Азарян Манушак Борисовна

учитель

МАОУ «СОШ №34 им. 46-го гвардейского ночного

бомбардировочного авиационного Таманского

Краснознамённого полка ордена Суворова»

г. Краснодар, Краснодарский край

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ В ФОРМИРОВАНИИ ЭВРИСТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССОВ

Аннотация: *в статье рассматривается проблема мотивации изучения графиков функций в школьном курсе математики. Анализируются типичные противоречия между алгоритмическими навыками построения графиков и пониманием их эвристической ценности для решения исследовательских задач. Обосновывается роль графиков как мощного инструмента визуализации и генерации контрпримеров в анализе свойств функций. Делается вывод о необходимости смещения акцента с формального построения на применение графиков в творческой математической деятельности.*

Ключевые слова: *функция, график функции, визуализация, исследование функций, производная, контрпример, эвристика, математический билингвизм.*

Один из наиболее важных методических вопросов преподавания математики – это вопрос мотивации изучения конкретного содержания. Наблюдения за учебным процессом показывают, что у школьников нередко возникает внутреннее противоречие. Например, десятиклассник может рассуждать так: «Приступая к построению графиков с помощью производной, учитель говорил нам, что это надо уметь делать для того, чтобы по графику функции видеть ее свойства. Но потом оказалось, что для построения графика эти свойства надо сначала изучить, а если о функции мы уже все знаем, зачем строить ее график?».

Попробуем разобраться в этом вопросе подробнее. Прежде всего, отметим некоторую внутреннюю противоречивость подобного утверждения: ученик ставит вопрос «зачем?», хотя в его же рассуждении уже содержится ответ – чтобы видеть свойства функции. Конечно, это отчасти шутка, но она отражает реальную методическую проблему.

На графике функции действительно наглядно видны такие важные характеристики, как:

− непрерывность на отдельных промежутках;

− промежутки монотонности (возрастания и убывания);

− точки экстремума;

− асимптотическое поведение (стремление к бесконечности);

− поведение в особых точках.

Другими словами, график функции может служить эффективной геометрической иллюстрацией и интерпретацией её свойств. Умение «объединить» алгебраически полученные свойства в единую визуальную картину важно с точки зрения дидактики. Это умение представляет собой частный случай перевода с языка алгебры на язык геометрии, необходимый как будущим физикам и инженерам, так и специалистам гуманитарного профиля [6].

Именно поэтому в основной школе всё большее внимание уделяется задаче «чтения графиков» – переводу с наглядного геометрического языка на строгий язык свойств функций [7]. Однако в профильном курсе математики эта задача не должна быть приоритетной: для соответствующего контингента учащихся визуализация свойств функции должна становиться тривиальной, доведённой до уровня стандарта.

Классический аргумент учителя, приводящийся в споре о построении графиков, относится скорее к обоснованию важности методов математического анализа и, прежде всего, применения производной для исследования функций. Сами графики в этом вопросе служат лишь средством наглядности. Более того, для визуализации свойств функций всё чаще применяются современные компьютерные технологии, интерактивные пакеты математических программ, которые позволяют мгновенно наблюдать изменение графика при варьировании параметров [1; 6].

Основная причина непонимания сути задачи, как показывает практика, заключается в том, что процесс построения графика воспринимается учащимися как специфическое, локальное задание, полученное «со стороны», а не как естественное, «добровольно» применяемое наглядное эвристическое средство для решения других, более содержательных задач [3].

Школьников часто не обучают главному – применению графиков. А ведь только при таком понимании роли графического представления функций в обучении математике можно продуктивно решать методические вопросы:

− о необходимом уровне точности построения;

− о существенных моментах и несущественных деталях графика;

− о выборе способа построения («по точкам» или «по промежуткам»);

− о роли вычислений конкретных значений и составлении таблиц.

Подход к решению этих вопросов должен быть прагматичным: способ выбирается для решения конкретной задачи, а не наоборот.

Главное назначение графиков, на наш взгляд, заключается в их значении для эвристической деятельности. Речь идёт, в частности, о возможности использования вырабатываемого в соответствии с требованиями стандарта «двуязычного» мышления – математического билингвизма, свободного переключения между аналитическим и геометрическим языками описания одной и той же математической реальности.

Наиболее ярко эвристическая роль графического языка проявляется при изучении взаимосвязей между различными свойствами функций с помощью контрольных примеров. На наш взгляд, неправы те учителя, которые ожидают от учащихся и фактически требуют от них приведения соответствующего примера исключительно в виде функции, заданной аналитически. Здесь проявляется определённая «дискриминация» геометрического языка как недостаточно строгого в сравнении с языком формальной алгебры.

Однако практика показывает, что визуального образа зачастую достаточно для понимания сути явления. Рассмотрим несколько характерных примеров.

Пример 1. Непрерывность и дифференцируемость.

Для доказательства того, что из непрерывности функции не следует её дифференцируемость, можно, разумеется, привести аналитический пример, например, функцию $f(x) = |x|$ [9]. Однако вполне достаточно нарисовать любой график с «острием» – изломом. Более того, характер излома на графике наилучшим образом показывает «причину» отсутствия производной: несовпадение правой и левой касательных. Это важнее механического запоминания единственного примера.

Пример 2. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Для демонстрации того, что обращение производной в ноль не является достаточным условием экстремума (как в случае функции $y = x^3$), также не обязательно каждый раз обращаться к аналитической формуле. График кубической параболы с «точкой перегиба» служит такой же убедительной иллюстрацией, как и формальное вычисление производной и second derivative test.

Применение графического подхода становится незаменимым во всех вопросах, требующих анализа разрывных функций. Как известно, все элементарные функции непрерывны в своей области определения. Можно, конечно, конструировать нужные примеры из кусочно-заданных функций, но графический метод позволяет это сделать быстрее и нагляднее.

Обсуждение свойств непрерывности и дифференцируемости на наглядных контрпримерах («график с изломом») позволяет эффективно развивать критическое мышление учащихся, демонстрируя разницу между строгим определением и интуитивным представлением о гладкости [8].

Исследования показывают, что многие учащиеся испытывают серьёзные трудности при переходе от одного семиотического представления функции (аналитического) к другому (графическому) [3]. При решении задачи на определение формулы по графику даже несложной функции выпускники школ действуют так, как будто выполняют исследовательскую работу, неоднократно возвращаясь от нового представления (формулы) к исходному (графику) для проверки и корректировки гипотез.

Это указывает на то, что график и формула должны рассматриваться не как взаимозаменяемые «пересказы» одной и той же реальности, а как разные мыслительные средства, служащие для выражения отношения между переменными величинами. Функция же при таком подходе предстаёт как продукт их соотнесения, выстраивания связей между этими средствами.

При таком понимании роль учителя состоит не в том, чтобы обучить алгоритму построения, а в том, чтобы показать, как график может порождать гипотезы о свойствах функции и как формула может уточнять и корректировать визуальный образ.

Если говорить о более глубоких аспектах, то графики играют центральную роль в развитии так называемого «математического зрения». Исследование геометрических образов в математике (таких как точки перегиба, асимптоты, особенности функций типа излома или устранимого разрыва) позволяет формулировать гипотезы, которые затем могут быть доказаны или опровергнуты аналитически [2]. Этот подход особенно важен в условиях цифровой трансформации образования, когда программные средства позволяют мгновенно наблюдать за изменением графика в режиме реального времени.

Кратко описанные выше возможности применения графиков для построения примеров и контрольных примеров убедительно демонстрируют, что визуализация – это не просто вспомогательный инструмент иллюстрации, а мощный эвристический метод.

Понимание графиков функций развивает у учащихся:

– образное мышление – способность оперировать геометрическими образами;

– исследовательские навыки – умение выдвигать и проверять гипотезы;

– когнитивную гибкость («математический билингвизм») – свободный переход между аналитическим и графическим «языками» математики.

Задача современного учителя – сместить акцент с формального, «калькуляционного» подхода к построению графиков на осознанное применение визуализации для творческого поиска, анализа и доказательства.

Список литературы

1. Лисицын М.Д. О понятии функции и её аналитическом и графическом представлениях. Часть 1 / М.Д. Лисицын // Наука и школа. – 2025. – №4. – С. 197–208. DOI 10.31862/1819-463X-2025-4-197-208. EDN HUVKFZ

2. Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе / Дж. Олмстед, Б. Гелбаум. – М.: Мир, 1967. – 260 с.

3. Растегаев Н.В. Достаточные условия S-образности функции Баклея-Леверетта / Н.В. Растегаев. – URL: https://m.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=38950 (дата обращения: 23.04.2026).

4. Построение графиков функций методом геометрических преобразований в основной школе с использованием цифровой среды // Дидактика математики: проблемы и исследования. – 2025. – №4(68). – С. 72–84. DOI 10.24412/2079-9152-2025-68-72-84. EDN YMHVWO

5. Юсупова Р. Применение информационно-коммуникативных технологий при исследовании функций и их графиков / Р. Юсупова // Магариф.рф. – 2024. – URL: http://xn--80aaivq1a3a.xn--p1ai/primenenie-informacionno-kommunikat/ (дата обращения: 23.04.2026).