

Логун Кристина Александровна

канд. пед. наук, доцент

Карташов Александр Владимирович

студент

ФГБОУ ВО «Северо-Восточный государственный университет»

г. Магадан, Магаданская область

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ
ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ ВЫБОРА ПРИ МНОГИХ КРИТЕРИЯХ
(НА ПРИМЕРЕ ВЫБОРА ВИДА МОТОРНЫХ МАСЕЛ ДЛЯ
ГОРНОДОБЫВАЮЩЕЙ ТЕХНИКИ)**

***Аннотация:** авторы рассматривают возможности применения математических методов и моделей, в частности, методов матричной алгебры, для обоснования выбора при необходимости сравнения альтернатив по нескольким критериям. В статье рассматривается проблема оптимального выбора моторных масел для обеспечения работы двигателей внутреннего сгорания горнодобывающей техники. Определены альтернативные виды моторных масел, разработана система критериев для их сравнительной оценки, построены матрицы парных сравнений для оценки относительной важности критериев и оценки альтернатив по каждому из критериев. На основе метода анализа иерархий произведен синтез глобальных приоритетов, что позволило прийти к оптимальному выбору.*

***Ключевые слова:** методы матричной алгебры, метод анализа иерархий, выбор моторных масел, горнодобывающая техника.*

Рост сложности задач, решаемых в технических, экономических и других сферах деятельности (например, техническое развитие производства, инвестиционная деятельность предприятия, материально-техническое обеспечение, логистика), требующих тщательного обоснования, необходимости учета большого

количества факторов, влияния неопределенности, вызывает необходимость применения математических методов и моделей для обоснования принимаемых решений.

Одним из направлений использования математических методов и моделей является выбор одной или нескольких лучших альтернативных решений при многокритериальном выборе, когда набор альтернатив необходимо сравнить по целому ряду критериев. Одним из удобных инструментов, помогающих принять решение в таких сложных условиях, является метод анализа иерархий (далее – МАИ), предложенный Т. Саати и К. Кернсом [4, с. 25].

Суть метода заключается в декомпозиции проблемы принятия решений в виде иерархии, элементы которой оцениваются по вербально-числовой шкале экспертами или лицом, принимающим решение, а после обработки совокупности показателей методом матричной алгебры, формируются конечные оценки. При этом для сравнения альтернатив используется метод попарных сравнений [1, с. 27].

Авторы статьи рассматривают возможность применения метода анализа иерархий для принятия решений о выборе вида моторных масел для горнодобывающей техники, которая используется на горнодобывающих предприятиях. Горнодобывающая отрасль является одной из ведущих отраслей экономики Магаданской области. Для проведения геологоразведочных и эксплуатационных работ по разработке участков недр используется большое количество тяжелой техники: буровых установок, бульдозеров, экскаваторов, промывочных приборов, обогащательного оборудования, дизель-генераторов, карьерной техники, транспортных средств и других [2, с. 2186]. На окончание 2023 года стоимость основных средств горнодобывающих предприятия составила 232 293 млн. руб., что составляет порядка 34,9% от стоимости всех основных производственных фондов Магаданской области [5, с. 119].

При этом важным фактором, определяющим эффективность работы горнодобывающей техники является ее техническое состояние. Моторные масла, которые в большом количестве используются для обеспечения работы двигателей внутреннего сгорания, являются важным фактором эффективной эксплуатации

и большой статьей расходов при работе горной техники, что обосновывает актуальность выбора оптимального решения.

Для принятия решения об оптимальном выборе моторного масла были рассмотрены такие альтернативные варианты моторных масел, которые чаще всего используются для обеспечения работы ДВС тяжелой гусеничной техники, используемой на горных работах, как:

- гидрокрекингное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4;
- полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-40 CH-4
- минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF.

Для сравнения видов моторных масел выбраны следующие критерии:

- цена;
- условия эксплуатации (сезонность, температурный режим, термостабильность);
- индекс вязкости;
- щелочное число;
- кинематическая вязкость при 100° С.

Иерархическое представление проблемы для обоснования выбора вида моторных масел представлено на рисунке 1.

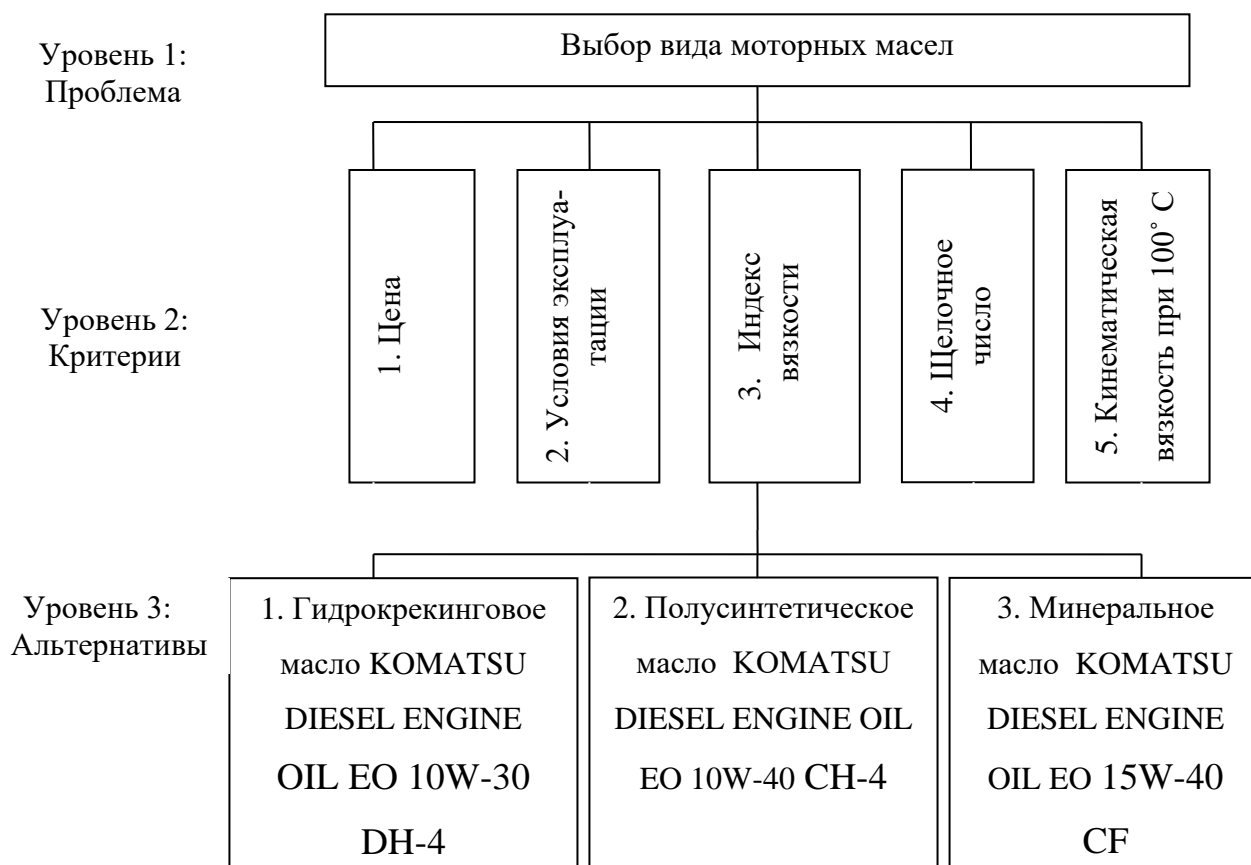


Рис. 1. Иерархическое представление проблемы выбора вида моторных масел для работы двигателей внутреннего сгорания тяжелой горной техники

Для получения информации о важности критериев (либо предпочтений альтернатив по каждому критерию) строятся матрицы парных сравнений, обладающих свойством обратной симметрии, в которых степень предпочтения одного элемента над других выражается в терминах доминирования на основе специальной вербально-числовой шкалы. Наибольшему числовому значению элемента соответствует более высокая степень предпочтения (табл. 1) [1, с. 34].

Таблица 1

Шкала отношений (степень значимости) МАИ

Уровень предпочтений	Числовое значение
Чрезвычайно сильное	9
Между чрезвычайно сильным и сильным	8
Очень сильное	7
Между очень сильным и сильным	6
Сильное	5

Между сильным и слабым	4
Слабое	3
Между слабым и безразличным	2
Безразличное	1

На основе данных матриц парных сравнений строится столбец собственного вектора приоритетов W . Столбец приоритетов математически эквивалентен собственному столбцу матрицы. То есть удовлетворяет соотношению (1.1) [1, с.37]:

$$EW = \lambda_{\max} W, \quad (1.1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где λ – собственное значение матрицы.

Пусть имеются объекты $B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_m, D_1, D_2, \dots, D_k$, которые находятся в иерархической зависимости от B, C, D соответственно.

Для каждой группы объектов строятся свои матрицы попарных сравнений, и вычисляются столбцы приоритетов, индексы приоритетов (1.2).

$$w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

Полученные столбцы записываются в виде матрицы (1.3):

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Умножая эту матрицу на столбец W , находим столбец приоритетов третьего уровня иерархии (1.4):

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x + x_2 \cdot y + x_3 \cdot z \\ y_1 \cdot x + y_2 \cdot y + y_3 \cdot z \\ z_1 \cdot x + z_2 \cdot y + z_3 \cdot z \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

На основании полученных данных можно делать выводы о предпочтениях объектов данной структуры.

Построенные матрицы парных сравнений проверяют на согласованность суждений в них. Для выполнения условий согласованности в матрицах парных сравнений сначала вычисляют максимальное собственное значение матриц λ_{\max} .

В случае, когда матрица является согласованной матрицей то λ_{\max} равен порядку матрицы.

Насколько близка матрица к согласованной, показывает индекс согласованности (далее – ИС), чем меньше ИС тем ближе матрица к согласованной матрице.

Индекс согласованности может быть получен следующим образом (1.5) [1, с.41]:

$$\text{ИС} = (\lambda_{\max} - n) / (n-1), \quad (1.5)$$

где ИС – индекс согласованности;

n – порядок матрицы;

λ_{\max} – максимальное собственное значение матрицы.

Отношение согласованности можно определить по формуле (1.6) [1, с.41]:

$$\text{ОС} = \text{ИС} / \text{М(ИО)}, \quad (1.6)$$

где ОС – отношение согласованности;

М(ИО) – среднее значение (математическое ожидание) индекса однородности матрицы размерностью n .

В качестве допустимого используется значение ОС в пределах 10–20%.

Применение метода требует достаточно серьезной счетной работы. Для автоматизации сложных вычислений существует большое количество программных средств, называемых средствами компьютерной алгебры. Для вычислений собственного значения матрицы идеально подходит wxMaxima (далее описана версия 19.01.2x) [3, с.138].

В таблице 2 построена матрица парных сравнений для определения относительной важности критериев при принятии решения о выборе вида моторного масла.

Таблица 2

Матрица парных сравнений для определения относительной важности критериев выбора моторных масел

Критерии	1. Цена	2. Условия эксплуатации	3. Индекс вязкости	4. Щелочное число	5. Кинематическая вязкость	Собственный вектор	Вектор приоритетов
1. Цена	1	3	6	7	4	3,4713	0,466
2. Условия эксплуатации	1/3	1	5	5	5	2,1084	0,283
3. Индекс вязкости	1/6	1/5	1	1	1/7	0,3432	0,046
4. Щелочное число	1/7	1/5	1	1	1/7	0,3328	0,045
5. Кинематическая вязкость	1/4	1/5	7	7	1	1,1963	0,16
Сумма по столбцам	1,8929	4,6	20	21	10,285	7,452	1
$\lambda_{\max} = 5,69$; ИС = 0,1725; ОС = 0,154							

Из таблицы 2 видно, что решающим критерием при выборе вида масла является такой критерий, как цена, удельный вес которого составил 0,466, второй по важности критерий – условия эксплуатации, так как обеспечивает сохранение эксплуатационных свойств техники при различных условиях. Третьим по важности критерием является кинематическая вязкость при 100° С, удельный вес которого составил 0,16.

Далее составлены матрицы парных сравнений всех альтернативных вариантов масел по каждому из критериев. Матрица парных сравнений моторных масел по критерию «Цена» представлена в таблице 3.

Таблица 3

*Матрица парных сравнений моторных масел по критерию
K1 «Цена»*

Вид моторного масла	1. Гидрокрекинговое масло»	2. Полусинтетическое масло	3. Минеральное масло	Собственный вектор	Вектор приоритетов
1. Гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4	1	1/5	1/7	0,3057	0,069
2. Полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-40 CH-4	5	1	1/4	1,0772	0,244

3. Минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF	7	4	1	3,0366	0,687
Сумма столбцам	13	5,2	1,393	4,4195	1
$\lambda_{\max} = 3,1228$; ИС = 0,0614; ОС = 0,106					

Из таблицы 3 видно, что наиболее предпочтительным по критерию «Цена» является минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF (относительная оценка – 0,687), поскольку является самым дешевым.

Матрица парных сравнений моторных масел по критерию «Условия эксплуатации» представлена в таблице 4.

Таблица 4

Матрица парных сравнений моторных масел по критерию

K2 «Условия эксплуатации»

Вид моторного масла	1. Гидрокрекинговое масло»	2. Полусинтетическое масло	3. Минеральное масло	Собственный вектор	Вектор приоритетов
1. Гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4	1	5	4	3,271	0,722
2. Полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-40 CH-4	1/5	1	7	0,928	0,205
3. Минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF	1/4	1/7	1	0,329	0,073
Сумма по столбцам	1,343	6,25	12	4,528	1
$\lambda_{\max} = 3,127$; ИС = 0,0635; ОС = 0,109					

Из таблицы 4 видно, что наиболее оптимальным вариантом моторных масел по критерию «Условия эксплуатации» является гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4 (относительная оценка – 0,722), так как обеспечивает более широкий температурный диапазон применения и может использоваться и в летний и в зимний период. Вторым по приоритету является полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO

10W-40 CH-4. В наименьшей степени критерию «Условия эксплуатации удовлетворяет минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF.

Матрица парных сравнений моторных масел по критерию «Индекс вязкости» представлена в таблице 5.

Таблица 5

*Матрица парных сравнений моторных масел по критерию
КЗ «Индекс вязкости»*

Вид моторного масла	1. Гидрокрекинговое масло»	2. Полусинтетическое масло	3. Минеральное масло	Собственный вектор	Вектор приоритетов
1. Гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4	1	6	6	3,302	0,75
2. Полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-40 CH-4	1/6	1	1	0,5503	0,125
3. Минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF	1/6	1	1	0,5503	0,125
Сумма по столбцам	1,33	8	8	4,4026	1
$\lambda_{\max} = 2,9975$; ИС =0,00126; ОС =0,0022					

По этому критерию предпочтительным вариантом является гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4 (относительная оценка – 0,75), так как синтетическая база масла позволяет сохранять высокий индекс вязкости в широком диапазоне рабочих температур двигателя. Минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF и полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-40 CH-4 имеют одинаковые оценки и в меньшей степени удовлетворяют выбору по критерию «Индекс вязкости» (относительная оценка – 0,125).

Матрица парных сравнений моторных масел по критерию «Щелочное число» представлена в таблице 6.

Матрица парных сравнений моторных масел по критерию

K4 – «Щелочное число»

Вид моторного масла	1. Гидрокрекинговое масло»	2. Полусинтетическое масло	3. Минеральное масло	Собственный вектор	Вектор приоритетов
1. Гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4	1	5	1/6	0,941	0,199
2. Полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-40 CH-4	1/5	1	1/7	0,306	0,065
3. Минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF	6	7	1	3,476	0,736
Сумма по столбцам	7,2	13	1,31	4,723	1
$\lambda_{\max} = 3,242$; ИС = 0,136; ОС = 0,204					

Из таблицы 6 видно, что минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF является предпочтительным выбором по этому критерию (относительная оценка – 0,736), так как стандарт CF предусматривает высокую моющую способность масла и предотвращает образование отложений в картере двигателя. На втором месте гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4.

Матрица парных сравнений моторных масел по критерию «Кинематическая вязкость» представлена в таблице 7.

Матрица парных сравнений моторных масел по критерию

K5 «Кинематическая вязкость»

Вид моторного масла	1. Гидрокрекинговое масло»	2. Полусинтетическое масло	3. Минеральное масло	Собственный вектор	Вектор приоритетов
1. Гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4	1	1/7	1	0,523	0,11113
2. Полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-40 CH-4	7	1	7	3,66	0,77773
3. Минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF	1	1/7	1	0,523	0,11113
Сумма по столбцам	9	1,29	9	4,706	1
$\lambda_{\max} = 3,0037$; ИС =0,00185; ОС =0,0032					

Из таблицы 7 видно, что в наибольшей степени критерию удовлетворяет полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-40 CH-4 (относительная оценка – 0,77773), так как это масло сохраняет защитные свойства при высоких температурах и предохраняет двигатель от износа. Гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4 и минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF имеют значительно более низкие оценки.

Для определения оптимальной альтернативы (вида моторного масла) необходимо совершить синтез глобальных приоритетов. Обобщенные веса альтернативных вариантов масел определяется суммой произведений векторов приоритетов каждого вида моторного масла по каждому критерию на значимость этого критерия (табл. 8).

Таблица 8

Матрица глобальных приоритетов по выбору моторных масел

Вид моторного масла	1. Цена	2. Условия эксплуатации	3.. Индекс вязкости	4. Щелочное число	5. Кинематическая вязкость	Результирующий вектор
Важность критерии при выборе	0,466	0,283	0,046	0,045	0,16	
Векторы приоритетов альтернатив по критериям						
1. Гидрокрекинговое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-30 DH-4	0,069	0,722	0,75	0,199	0,11113	0,2977
2. Полусинтетическое масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 10W-40 CH-4	0,244	0,205	0,125	0,065	0,77773	0,3048
3. Минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF	0,687	0,073	0,125	0,736	0,11113	0,3975

Из проведенного анализа видно, что наиболее оптимальным выбором по совокупности критериев для использования в ДВС тяжелой гусеничной горной техники является минеральное масло KOMATSU DIESEL ENGINE OIL EO 15W-40 CF, поскольку имеет наибольшую возведенную оценку по ведущему критерию – цена, что позволяет горнодобывающим предприятиям существенно сократить расходы на смазочные материалы. А такие недостатки этого вида масла, как узкий температурный диапазон применения, возможно снять путем оборудования техники предпусковым подогревом.

Таким образом, применение математических методов и моделей позволяет оптимизировать принятие сложных и ресурсоемких решений в технической сфере, опираясь в выборе на аналитические расчеты а не на интуицию, что безусловно повышает качество решений.

Список литературы

1. Андрейчиков А.В. Анализ, синтез, планирование решений в экономике / А.В. Андрейчиков, О.Н. Андрейчиков. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 464 с. EDN SUOFCР
2. Карташов А.В. Анализ показателей технического состояния основных производственных фондов горнодобывающей отрасли Магаданской области / А.В. Карташов // Столыпинский вестник: научный рецензируемый сетевой журнал. – 2024. – №6.
3. Чичкарёв Е.А. Компьютерная математика с Maxima: руководство для школьников и студентов / Е.А. Чичкарёв. – М.: ALT Linux, 2012. – 384 с.
4. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати, К. Кернс. – М.: Радио и связь, 1989. – 316 с.
5. Статистический ежегодник «Магаданская область – 2024». Раздел 12 «Основные фонды»: сайт / Управление федеральной службы государственной статистики по Хабаровскому краю, Магаданской области, Еврейской автономной области и Чукотскому автономному округу [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://27.rosstat.gov.ru/folder/66943> (дата обращения: 10.05.2025).