую форму:

$$y(t) = \Pi x(t) + v(t), \tag{8}$$

Такая форма (8) удобна для прогнозирования многомерного временного ряда. Для матриц структурных параметров модели, используемых в уравнениях (7) и (8) справедливо равенство $B\Pi = -\Gamma$.

4. *Идентификация системы симультанных уравнений.*

Для оценивания структурных параметров системы симультанных уравнений обычно применяются следующие статистические методы.

1. Метод наименьших квадратов (МНК или Ordinary Least Squares). Этот метод широко используется для оценки коэффициентов симультанных уравнений. МНК минимизирует сумму квадратов разниц между наблюдаемыми и предсказанными значениями зависимых переменных. МНК может давать несмещенные оценки при определенных предположениях. Он предполагает, что остаточные члены независимы и одинаково распределены с нулевым средним и постоянной дисперсией. Если эти предположения соблюдаются, то МНК дает несмещенные оценки коэффициентов.

2. Инструментальные переменные (Instrumental Variables, IV). Инструментальные переменные часто используются, когда существует эндогенность (корреляция между остаточными членами и независимыми переменными). Если инструментальные переменные соответствуют необходимым условиям (например, актуальности и экзогенности), то оценка может давать несмещенные результаты. Таким образом, метод IV рекомендуется использовать для идентификации системы симультанных уравнений лишь при выполнении необходимых и достаточных условий точной идентифицируемости всех уравнений системы.

3. Двухшаговый метод наименьших квадратов (Two-Stage Least Squares, 2SLS). Это расширение IV для систем уравнений. Его используют, когда имеется несколько уравнений и есть признаки эндогенности. Как и IV, 2SLS может давать

несмещенные оценки, если инструментальные переменные были правильно выбраны и соответствуют необходимым условиям [8].

4. Метод максимального правдоподобия (Maximum Likelihood Estimation, MLE) используется для нелинейных систем уравнений [11; 13; 15; 17; 18]. Он максимизирует функцию правдоподобия для оценки коэффициентов. Метод максимального правдоподобия может давать несмещенные оценки, если функция правдоподобия точно отражает процесс генерации данных. Функция правдоподобия строится на основе конкретных предположений о распределении ошибок (остаточных членов) и структуре модели.

5. Обобщенный метод моментов (Generalized Method of Moments, GMM) направлен на оценку параметров путем сопоставления выборочных моментов с теоретическими моментами [7]. Выбор моментов и предположения модели могут влиять на смещение. Неправильные условия моментов или неверные спецификации модели могут привести к смещенным оценкам. Обобщенный метод моментов представляет собой более универсальный подход, который можно использовать, когда система сверхидентифицируема (то есть имеется больше уравнений, чем неизвестных) или когда уравнения являются нелинейными.

Метод наименьших квадратов (МНК, OLS) можно использовать для оценки структурных параметров системы симультанных уравнений лишь при условии точной идентифицируемости всех уравнений системы. Если система неидентифицируема или сверхидентифицируема, необходимо применять другие методы, такие как метод факторизации симультанных уравнений [12].

1. Точная идентификация (Exact Identification) – это означает, что каждое уравнение в системе имеет уникальное и однозначное решение для всех его параметров. В других словах, параметры каждого уравнения можно оценить без амбигуитета.

2. Сверхидентификация (Overidentification) – это обратная ситуация, когда в системе уравнений есть больше данных, чем необходимо для оценки всех пара-

метров. Это может возникнуть, например, при наличии лишних инструментальных переменных. В таких случаях, МНК может использоваться для оценки параметров, но параметры могут быть неединственными или неустойчивыми.

3. Неидентифицируемость (Non-Identification) – это когда недостаточно данных или уравнения недостаточно информативны, чтобы оценить все параметры. В этом случае оценка параметров может быть невозможной или амбигуитетной.

Если система симультанных уравнений не является точно идентифицируемой, могут потребоваться альтернативные методы исследования [9], такие как наш метод факторизации симультанных уравнений [12] или методы, основанные на инструментальных переменных (IV). Эти методы могут помочь преодолеть проблемы сверх- или неидентифицируемости и получить состоятельные оценки параметров системы.

Для двухшагового метода наименьших квадратов 2SLS количество шагов t (наблюдений) должно быть существенно больше k – количества предопределенных переменных в векторе $x(t)$. Исходные структурные уравнения (6) преобразуются таким образом, чтобы регрессоры и случайные ошибки были некоррелированы.

В случае стохастичности экзогенных переменных u регрессоры x могут быть коррелированы с ошибками u. То есть x становятся тоже эндогенными переменными. Метод факторизации симультанных уравнений (МФСУ, Method of Factorization of Simultaneous Equations, MFSE), описанный автором в [12], решает проблему смещенности оценок 2SLS за счет факторизации.

5. *Полносвязная нейронная сеть.*

Полносвязные нейронные сети (например, перцептрон, perceptron) входят в состав технологий глубокого обучения, структура полносвязной нейронной сети – однонаправленная (без обратных связей) и многослойная. Логическая схема перцептрона с тремя выходами представлена на рисунке 1. Веса S-A связей могут иметь значения -1, +1 или 0 (то есть отсутствие связи). Веса A-R связей $v_{i,j}$ могут быть любыми.

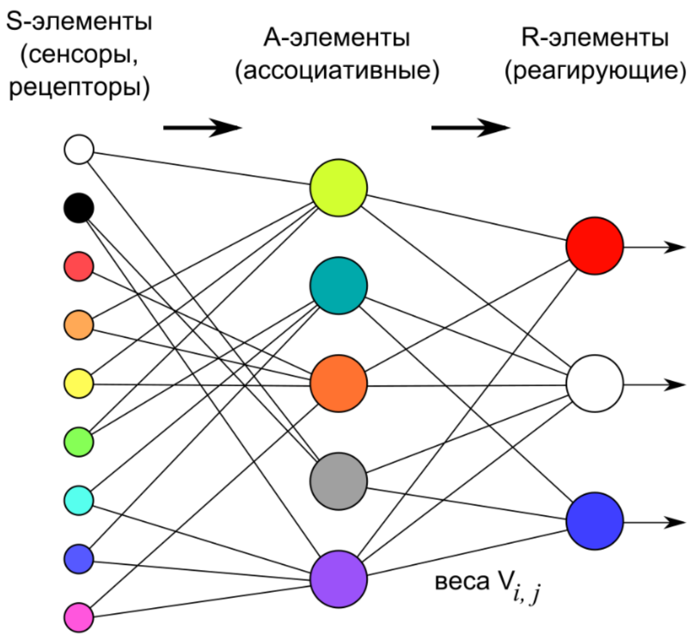

Рис. 1. Схема элементарного перцептрона

Уравнение математической модели нейрона соответствует взвешенному сумматору:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \,, \tag{9}$$

в котором:

– n – это количество входов нейрона;

– x_i – это сигнал на i-ом входе нейрона;

– w_i – это вес i-ой входной связи нейрона (или синапса).

Каждый синапс имеет вес, определяющий степень влияния данного входа нейрона на его состояние.

Если параметров больше, чем обучающих примеров (как часто бывает в глубоком обучении), то нейронная сеть соответствует неидентифицируемой (недоопределенной) системе. Тогда будет несколько конфигураций параметров, при которых перцептрон будет идеально интерпретировать обучающий набор (нулевая ошибка обучения). В этом случае высока вероятность, что нейросеть не будет корректно обобщаться и покажет низкую производительность набора тестов. Тогда используют регуляризацию (L2, Dropout и т. д.).

Если параметров меньше, чем обучающих примеров, то нейронная сеть соответствует сверхидентифицируемой (переопределенной) системе симультанных уравнений. Тогда будет предполагаться, что обучающие примеры линейно независимы, что приводит к отсутствию несмещенного решения задачи идентификации системы симультанных уравнений, и ошибка обучения нейронной сети будет ненулевой (и довольно высокой), так как перцептрон не имеет достаточного количества обучаемых весов (степеней свободы их переопределения).

Пусть слой входных данных содержит такое количество S-элементов (нейронов-рецепторов), которое равно сумме количества эндогенных переменных k и количества предопределенных переменных n. Скрытый слой A-элементов (ассоциативных нейронов) тоже содержит $n+k$ нейронов. Слой вывода содержит k реагирующих нейронов (R-элементов), выходы которых соответствуют значениям экзогенных переменных u. Веса S-A связей принимают значение 1 (вес связи i-го S-элемента с i-м A-элементом) или 0 (веса связей i-го S-элемента с j-м A-элементом для всех j не равных i). Веса A-R связей имеют значения коэффициентов системы симультанных уравнений при эндогенных переменных y и предопределенных переменных x. Схема описанного перцептрона для оценки коэффициентов системы симультанных уравнений представлена на рисунке 2.

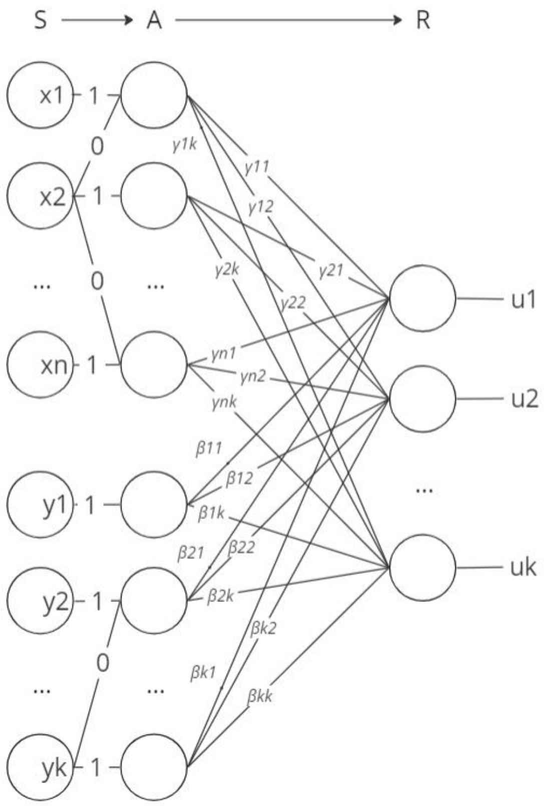

Рис. 2. Логическая схема перцептрона
для оценки коэффициентов симультанных уравнений

Эта архитектура полносвязной нейронной сети (рис. 2) представляет собой перцептрон с тремя слоями: S (сенсорный), A (ассоциативный) и R (реагирующий).

Здесь S-слой представляет входные данные (рецепторы) и содержит количество нейронов, равное сумме количества эндогенных переменных *k* и предопределенных переменных *n*. Веса связей между S и A нейронами равны 1 или 0.

Скрытый A-слой представляет собой ассоциативные нейроны и также содержит *n*+*k* нейронов. Веса связей между A и R нейронами соответствуют коэффициентам β_{ij} и γ_{ij} системы симультанных уравнений (6) при эндогенных (*y*) и предопределенных (*x*) переменных соответственно.

Слой вывода R состоит из *k* реагирующих нейронов, выходы которых соответствуют значениям *k* экзогенных переменных *u*. Каждый нейрон на R-слое соответствует известному значению экзогенной переменной из обучающего набора многомерного временного ряда.

Целью обучения описанного перцептрона на обучающей выборке (известных значениях эндогенных, предопределенных и экзогенных переменных многомерного временного ряда) является подбор весовых коэффициентов A-R связей, т. е. оценка коэффициентов системы симультанных уравнений многомерного временного ряда.

По формуле (9) запишем уравнение i-го реагирующего нейрона:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ji} x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ji} y_j \,. \tag{10}$$

Нетрудно заметить, что уравнение (10) совпадает с i-м уравнением системы симультанных уравнений (6), таким образом перцептрон на рисунке 2 соответствует рассматриваемой модели многомерного временного ряда и является моделью машинного обучения для оценки коэффициентов системы симультанных уравнений.

В этой архитектуре цель обучения состоит в том, чтобы подобрать весовые коэффициенты связей между A- и R-нейронами так, чтобы на выходе из R-слоя получились значения экзогенных переменных (u) системы симультанных уравнений многомерного временного ряда.

Для обучения такой нейронной сети может потребоваться использовать метод оптимизации, такой как стохастический градиентный спуск (Stochastic Gradient Descent, SGD) или Adam, и функцию потерь, которая будет оценивать разницу между выходами на R-слое и известными значениями экзогенных переменных.

После обучения нейронной сети можно использовать весовые коэффициенты между A- и R-нейронами в качестве оценок коэффициентов системы симультанных уравнений многомерного временного ряда.

Получив таким образом значения β_{ij} и γ_{ij} элементов матриц B и Γ, далее используем приведенную форму модели (7): $y(t) = -\mathrm{B}^{-1}\Gamma x(t) + \mathrm{B}^{-1}u(t)$.

Пусть π_{ij} – элементы матрицы $\Pi = -\mathrm{B}^{-1}\Gamma$, φ_{ij} – элементы матрицы $\Phi = \mathrm{B}^{-1}$, тогда для прогнозирования многомерного временного ряда можно использовать структуру перцептрона, представленную на рисунке 3, где R-слой на выходе представляет значения эндогенных переменных y, а слой входных данных S и ассоциативный слой A содержат по $n+k$ нейронов.

Значениями на входах A-слоя являются значения предопределенных переменных x и экзогенных переменных u.

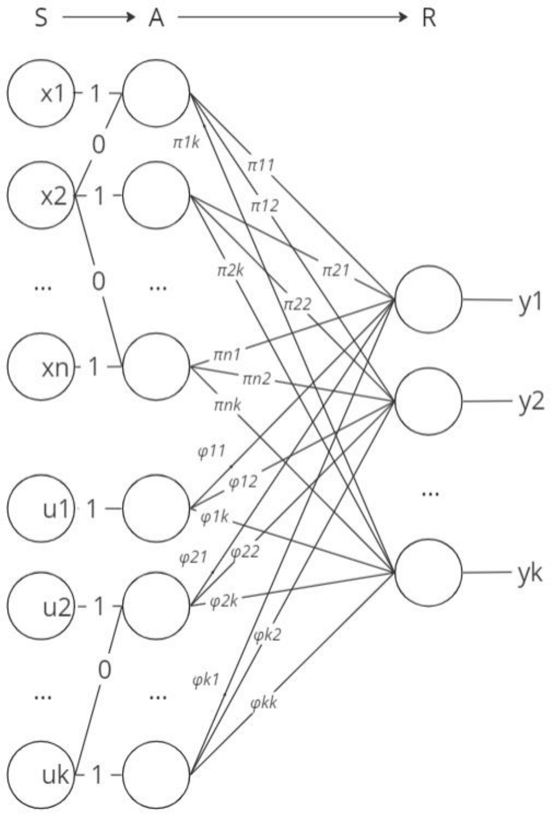

Рис. 3. Структура перцептрона для прогнозирования многомерного временного ряда

Аналогично формуле (10) запишем уравнение i-го реагирующего нейрона:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ji} x_j + \sum_{j=1}^{k} \varphi_{ji} u_j \,. \tag{11}$$

Легко заметить, что уравнение (11) совпадает с приведенной формой системы симультанных уравнений (8), таким образом перцептрон на рисунке 3 соответствует рассматриваемой модели многомерного временного ряда и является моделью машинного обучения для его прогнозирования.

Теперь сформулируем алгоритм прогнозирования многомерных временных рядов с использованием симультанных уравнений и полносвязных нейронных сетей (перцептронов):

Шаг 1. Подготовка данных – например, может потребоваться заполнение пропусков в исходных данных, которыми является временной ряд, содержащий значения эндогенных переменных (y), предопределенных переменных (x) и экзогенных переменных (u).

Шаг 2. Оценка коэффициентов симультанных уравнений.

Шаг 2.1. Создаются матрицы B и Г для системы симультанных уравнений многомерного временного ряда.

Шаг 2.2. С помощью перцептрона, представленного на рисунке 2, оцениваются коэффициенты системы симультанных уравнений. Архитектура нейронной сети будет иметь слои S, A и R, где S и A слои содержат значения предопределенных и эндогенных переменных (x и y), а R-слой представляет собой значения экзогенных переменных (u). Веса связей между A- и R-нейронами представляют собой оценки коэффициентов системы. Обучение нейросети выполняется на обучающей выборке, где входами являются значения x и y, а выходами – значения u.

Шаг 2.3. Матрицы B и Г заполняются значениями структурных параметров модели на основе весовых коэффициентов связей между A- и R-нейронами.

Шаг 3. Прогнозирование многомерного временного ряда.

Шаг 3.1. Полученные матрицы B и Г используются для прогнозирования многомерного временного ряда. На основе элементов матриц B и Г устанавливаются веса связей перцептрона (рис. 3) для прогнозирования временного ряда. Архитектура нейронной сети будет иметь слои S, A и R, где S и A слои содержат значения предопределенных и экзогенных переменных (x и u), а R-слой представляет собой значения эндогенных переменных (y).

Шаг 3.2. Для прогнозирования на следующем временном шаге входные значения x и u следующего момента времени подаются в A-слой нейросети, прогнозы для значений вектора y получаются на R-слое.

Шаг 4. Оценка качества модели – используются метрики, такие как среднеквадратичная ошибка (Mean Squared Error, MSE) или другие, для измерения точности прогнозов. Качество модели оценивается на тестовом наборе данных путем сравнения прогнозов с реальными значениями временного ряда.

Шаг 5. Настройка и оптимизация модели – можно, например, добавить регуляризацию или использовать другие методы для улучшения точности модели.

Шаг 6. Интерпретация результатов – оцененные коэффициенты системы симультанных уравнений и их влияние на переменные в системе, а также прогнозные значения ряда анализируются экспертом.

Предложенный алгоритм позволяет интегрировать информацию из множества переменных многомерного временного ряда и использовать нейронную сеть для оценки структурных параметров системы симультанных уравнений, которые в качестве эконометрических моделей можно применять в инвестиционных, финансовых системах и бизнесе [20; 21]. Основным результатом алгоритма является прогноз многомерного временного ряда на основе полученных оценок структурных параметров модели (шаг 3).

Заключение

Многомерные временные ряды, содержащие взаимосвязи между эндогенными и экзогенными переменными, представляют нетривиальную задачу моделирования и прогнозирования. Симультанные или одновременные уравнения предоставляют инструмент для моделирования и анализа сложных взаимосвязей между переменными в многомерных временных рядах, что позволяет учесть корреляции между эндогенными и экзогенными переменными.

Для идентификации системы симультанных уравнений могут быть применены полносвязные нейронные сети (например, перцептроны). Архитектура сети, включая входные и выходные слои, может быть спроектирована так, чтобы отражать структуру системы и позволять оценить коэффициенты.

Обучение нейронной сети на обучающей выборке с известными значениями многомерного временного ряда позволяет оценить коэффициенты системы симультанных уравнений. Прогнозирование многомерного временного ряда на основе оцененных коэффициентов может быть выполнено с использованием нейронной сети [22], что позволяет предсказывать будущие значения эндогенных переменных.

Анализ многомерных временных рядов с использованием симультанных уравнений и нейросетей предоставляет мощный метод для моделирования и прогнозирования сложных систем. Важно тщательно подготавливать данные, настраивать модель и интерпретировать результаты, чтобы эффективно использовать этот подход в практических задачах анализа данных и эконометрического прогнозирования.

Список литературы

1. Salam R., Basuki P. Simultaneous Equation: The Case of Inflation & Rupiah Exchange Rate in Indonesia 2001–2022 // International journal of multidisciplinary research and analysis. 2023. Vol. 6. No. 12. P. 5531–5538. DOI 10.47191/ijmra/v6-i12–12

2. Warrener C., Silva F., Guimaraes L. Financial system and economic development: a study for emerging countries through a system of simultaneous equations // Internext. 2023. Vol. 18. No. 3. DOI 10.18568/internext.v18i3.741. EDN STSVXR

3. Yilanci V., Cutcu I., Araci S. The causality relationship between trade andenvironment in G7 countries: evidence from dynamic symmetric and asymmetric bootstrappanel causality tests // Mathematics. 2022. Vol. 10. No. 15. DOI 10.3390/math10152553. EDN WPWQOJ

4. Liu Y., Jin M., Zhao S., Qi G. How do volatile and non-volatile energy factors affect energy OFDI? evidence from simultaneous equation model // Front. Energy Res. 2024. Vol. 11. No. 1302374. P. 627–637. DOI 10.3389/fenrg.2023.1302374. EDN FAPUEY

5. Kheireddine H., Lacombe I., Jarboui A. The moderating effect of environmental performance on the relationship between sustainability assurance quality and firm value: a simultaneous equations approach // Benchmarking An International Journal. 2024. DOI 10.1108/BIJ-06–2022–0389. EDN CZEMHC

6. Garba M., Akanni S., Banjoko A., Oladele T. The nexus between foreign aid and foreign direct investment in Nigeria: simultaneous equations approach // Malaysian Journal of Computing. 2023. Vol. 8. No. 2. P. 1620–1638. DOI 10.24191/mjoc.v8i2.16635

7. Egger P., Prucha I. Refined GMM estimators for simultaneous equations models with network interactions // Empirical Economics. 2023. Vol. 64. No. 6. P. 2535–2542. DOI 10.1007/s00181–023–02408–8. EDN CKSOBA

8. Hadjiantoni S., Kontoghiorghes E. A recursive three-stage least squares method for large-scale systems of simultaneous equations // Linear Algebra and its Applications. 2018. Vol. 536. P. 210–227. DOI 10.1016/j.laa.2017.08.019

9. Hernandez-Sanjaime R., Gonzalez M., Lopez-Espın J. Multilevel simultaneous equation model: A novel specification and estimation approach // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 366. No. 112378. DOI 10.1016/j.cam.2019.112378. EDN VDJEXY

10. Bukhtoyarov V.V., Tynchenko V.S., Nelyub V.A., Masich I.S., Borodulin A.S., Gantimurov A.P. A Study on a Probabilistic Method for Designing Artificial Neural Networks for the Formation of Intelligent Technology Assemblies with High Variability // Electronics (Switzerland). 2023. Vol. 12. No. 1. P. 215. DOI 10.3390/electronics12010215. EDN XTUCKB

11. Минитаева А.М. Обзор методов вычисления коэффициентов авторегрессии для автокорреляционных нелинейных нестационарных процессов / А.М. Минитаева, И.О. Михнюк // Информационно-технологический вестник. – 2024. – №4 (42). – С. 30–41. – EDN BDUUJG.

12. Minitaeva A.M. Unbiased Estimation Method for Coefficients of Simultaneous Equations with Stochasticity of Exogenous Variables, Proceedings of the 2024 6th International Conference on Big-data Service and Intelligent Computation BDSIC 2024, May 29–31, 2024, Hong Kong, Hong Kong. ACM, New York, NY, USA, 9 Pages. 2024, DOI 10.1145/3686540.3686554

13. Minitaeva A. Analysis of the Multi-Criteria Decision-Making Problem Under Conditions of Heterogeneous Interval Uncertainty, Proceedings – 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2022, 2022, DOI 10.1109/SUMMA57301.2022.9974092

14. Mikhailov V.G., Mezhennaya N.M., Volgin, A.V. On the asymptotic normality conditions for the number of repetitions in a stationary random sequence // Discrete Mathematics and Applications. 2022. Vol. 32. No. 6. P. 397–407. DOI 10.1515/dma-2022-0034. EDN SGIHQC

15. Fetisov D.A. On Linearization of Single-Input Nonlinear Control Systems Based on Time Scaling and a One-Fold Prolongation // Differential Equations. 2023. Vol. 59. No. 1. P. 103–118. DOI 10.1134/s0012266123010081. EDN CJYLFJ

16. Chetverikov V.N. Orbital decompositions and integrable pseudosymmetries of control systems // Automatica. 2022. Vol. 139. DOI 10.1016/j.automatica.2022.110189. EDN NYVULO

17. Минитаева А.М. Системный анализ и разработка методики моделирования нелинейных нестационарных процессов в системе поддержки принятия решений / А.М. Минитаева, С.В. Шайтура // Информационно-технологический вестник. – 2023. – №3 (37). – С. 54–64. – EDN ACWQAM.

18. Минитаева А.М. Новый оператор тензорного произведения и анализ нелинейных систем с полиномиальными функциями пространства состояний / А.М. Минитаева // Информационно-технологический вестник. – 2024. – №3 (41). – С. 3–14. – EDN AAECDU.

19. Stepanova M., Eremin O., Proletarsky A. Self-regulation Management in IoT Infrastructure Using Machine Learning // Lecture Notes in Electrical Engineering. 2022. Vol. 832. P. 3–15. DOI 10.1007/978-981-16-8248-3_1. EDN HKBJPZ

20. Шайхутдинов А.А. Применение методов имитационного моделирования в спиральном жизненном цикле программных продуктов для улучшения продуктовых метрик на примере онлайн сервиса подбора репетиторов / А.А. Шайхутдинов // Искусственный интеллект в автоматизированных системах управления и обработки данных: Сборник статей II Всероссийской научной конференции: в 5 томах (Москва, 27–28 апреля 2023 г.). – М.: КДУ, Добросвет, 2023. – С. 237–244. – EDN UQQTNL.

21. Шайхутдинов А.А. Расширенные комплексные матрица метрического тензора и пространство Минковского для систем любой природы / А.А. Шайхутдинов // Информационно-технологический вестник. – 2024. – №4 (42). – С. 42–65. – EDN EQBRHJ.

22. Шайхутдинов А.А. Методы и аспекты прогнозного моделирования нелинейных нестационарных процессов / А.А. Шайхутдинов // Информационно-технологический вестник. – 2024. – Т. 40. №2. – С. 66–76. EDN THMLET.

Минитаева Алина Мажитовна – канд. техн. наук, доцент кафедры Компьютерные системы и сети, ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», Москва, Россия.