Садовников Николай Владимирович

д-р пед. наук, доцент, профессор

Султанова Галия Алиевна

канд. физ.-мат. наук, преподаватель

Кузовникова Анна Владимировна

преподаватель

Филиал ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Министерства обороны Российской Федерации в г. Пензе

г. Пенза, Пензенская область

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ВОЕННО-ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРА НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Аннотация: *в статье выявлены методические особенности решения оптимизационных задач военно-прикладного характера двух основных видов. Первый вид связан с нахождением условий, при которых достигается экстремальное значение величины, выраженной функционально. При этом сама функция (как модель) уже получена. Второй вид задач акцент делает на формирование умений по составлению математической модели. В зависимости от этих видов оптимизационных задач будут смещаться и методические акценты при работе над ними.*

Ключевые слова: *оптимизационная задача, линейное и нелинейное программирование, математическое моделирование, методы дифференциального исчисления, аналитический метод, внутримодельное решение, критическая точка, необходимое условие экстремума функции одной переменной, достаточное условие экстремума функции одной переменной.*

Под оптимизационными будем понимать такие задачи, в которых исследуются *условия,* при которых искомая величина принимает максимальное или минимальное (т. е. оптимальное) в конкретной ситуации значение. Помимо установления таковых условий задача может включать в себя и нахождение собственно этих оптимальных значений величины.

В курсе высшей математики вуза можно выделить два основных метода решения оптимизационных задач – метод линейного/нелинейного программирования и метод на основе дифференциального исчисления.

В статье рассмотрим подход к решению оптимизационных задач с использованием методов дифференциального исчисления функции одной или нескольких переменных.

Поскольку задачи оптимизации являются, по существу, критическими задачами, то на первом этапе решения возникает необходимость перевода ее на математический язык, что означает поиск функциональной зависимости, отображающей математическую модель ситуации, описываемой в условии задачи. На втором реализуется внутримодельное решение поставленной задачи средствами дифференциального исчисления. Третий этап – это обратный переход, когда полученное математическое решение интерпретируется в терминах исходной практической задачи.

Ситуацию, описанную в задаче возможно воспроизвести с привлечением разнообразных математических структур: от уравнения с одной переменной в простейшем случае до дифференциальных, интегральных уравнений и их систем. Приоритет в выборе модели отдают наиболее простой из возможных, что позволяет избежать трудностей во внутримодельном решении на втором этапе. Например, почти всегда есть возможность перейти от модели в виде функции двух переменных или системы двух уравнений с двумя переменными к модели в виде функции одной переменной. Пусть эта функция будет более сложного вида, но операционально ее решение будет проще, чем решение модели в виде функции с двумя переменными или в виде системы уравнений. В соответствии с полученной математической моделью выбирается метод решения.

Рассмотрим решение военно-прикладной задачи на определение оптимальных условий заряжания для обеспечения наименьшего веса заряда реактивного двигателя.

Задача 1. Общее выражение для веса g реактивного снаряда имеет вид:

$$g = \omega_p + g_{\text{п}},$$

здесь ω_p – вес порохового заряда:

$$\omega_p = \frac{\pi}{4} D_{\text{н}}^2 B^2 \delta \varepsilon L,$$

$g_{\text{п}}$ – пассивный вес снаряда:

$$g_{\text{п}} = g_{\text{гч}}(1 + k_c) + \frac{\pi}{4} k_L \rho D_{\text{н}}^2 (1\text{-В})^2 L.$$

Найти, при каких значениях параметра заряжания ε ($\varepsilon \in (0; 1)$) можно получить двигатель с наименьшим весом пороха, если зависимость длины L пороховой шашки имеет вид:

$$L = \frac{\varkappa \text{В} D_{\text{н}}}{4\sqrt{n_1}} \cdot \frac{1\text{-}\varepsilon}{\sqrt{2\text{-}\varepsilon}}.$$

Примечание. В данных формулах все величины, кроме ε и L, будут постоянными. Они являются конструктивными характеристиками двигателя и порохового заряда:

$\varkappa$ – критерий устойчивости горения пороха в камере двигателя,

n_1 – число пороховых шашек в заряде,

$D_{\text{н}}$ – наружный диаметр зарядной камеры реактивного двигателя,

В – параметр, характеризующий качество спроектированного двигателя,

δ – плотность пороха,

$g_{\text{гч}}$ – вес головной части взрывателя,

ρ – удельный вес материала двигателя,

k_c, k_L – коэффициенты пропорциональности.

Решение.

В математической модели задачи только две величины ε и L будут переменными. Причем каждому значению ε отвечает своя длина L зарядной камеры, т. е. длина L есть функция от ε. Следовательно, надо определить оптимальную величину $\varepsilon_{\text{опт}}$, соответствующую наименьшему весу порохового заряда.

Для упрощения записей выполним замену:

$$a_1 = \frac{\pi}{4} D_{\text{н}}^2 B^2 \delta,\ a_2 = \frac{\pi}{4} k_L (1\text{-}B^2) \rho,\ a_3 = g_{\text{гн}}(1 + k_c),$$

тогда

$$\omega_p = a_1 \varepsilon L \text{ и } g_n = a_3 + a_2 L,$$

где a_1, a_2, a_3 – постоянные величины.

Составим функцию *y(ε)*, выражающую относительный вес заряда:

$$y(\varepsilon) = \frac{\omega_p}{g_n} = \frac{a_1 \varepsilon L}{a_3 + a_2 L}.$$

Дифференцируем функцию по переменной ε:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = a_1 \frac{(L + \varepsilon L')(a_3 + a_2 L) - \varepsilon L a_2 L'}{(a_3 + a_2 L)^2} = a_1 \frac{a_3 L + a_2 L^2 + a_3 \varepsilon L'}{(a_3 + a_2 L)^2}.$$

Найдем критические точки. Если $\frac{dy}{d\varepsilon} = 0$, то:

$$a_3 L + a_2 L^2 + a_3 \varepsilon L' = 0.$$

Решив данное уравнение относительно ε, получим:

$$\varepsilon_0 = -\frac{a_3 L + a_2 L^2}{a_3 L'}.$$

Так как величины a_2, a_3, L – положительные, то L'<0 или ε_0<0. Но по условию $\varepsilon \in (0; 1)$ и, значит ε_0>0, поэтому L'<0. Итак, ε_0 – критическая точка функции *y(ε)*. $\varepsilon_0 \in (0; 1)$ при L'<0.

Составим таблицу:

ε	$(0;\ \varepsilon_0)$	ε_0	$(\varepsilon_0; 1)$
$y'(\varepsilon)$	—	0	+
y	↘	min	↗

Производная y' при переходе через критическую точку ε_0 меняет знак с минуса на плюс, поэтому ε_0 – точка минимума функции *y(ε),* следовательно, ε_0 – точка минимума функции ω_p. Так как на интервале (0; 1) функция ω_pи имеет единственный минимум, то в точке ε_0 функция ω_p на интервале (0; 1) достигает наименьшего значения.

Итак, наименьший вес порохового заряда достигается при $\varepsilon_{\text{опт}}$:

$$\varepsilon_{\text{опт}} = -\frac{a_3 L + a_2 L^2}{a_3 L'},$$

откуда

$$\frac{a_2}{a_1} = -\frac{L + L'\varepsilon_{\text{опт}}}{L^2}.$$

Так как $\frac{dL}{d\varepsilon} < 0$, то с увеличением ε длина порохового заряда уменьшается (на это указывает знак минус в выражении для $\varepsilon_{\text{опт}}$).

Из полученного ответа исключим L, L'.

Выполнив замену:

$b = \frac{\varkappa B D_n}{4\sqrt{n_1}}$ (b – постоянная величина),

получим

$$L(\varepsilon) = \frac{b(1-\varepsilon)}{\sqrt{2-\varepsilon}}.$$

Дифференцируем функцию по переменной ε:

$$\frac{dL}{d\varepsilon} = b\frac{-\sqrt{2-\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{2-\varepsilon}}}{2-\varepsilon} = \frac{b(\varepsilon-3)}{2(2-\varepsilon)\sqrt{2-\varepsilon}}.$$

Подставим значение L и $\frac{dL}{d\varepsilon}$ в условие наименьшего веса заряда:

$$\frac{a_2}{a_3} = -\left(\frac{b(1-\varepsilon)}{\sqrt{2-\varepsilon}} + \frac{b\varepsilon(\varepsilon-3)}{2(2-\varepsilon)\sqrt{2-\varepsilon}}\right)\frac{2-\varepsilon}{b^2(1-\varepsilon)^2}.$$

Упростив это выражение, найдем:

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{9\varepsilon-3\varepsilon^2-4}{2b(1-\varepsilon)^2\sqrt{2-\varepsilon}}.$$

Умножив выражение на b и подставив его значение, получим ответ задачи:

$$N = \frac{a_2 \varkappa B D_{\text{н}}}{a_3 4\sqrt{n_1}} = \frac{9\varepsilon-3\varepsilon^2-4}{2(1-\varepsilon)^2\sqrt{2-\varepsilon}}.$$

N – условие наименьшего веса ω_p порохового заряда при оптимальном значении параметра заряжания ε.

Примечание. Аналитическое решение данного уравнения относительно ε для практического применения оказывается слишком громоздким, поэтому для определения $\varepsilon_{\text{опт}}$ используют графический метод. Строят график функции $N = f(\varepsilon)$ (рис. 1). По данным значениям проектных параметров необходимо рассчитать величину N, а затем по графику функции $N = f(\varepsilon)$ восстанавливают $\varepsilon_{\text{опт}}$. Полученная таким образом величина $\varepsilon_{\text{опт}}$ используется затем для определения требуемого веса пороха.

Решение данной оптимизационной задачи было упрощено тем, что не было необходимости составления математической модели ситуации, описываемой в условии (модель была уже задана). Поэтому ее решение начинается со второго этапа – с внутримодельного решения. Главное для курсантов на этом шаге определить, в чем состоит математическая суть исследования этой модели: необходимо найти критические точки заданной функции и выбрать ту из них, в которой функция принимает минимальное значение.

Важным является третий этап решения практической (военно-прикладной) задачи, состоящий в записи ответа на языке исходной задачи, т. е. в терминах, описывающих ракетно-артиллерийское вооружение (РАВ). Поскольку задача реализовывалась на практическом занятии по высшей математике, то методические акценты были смещены в сторону второго и третьего этапов ее решения. Собственно составление модели этой задачи представляет достаточно сложное исследование, чтобы этим заниматься на практическом занятии по высшей математике.

Для формирования навыков составления математических моделей реальных процессов или ситуаций военного дела, что важно для подготовки военных инженеров, можно предложить следующую задачу.

Задача 2. Первая артиллерийская батарея находится в пункте О (0; 0), вторая батарея – в пункте А, что в 30 км к северу от О, третья – в пункте В, что в 30 км к востоку от О. Все батареи должны прибыть в пункт С, лежащий к северо-востоку от О, для получения боевой задачи. Определить пункт сбора таким образом, чтобы расстояние, пройденное всеми батареями, было наименьшим.

В статье не будем подробно описывать решение задачи, а ограничимся методическими рекомендациями по осуществлению первого этапа работы над ней – составлению математической модели ситуации, описанной в условии задачи.

Условие задачи наталкивает на описание ситуации средствами аналитической геометрии. На этом этапе важно выбрать начало координат для получения наиболее рационального вида математической модели, которая в данной задаче представляет собой функцию двух переменных z (x, y). По возможности надо перейти к модели в виде функции одной переменной. При составлении этой модели курсанты вспоминают многие факты аналитической геометрии: координаты точки в ПДСК, формулы расстояния между двумя точками, заданными своими координатами, тождественные преобразования алгебраических выражений, равносильные преобразования уравнений, уравнения различных геометрических фигур, умение видеть за уравнением реальный геометрический образ и т. д.

На этапе внутри модельного решения данная задача будет «стандартной» задачей на нахождение точек минимума функции на определенном интервале.

Заключительный этап состоит в записи ответа на исходном языке задачи: все батареи должны собраться в точке C с координатами $(15-5\sqrt{3}; 15-5\sqrt{3})$, т.е. C(6,35; 6,35).

Рассмотрим некоторые методические особенности решения военно-прикладной задачи, важной с позиций практического использования формулы, моделирующей реальную ситуацию, возникающую при взрыве.

Задача 3. В практике инженерных расчетов для определения объема воронки выброса грунта, образующейся при разрыве снаряда, используется зависимость:

$$W = \left[\beta \frac{0{,}034D^2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} + 3\frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{в}}}} \left(\frac{\omega}{\rho_{\text{в}}}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} H^{\frac{4}{3}} - \beta H^3,$$

где W – объем воронки выброса, H – глубина воронки выброса.

Найти оптимальную величину углубления снаряда, при которой объем воронки выброса будет максимальным, и указать максимальное значение объема воронки выброса. Величину углубления снаряда считать равной глубине воронки выброса. Все величины в формуле, кроме H и W, считать постоянными.

Примечание. Все величины в формуле являются конструктивными характеристиками снаряда, свойствами взрывчатых веществ и среды:

D – скорость детонации взрывчатых веществ;

α – коэффициент наполнения;

β – коэффициент массовой нагрузки;

ω – масса снаряда;

$\rho_{\text{гр}}$ – плотность грунта;

$\rho_{\text{в}}$ – плотность взрывчатых веществ.

Для выбранной модели снаряда конструктивные характеристики являются постоянными величинами.

Решение.

Так как выражение $\left[\beta \frac{0{,}034D^2}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}+3\frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{в}}}}\left(\frac{\omega}{\rho_{\text{в}}}\right)^{\frac{4}{3}}\right]$ не зависит от H, выполним замену:

$$b = \left[\frac{0{,}034D^2}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}+3\frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{в}}}}\left(\frac{\omega}{\rho_{\text{в}}}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{3}},$$

тогда

$$W = \beta\left(bH^{\frac{4}{3}}-H^3\right),$$

где b – постоянная.

Дифференцируем функцию по переменной H:

$$W' = \beta\left(\frac{4}{3}bH^{\frac{1}{3}}-3H^2\right) = \beta H^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4}{3}b-3H^{\frac{5}{3}}\right).$$

Найдем критические точки. Если W'=0, то $\frac{4}{3}b-3H^{\frac{5}{3}} = 0$ или H=0, но при H=0 воронки выброса не существует (противоречит условию задачи), при $\frac{4}{3}b-3H^{\frac{5}{3}} = 0$ имеем $H_0 = \left(\frac{4}{9}b\right)^{\frac{3}{5}} \approx 0{,}615b^{\frac{3}{5}}$. Итак, H_0 – критическая точка.

Составим таблицу:

H	$(0;\ H_0)$	H_0	$(H_0;\ +\infty)$
W'	+	0	—
W	↗	max	↘

W' при переходе через критическую точку H_0 меняет знак с плюса на минус, поэтому H_0 – точка максимума функции. Подставляя значение H_0 в функцию, получим:

$$W' = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{0,8} \beta b^{1,8} \approx 0,29\beta b^{1,8}.$$

Итак, $W_{max} \approx 0,29\beta b^{1,8}$ при $H_0 \approx 0,615 b^{0,6}$.

Подставляя значение b из замены, получим ответ задачи:

$$H_{\text{опт}} = 0,615\left[\frac{0,034D^2}{\frac{1}{\alpha}\text{-}\frac{1}{2} + 3\frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{в}}}}\left(\frac{\omega}{\rho_{\text{в}}}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{0,2},$$

$$W_{max} = 0,29\beta\left[\frac{0,034D^2}{\frac{1}{\alpha}\text{-}\frac{1}{2} + 3\frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{в}}}}\left(\frac{\omega}{\rho_{\text{в}}}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{0,6}.$$

*Примечание. П*олученные выражения используются в качестве исходных рабочих зависимостей. Они позволяют оценивать конструкцию различных образцов снарядов, т. к. связывают параметры воронки выброса (глубину, объем) с конструктивными характеристиками снаряда, энергетическими возможностями взрывчатых веществ разрывного заряда и свойствами среды.

Список литературы

1. Садовников Н.В. Логико-математические методы в экономике / Н.В. Садовников. – Пенза: Пенз. технол. ин-т, 2003. – 147 с.

2. Соколова З.П. Математика: производная и ее приложения в военно-технических расчетах / З.П. Соколова. – Пенза: ПАИИ, 2009. – 150 с.