

Алиева Химисай Могомедганифаевна

учитель

ГБОУ «Республиканский физико-математический

лицей-интернат им. М.К. Абаева»

г. Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ В СТЕРЕОМЕТРИИ

Аннотация: в статье рассматриваются основные методы построения сечений многогранников в стереометрии. Описываются ключевые подходы к решению задач на построение сечений: метод следов, метод внутреннего проектирования и комбинированный метод. Для каждого метода приведены базовые принципы и алгоритмы действий, указаны ситуации, в которых тот или иной метод наиболее эффективен. Отдельное внимание уделено практическому применению методов при решении задач, в том числе встречающихся в ЕГЭ по математике.

Ключевые слова: сечение многогранника, секущая плоскость, метод следов, метод внутреннего проектирования, комбинированный метод, стереометрия, построение сечений, задачи ЕГЭ по математике.

Стереометрия – это раздел геометрии, который изучает формы и свойства фигур в пространстве. Одной из важнейших тем стереометрии является построение сечений многогранников. Сечения позволяют лучше понять геометрические свойства фигур, а также наглядно продемонстрировать их структурные особенности. В данной статье мы рассмотрим основные методы построения сечений, которые широко используются при решении задач различной сложности, включая примеры, которые могут встречаться в контексте ЕГЭ по математике.

Метод следов является одним из самых распространённых и простых в освоении способов построения сечений многогранников. Этот метод основан на нахождении «следа» – линии, по которой секущая плоскость пересекает плоскость грани многогранника. Он позволяет не только проиллюстрировать про-

цесс сечения фигуры, но и помогает визуализировать пространственные формы, что крайне важно для понимания геометрических отношений.

В процессе работы с методом следов, основным шагом является то, что необходимо заранее определить плоскость, которую будет пересекать многогранник. Эта плоскость идентифицируется и визуализируется в пространстве. Как только секущая плоскость установлена, можно переходить к нахождению точек пересечения этой плоскости с гранями многогранника. Конечно же, для этого потребуется использовать простые правила, которые позволяют эффективно строить следы.

Основные правила метода следов:

– определение точек пересечения: если секущая плоскость проходит через две точки на одной грани многогранника, то для этих точек проводится прямая, которая называется след. Этот след будет являться частью сечения и основой для дальнейших построений;

– след на основании: важно указать, что след на основании многогранника может помочь определить точки пересечения с боковыми гранями. Например, если след поднимается из двух точек в верхней грани, необходимо продолжить его линию вниз, чтобы найти пересечения с боковыми гранями;

– продолжение линий: для получения всех необходимых результатов может потребоваться продолжение линий, пока они не достигнут рёбер многогранника. Это важно для точного нахождения всех точек, которые будут формировать сечение.

Рассмотрим пример с прямоугольной призмой. Пусть есть призма с размерами $4 \text{ м} \times 3 \text{ м} \times 2 \text{ м}$, секущая плоскость проходит через точки $A(1, 2, 2)$ и $B(3, 2, 2)$ на верхней грани. Эти две точки определяют след, который у нас получится на плоскости.

После нахождения линии следа, важно выявить, как он пересекается с боковыми гранями призмы. Например, такой след в дальнейшем может пересекать боковые грани в точках C и D , которые мы можем обозначить координатами по отношению к летучей призме. Подсчет координат сечений позволяет

видеть, как секущая плоскость формирует сечение, в данном случае – параллелограмм.

Другим удачным примером применения метода следов является расчёт сечения тетраэдра. Если находим след тетраэдра, который проходит через две его вершины, то необходимо отметить его пересечение с боковыми гранями. Результатом будет треугольное сечение, которое совмещает все точки пересечения и позволяет наглядно представить геометрическую структуру тетраэдра в условиях сечения.

Метод следов также находит широкое применение в школах при изучении стереометрии, позволяя учащимся пробовать создавать различные фигуры и понимать, как секущие плоскости взаимодействуют с многогранниками. Это простое, но в то же время мощное средство укрепляет понимание трехмерной геометрии у учащихся.

Метод внутреннего проектирования – это важный инструмент в стереометрии, который используется для построения сечений многогранников. Этот метод заключается в проектировании точек сечения на плоскость основания многогранника и особенно полезен в случаях, когда применение метода следов оказывается затруднительным из-за особенностей геометрической конфигурации фигуры.

Суть метода внутреннего проектирования заключается в том, что вместо поиска пересечения секущей плоскости с гранями многогранника, мы проецируем точки пересечения на основание многогранника или другую вспомогательную плоскость. Такой подход позволяет упростить процесс построения, особенно в ситуациях, когда сечение проходит через несколько граней сразу или если секущая плоскость располагается под углом к рёбрам.

Метод внутреннего проектирования можно подразделить на два основных вида:

1) центральное проектирование: Это метод, который применяется в основном для пирамид. В этом случае проекция выполняется от центральной точки (вершины) пирамиды к основанию. Например, если у нас есть квадратная пи-

рамида, мы можем проецировать точки сечения на основание, используя вертикальные линии из точек сечения до основания. Такой метод позволяет быстро находить координаты и определять, как сечение будет выглядеть на основании;

2) параллельное проектирование: Этот подход чаще всего используется для призм и других тел, где основания имеют параллельные плоскости. Здесь проекция точек сечения происходит параллельно, что делает возможным простое нахождение проекций на основание и дальнейшую работу с ними. Например, в трехугольной призме, если секущая плоскость проходит параллельно основанию, мы можем легко увидеть, как точки будут пересекаться.

Пример 1. Со стороны пирамиды. Рассмотрим квадратную пирамиду с высотой 3 м и основанием $4 \text{ м} \times 4 \text{ м}$. Если секущая плоскость расположена на высоте 1 м от основания, мы можем проецировать точки пересечения этой плоскости на основании. Мы можем обозначить точки пересечения секущей плоскости с боковыми гранями, затем провести перпендикуляры до основания, чтобы получить проекции. Это упрощает визуализацию сечения, которое будет прямоугольником или квадратом в зависимости от угла наклона плоскости.

Пример 2. Призма. В треугольной призме, если секущая плоскость проходит через грани и сложна для анализа с использованием метода следов из-за угла наклона, внутреннее проектирование может помочь проецировать точки пересечения прямо на основание. Поскольку основание равнобедренного треугольника, мы увидим, что эти точки создают параллельные линии, которые мы затем можем соединить для формирования сечения, что наглядно определит форму и характеристики этого сечения.

Комбинированный метод является одним из наиболее эффективных подходов к построению сечений многогранников, так как он объединяет в себе элементы методов следов и внутреннего проектирования. Этот метод особенно полезен в случаях, когда применение одного из методов оказывается недостаточным для получения полноценного решения задачи. Используя комбинированный подход, можно максимально эффективно реализовать все доступные ресурсы и инструменты для анализа и визуализации пространственных фигур.

Основной принцип комбинированного метода заключается в том, чтобы применить преимущества каждого из двух методов в зависимости от особенностей рассматриваемого многогранника и характеристик секущей плоскости. Это позволяет не только упростить процесс построения сечений, но и получить более полное понимание форм и взаимосвязей многогранной структуры.

Порядок действий обычно состоит из следующих этапов.

1. Определение секущей плоскости. Первоначально статус секущей плоскости устанавливается, и определяется её положение относительно многогранника. Это может включать как метод следов для нахождения точек пересечения с гранями, так и метод внутреннего проектирования для проецирования необходимых точек на основание.

2. Использование метода следов. В том случае, если секущая плоскость пересекает грани многогранника, следует сначала построить следы согласно методу следов. Это позволяет быстро определить границы сечения, образованного пересечением с гранями.

3. Применение метода внутреннего проектирования. Если из-за геометрических особенностей следы на точно не удается определить, или секущая плоскость проходит параллельно некоторым рёбрам, тогда активно используется метод внутреннего проектирования для нахождения проекций. Это может быть особенно эффективно в случаях, когда следы нельзя провести таким образом, чтобы они точно определяли сечение.

4. Проверка и коррекция. После получения первых результатов необходимо проверить, насколько точны полученные точки сечения и соответствуют ли они геометрии многогранника. В случае необходимости можно уточнить проекции или следы, используя один метод для корректировки результатов другого.

Пример 1. Сечение сложного многогранника. Рассмотрим сложное тело, состоящее из нескольких пирамид, стоящих на основании. Если секущая плоскость пересекает две верхние грани этих пирамид, то первоочередно можно использовать метод следов для нахождения их пересечений. Затем, если секущая

плоскость продолжает движение, и в определенных местах возникает затруднение в определении следов (например, если она проходит под острым углом к граням), можно использовать метод внутреннего проектирования для нахождения точек пересечений на основании. Этот способ обеспечивает более точный результат и не теряет информации о структуре многогранника.

Пример 2. Комбинация методов у многогранника. Рассматриваем куб, секущая плоскость которого проходит через две противолежащие вершины и касается одной из граней. Этот случай может быть сложным для метода следов, так как требуется определить не только пересечения, но и углы. Применив метод следов, мы сначала нашли точку пересечения на одной грани. Затем можем по аналогии использовать внутреннее проектирование для других граней. Эффективность комбинированного метода проявляется в том, что он позволяет легко адаптироваться к сложным геометрическим ситуациям, предоставляя учащимся множество инструментов для более творческого подхода к решению задач.

Координатный метод является мощным инструментом в стереометрии, который основывается на использовании системы координат для анализа многогранников. Этот метод позволяет задействовать алгебраические методы в геометрии, сводя построение сечения к нахождению координат точек пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника. Такой подход делает расчеты более точными и наглядными, что особенно важно в сложных задачах.

Координатный метод требует предварительного размещения многогранника в трехмерной декартовой системе координат, где каждое ребро и грань многогранника могут быть описаны с использованием координат.

Первым этапом является определение координат всех вершин многогранника, что делает его возможным для дальнейшего анализа. Например, для куба с длиной ребра 2 единицы и одной вершиной в начале координат его вершины могут быть: (0,0,0), (2,0,0), (2,2,0), (0,2,0), (0,0,2), (2,0,2), (2,2,2), (0,2,2).

Следующим шагом является задание уравнения секущей плоскости. Секущая плоскость может быть задана уравнением, которые задают ориентацию и

положение плоскости в пространстве. Например, для плоскости, параллельной одной из осей и проходящей через определенную точку, коэффициенты могут принимать простые значения.

Пример 1. Сечение куба. Рассмотрим куб со стороной 2, расположенный в координатной системе так, что его одна вершина находится в начале координат. Координаты вершин куба будут:

- A(0,0,0);
- B(2,0,0);
- C(2,2,0);
- D(0,2,0),
- E(0,0,2),
- F(2,0,2),
- G(2,2,2),
- H(0,2,2).

Если секущая плоскость задана уравнением $x+y+z=2$, то для определения точек пересечения необходимо рассмотреть каждое ребро куба, определив параметрические уравнения для каждого из них, и подсчитать, при каких значениях параметра (если таковые есть) достижимо равенство уравнению плоскости.

Построение сечений многогранников – это важная тема стереометрии, имеющая практическое значение, особенно в контексте подготовки к ЕГЭ. Наиболее эффективными и широко применяемыми методами являются метод следов и метод внутреннего проектирования; их комбинация позволяет решать большинство задач, возникающих на практике. Координатный метод представляет собой перспективный подход для решения более сложных случаев, хотя требует определенных знаний в области аналитической геометрии.

Успешное освоение методов построения сечений требует охвата теоретического бэкграунда в стереометрии и отработки различных алгоритмов на практике. Использование наглядных моделей (как каркасных, так и объемных) и ICT-инструментов, таких как GeoGebra, может значительно повысить эффективность изучения темы.

тивность обучения и понимания стереометрических задач. Эти методы следует активно использовать в образовательных учреждениях, чтобы подготовить будущих специалистов к реальным задачам, с которыми они могут столкнуться в своей деятельности.

Список литературы

1. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений с углублённым и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2008.
2. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углублённым и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич.
3. Демонстрационные, диагностические и тренировочные варианты ЕГЭ (2009–2014 гг.).
4. Методические пособия по стереометрии и подготовке к ЕГЭ.
5. Мерзляк А.Г. Геометрия 10 класс. Углубленный уровень: учебник / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков.