

*Михалёв Дмитрий Александрович*

бакалавр, студент

*Головин Алексей Александрович*

бакалавр, студент

*Научный руководитель*

*Сергеев Александр Эдуардович*

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный

университет им. И.Т. Трубилина»

г. Краснодар, Краснодарский край

## **ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ К ЗАДАЧАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ**

*Аннотация: в статье рассматривается принцип Дирихле – базовое утверждение дискретной математики о неизбежности перегрузки при распределении большего числа объектов по меньшему числу контейнеров. Показано его применение в современных задачах распределения ресурсов (сети, облака, распределённые системы) для получения строгих оценок перегрузки. Описаны ключевые направления развития: многомерные обобщения, конструктивные алгоритмы и вероятностные модели. Подчёркивается значимость принципа как теоретического фундамента для проектирования эффективных вычислительных систем.*

*Ключевые слова: принцип Дирихле, распределение ресурсов, компьютерные сети, вычислительные системы, комбинаторика.*

Принцип Дирихле, являющийся одним из базовых инструментов дискретной математики, представляет собой чрезвычайно простое по формулировке, но мощное по содержанию утверждение: если некоторое количество объектов превышает количество контейнеров, в которые их распределяют, то по крайней мере один контейнер неизбежно будет содержать не менее двух объектов. В обобщённой форме это утверждение расширяется на случай распределения большего числа объектов по контейнерам с ограниченной ёмкостью. Именно эта простота

формулировки, соединённая с универсальностью, делает принцип фундаментальной основой для решения широкого спектра задач, от классических теорем теории чисел до анализа структур графов и доказательств существования определённых конфигураций, относящихся к системам общих представителей, покрывающим множествам, неравномерным разбиениям и т. д. В монографии А.М. Райгородского «Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения» подробно рассказывается о многочисленных формах принципа, играющего роль отправной точки для теорем существования в задачах представлений и покрытий. Однако в последние десятилетия принцип Дирихле проявил свою значимость и в прикладных областях, прежде всего в задачах распределения ресурсов, характерных для компьютерных сетей, распределённых вычислительных систем, облачных платформ, графовых моделей взаимодействия, где возникает необходимость доказать, что при определённых условиях перегрузка или неравномерность распределения неизбежны, а также определить границы эффективности алгоритмов. Рост объёмов данных, усложнение взаимосвязей между подсистемами, увеличение нагрузки на вычислительные кластеры и сетевую инфраструктуру – всё это делает актуальным глубокий математический анализ механизмов распределения ресурсов и поиски теоретически обоснованных алгоритмов.

Рассмотрим общую математическую постановку задач распределения ресурсов. Пусть имеется множество ресурсов  $R$ , множество запросов  $Q$  и отображение распределения  $f: Q \rightarrow R$ , которое присваивает каждому запросу конкретный ресурс. Если объём множества  $Q$  сравнительно велик, то возникает естественная потребность установить, при каких параметрах системы возможно равномерное распределение нагрузки, а при каких – принципиально невозможно, независимо от выбранной стратегии. Принцип Дирихле позволяет сформулировать нижнюю оценку перегрузки: если количество запросов превышает сумму ёмкостей ресурсов, то при любом распределении существует перегруженный ресурс. Именно эта фундаментальная оценка лежит в основе анализа устойчивости и предельных свойств алгоритмов балансировки нагрузки. Например, в работах

по распределению задач в сетевых системах (Дидрих, 2016; Ерёмин и др., 2023) показано, что даже сложные техники графового разбиения, основанные на алгоритме Кернигана – Лина, в своей сути опираются на базовые дискретные ограничения, совпадающие по духу с принципом Дирихле: если множество задач слишком велико по сравнению с количеством вычислительных узлов, то некоторая степень неравномерности неизбежна. Именно поэтому важным направлением развития методов распределения ресурсов является получение расширенных форм принципа Дирихле для систем с неоднородными характеристиками. Рассмотрим конкретный теоретический пример. Пусть каждому ресурсу  $r_i$  соответствует ёмкость  $c_i$ , а каждый запрос имеет единичную нагрузку. Тогда простейшее обобщение принципа Дирихле утверждает: если количество запросов больше суммы всех  $c_i$ , то перегрузка неизбежна. Однако в многомерных задачах, например при распределении запросов, имеющих разные потребности по CPU, памяти, пропускной способности и задержке, возникает необходимость развивать многомерную версию принципа, в которой контейнеры характеризуются вектором ёмкостей, а перегрузка определяется по норме или метрике. Такой подход активно исследуется в задачах упаковки, планирования и размещения виртуальных машин, однако в существующей научной литературе отсутствует универсальная обобщённая теорема, аналогичная классическому формулированию принципа Дирихле.

Многие исследователи, включая авторов работ по облачным вычислениям (Ламановский, 2024) и системам высокопараллельной обработки данных (Багутдинов, 2024), подчеркивают, что существующие алгоритмы нередко остаются эвристическими, а строгие оценки, гарантирующие качество загрузки в худшем случае, доступны лишь для упрощённых моделей. На практике это означает, что разработчики распределённых систем часто используют методы, основанные на локальных данных о нагрузке, статистических предсказаниях или динамической миграции задач, но не имеют строгих гарантий конечного результата. В таких условиях дискретно-математические оценки, выведенные из принципа Дирихле,

могут служить ориентиром при проектировании систем, поскольку дают минимальные гарантии: если нагрузка превышает предельную величину, то никакой алгоритм не сможет избежать перегрузки; если же она ниже определённого порога, то существует распределение, в котором перегрузки нет, и задача состоит лишь в том, чтобы найти его конструктивным образом.

Перспективным направлением является переход от чисто существующих оценок к конструктивным теоремам: это означает, что помимо доказательства факта существования распределения, необходимо построить алгоритм, который осуществляет такое распределение эффективно. Например, одной из задач является доказательство теоремы следующего вида: если суммарная нагрузка не превышает сумму ёмкостей ресурсов более чем на некоторую величину  $\epsilon$ , то существует алгоритм перераспределения, гарантирующий ограничение нагрузки каждого ресурса функцией от  $\epsilon$ . В другой важной задаче стремятся установить минимальное число перегруженных ресурсов при заданных параметрах системы. Теоретические результаты подобного рода уже встречаются в работах о представителях множеств (Райгородский, 2009), где принципы распределения элементов по множествам имеют формальную связь с задачами распределения нагрузки, поскольку обе области используют одни и те же комбинаторные идеи: множество объектов должно быть разложено таким образом, чтобы обеспечить равномерность или избежать пересечений. Подобные аналогии помогают перенести методы одной области в другую.

Также важным направлением является исследование алгоритмов, которые сочетают комбинаторные ограничения с вероятностными механизмами. Если входящие запросы имеют случайную природу, то требуется моделирование на основе вероятностных оценок, включая неравенства концентрации, вероятностные аналоги принципа Дирихле и методы теории массового обслуживания. В этом контексте можно строить стохастические аналоги теорем вида: с высокой вероятностью при использовании случайного распределения нагрузка не превы-

сит заданного порога, если средняя загрузка ниже определённого значения. Такие подходы активно развиваются в современных вычислительных системах, где поток запросов редко бывает равномерным.

Одной из наиболее перспективных областей, где применение принципа Дирихле и его обобщений может оказаться особенно эффективным, является разработка алгоритмов управления ресурсами для больших распределённых баз данных, контейнеризированных сред и многокомпонентных облаков. В условиях, где требуется обеспечить согласованность, надёжность и низкие задержки при большом количестве параллельных клиентов, возможность формального анализа гарантирует значительную экономию ресурсов и повышение устойчивости. В работах по высоконагруженным системам (Ерёмин и др., 2023) уже отмечается, что математические методы управления нагрузкой становятся критично важными для промышленной эксплуатации таких систем.

Принцип Дирихле, несмотря на многовековую историю и кажущуюся элементарность, остаётся мощным инструментом для анализа задач распределения ресурсов. Его простая логическая структура позволяет получать фундаментальные нижние оценки, которые справедливы независимо от сложности алгоритмов, динамики системы и неоднородности ресурсов. Хотя классическая формулировка принципа даёт лишь существующие оценки, его расширения и обобщения открывают возможность создания строгих, теоретически обоснованных методов распределения ресурсов, адаптируемых к современным требованиям вычислительных систем. На стыке дискретной математики, теории алгоритмов и инженерии распределённых систем существует огромный потенциал для дальнейшего развития: создание многомерных расширений принципа, разработка конструктивных алгоритмов с доказуемыми гарантиями качества, построение гибридных детерминированно-вероятностных систем перераспределения нагрузки и интеграция этих методов в промышленную практику. Всё это делает направление исследований, связанное с применением принципа Дирихле в задачах распределения ресурсов, актуальным и перспективным.

## ***Список литературы***

1. Райгородский А.М. Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения / А.М. Райгородский; МЦНМО. – 2009. – EDN RAXVXF
2. Дирих В.Е. Задача распределения ресурсов в сетевой информационной системе / В.Е. Дирих. – 2016.
3. Ламановский М.Н. Балансировка нагрузки облачных вычислений / М.Н. Ламановский. – 2024.
4. Принцип Дирихле и его применение в машинном обучении / Д.Е. Спариш, А.А. Кудрявцев [и др.]. – 2024.
5. Балансировка распределённой высоконагруженной системы с использованием алгоритма Кернигана-Лина / О.Ю. Ерёмин, И.Б. Трамов [и др.]. – 2023.