Чуваньков Владимир Сергеевич

студент

Лунегов Виктор Николаевич

студент

Научный руководитель

Пантелеева Ольга Борисовна

канд. экон. наук, доцент

Краснодарский филиал

ФГБОУ ВО «Российский экономический

университет им. Г.В. Плеханова»

г. Краснодар, Краснодарский край

ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ДОХОДА: ОТ ПРОИЗВОДНОЙ К УПРАВЛЕНЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ

Аннотация: *в статье рассматривается вопрос максимизации дохода как прикладной задачи высшей математики, находящейся на пересечении математического анализа, микроэкономики и исследования операций. Показано, что максимум дохода определяется не интуитивным стремлением продать как можно больше, а анализом функции спроса, производной, эластичности и ограничений. На конкретном числовом примере раскрыт алгоритм нахождения оптимального объема продаж; отдельно выделена практическая значимость задачи для ценообразования, производства, цифровых сервисов и управленческих решений.*

Ключевые слова: *доход, функция спроса, оптимизация, производная, эластичность, математическое программирование, ограничения.*

Введение

В экономике существует, на первый взгляд, странный парадокс: предприятие может продавать больше единиц товара и одновременно получать меньший доход. Скидка увеличивает спрос, но каждая новая единица продается дешевле.

Повышение цены увеличивает доход с одной продажи, но часть покупателей уходит. Поэтому вопрос «как заработать больше?» в строгом математическом смысле часто означает не «как продать максимум», а «как найти точку равновесия между ценой и количеством». Именно здесь задача максимизации дохода перестает быть бытовым советом и становится задачей высшей математики.

Актуальность темы усиливается тем, что сегодня решения о цене, ассортименте, загрузке производственных мощностей и цифровых тарифах принимаются быстрее, чем раньше. Онлайн-магазин меняет цену в течение дня, сервис подписки проверяет несколько тарифных планов, транспортная компания распределяет места при ограниченной вместимости. Во всех этих случаях за красивым интерфейсом скрывается один и тот же математический вопрос: при каких значениях переменных функция дохода достигает наибольшего значения?

1. Математическая постановка: доход как функция

В простейшей модели доход $R(q)$ определяется произведением цены p на количество проданного товара q. Если цена зависит от объема продаж, то функция принимает вид $R(q) = p(q)q$. Такая запись компактна, но в ней уже содержится ключевой конфликт: при увеличении q цена $p(q)$, как правило, уменьшается. Математический анализ позволяет описать этот конфликт через производную, то есть через скорость изменения дохода при небольшом изменении объема продаж [1, с. 214].

Если функция $R(q)$ дифференцируема и максимум достигается внутри допустимого промежутка, необходимое условие оптимума имеет вид $R'(q) = 0$. Экономический смысл этого равенства прост: в точке максимального дохода предельный доход равен нулю. До этой точки каждая дополнительная единица увеличивает общую выручку, после нее – уменьшает. Однако одного равенства производной нулю недостаточно: нужно проверить характер экстремума. Если $R''(q) < 0$, функция в данной точке является вогнутой, и найденная точка действительно соответствует локальному максимуму.

Классический пример – линейная функция спроса $p(q) = a – bq$, где $a > 0$ и $b > 0$. Тогда $R(q) = aq – bq^2$, а производная $R'(q) = a – 2bq$. Отсюда оптимальный объем продаж равен $q^* = a/(2b)$. Эта формула показывает важный управленческий вывод: максимальный доход достигается не при максимальном возможном спросе, а в середине между нулевым объемом и объемом, при котором цена упала бы до нуля. Математика буквально отрезвляет маркетинг: «больше трафика» не всегда означает «больше денег».

Числовой пример: расчет максимального дохода.

Рассмотрим простую модель: цена единицы товара зависит от объема продаж по формуле $p(q) = 100 – 2q$, где q – количество проданных единиц. Тогда функция дохода имеет вид $R(q) = q(100 – 2q) = 100q – 2q^2$. Уже здесь видно, что рост количества продаж одновременно увеличивает множитель q и снижает цену $p(q)$, поэтому максимум не может быть найден простым перебором крайних значений.

Для нахождения оптимального объема вычислим производную: $R'(q) = 100 – 4q$. Необходимое условие внутреннего максимума имеет вид $R'(q) = 0$, следовательно, $100 – 4q = 0$, откуда $q^* = 25$. При таком объеме цена составит $p(25) = 100 – 2 \cdot 25 = 50$, а максимальный доход будет равен $R(25) = 25 \cdot 50 = 1250$.

Проверка через вторую производную подтверждает характер найденной точки: $R''(q) = -4 < 0$, значит, функция дохода вогнута, а $q^* = 25$ действительно дает максимум. Смысл результата важен не меньше самого вычисления: наибольшая выручка возникает не при самой высокой цене и не при максимальном числе продаж, а в точке баланса между ценой и спросом.

Таблица 1

Основные математические формы задачи максимизации дохода

Ситуация	Модель	Метод	Результат
Один товар	$R(q) = p(q)q$	Производная и вторая производная	Оптимальный объем продаж
Несколько товаров	$R(x) = \Sigma pi(x)xi$	Градиент, матрица Гессе	Оптимальный ассортимент
Ограниченные ресурсы	$\max R(x), Ax \leq b$	Множители Лагранжа, условия Куна-Таккера	Оптимальный план при ограничениях
Динамическая цена	R зависит от времени и спроса	Численные методы, сценарный анализ	Гибкая ценовая стратегия

2. Эластичность спроса: почему максимум появляется не случайно

Более глубокое объяснение задачи дает понятие эластичности спроса. Эластичность показывает, насколько чувствительно количество спроса реагирует на изменение цены. Если спрос эластичен, небольшое снижение цены заметно увеличивает количество покупок. Если спрос неэластичен, покупатели реагируют слабо, и снижение цены может лишь «съесть» доход. В теории спроса максимум выручки при обычных предпосылках соответствует ситуации единичной эластичности: относительное изменение количества уравновешивает относительное изменение цены [2, с. 305].

Именно поэтому задача максимизации дохода важна не только для математики, но и для анализа рынка. Одна и та же цена может быть оптимальной для товара повседневного спроса и совершенно неэффективной для нишевого продукта. В первом случае потребитель может быть чувствителен к небольшой разнице в цене, во втором – большее значение имеют бренд, редкость, сервис или доверие. Модель не отменяет здравый смысл, но заставляет выразить его в измеримых параметрах.

В цифровой экономике это особенно заметно. Стриминговый сервис, образовательная платформа или облачное хранилище продают не одну вещь, а доступ к системе. Для них доход зависит от количества пользователей, тарифа, срока подписки и вероятности отказа. Формально это уже не одна переменная q, а несколько переменных: R(x1, x2,..., xn). Максимизация такой функции требует аппарата функций многих переменных: частных производных, градиента и анализа ограничений.

3. Ограничения: реальная задача почти никогда не бывает свободной

Учебная модель с одной переменной полезна, но реальная задача почти всегда имеет ограничения. Компания не может бесконечно производить товар: есть склад, сырье, время сотрудников, бюджет на рекламу, законодательные требования и пропускная способность логистики. Поэтому задача принимает вид условной оптимизации: требуется максимизировать функцию дохода при заданной системе ограничений. В линейном случае используется аппарат линейного программирования, а при нелинейных функциях – методы нелинейного программирования и условия оптимальности Куна-Таккера [3, с. 149].

Смысл ограничений не сводится к технической детали. Именно они часто меняют ответ. Например, математически наиболее выгодный объем продаж может требовать производственной мощности, которой нет. Тогда максимум на свободной функции недостижим, и оптимум переносится на границу допустимого множества. В геометрической интерпретации решение находится не там, где функция «хотела бы» быть максимальной, а там, где ей позволяет находиться реальность.

Это особенно важно для предприятий с несколькими продуктами. Если два товара используют один и тот же ресурс, рост продаж одного товара может уменьшить возможность продавать другой. В такой ситуации максимизация дохода превращается в задачу выбора структуры ассортимента. Математическая модель помогает увидеть скрытую цену ресурса: сколько дохода теряет организация из-за нехватки одного часа работы, одной единицы сырья или одного рекламного канала.

4. Доход, прибыль и риск ошибочного критерия

Здесь возникает принципиальная дискуссия: всегда ли нужно максимизировать именно доход? В экономике более строгой целью часто считается максимизация прибыли, где прибыль определяется как $\pi(q) = R(q) - C(q)$, а $C(q)$ – функция затрат. Доход показывает поток денег от продаж, но не показывает, сколько стоило его получить. Поэтому слепое стремление к максимальной выручке может привести к ситуации, когда компания выглядит большой по обороту, но слабой по финансовому результату.

Однако максимизация дохода не является ошибочной сама по себе. Она оправдана, когда затраты почти не меняются при увеличении числа пользователей, когда организация стремится занять рынок, увеличить долю аудитории или стабилизировать денежный поток. Например, для цифрового продукта с высокими первоначальными затратами и низкой предельной стоимостью обслуживания дополнительного пользователя выручка может быть ключевым показателем на раннем этапе развития. В других случаях этот критерий должен уступать прибыли, устойчивости или минимизации риска.

Таким образом, математическая задача не заменяет постановку цели. Она лишь делает цель точной. Нельзя получить правильный ответ, если неправильно выбран критерий оптимизации. В этом заключается зрелость прикладной математики: она не обещает универсального рецепта, но требует ясности в вопросе. Формула работает честно, но только в пределах тех предпосылок, которые в нее заложены [4, с. 382].

5. Практическая значимость задачи максимизации дохода

Практическая ценность задачи максимизации дохода состоит в том, что она переводит управленческую интуицию на язык проверяемых расчетов. В розничной торговле такая модель помогает определить цену, при которой скидка уже не стимулирует достаточный рост спроса. В производстве она позволяет оценить, какой объем выпуска стоит считать рациональным, если дальнейшее расширение продаж требует дополнительных ресурсов или снижает среднюю цену реализации.

Особенно заметна эта логика в цифровой экономике. Онлайн-кинотеатр, облачный сервис, образовательная платформа или мобильное приложение работают с тарифами, подписками и пакетами доступа. Стоимость обслуживания дополнительного пользователя может быть низкой, но неправильно выбранная цена быстро меняет общий доход. Поэтому методы оптимизации используются не только в классической экономике, но и в аналитике данных, маркетинге, управлении продуктом и построении динамического ценообразования.

Для будущего специалиста по экономике, управлению или информационным технологиям данная задача имеет еще одно значение: она показывает, как высшая математика превращается в инструмент принятия решений. Производная здесь выступает не абстрактной операцией, а способом ответить на практический вопрос: стоит ли повышать цену, снижать ее, расширять выпуск или остановиться на текущем объеме. Именно поэтому задача максимизации дохода является удобным примером связи математической теории с реальной хозяйственной практикой.

Заключение

Задача максимизации дохода показывает, что высшая математика не является набором отвлеченных символов. Производная, вогнутость, эластичность, градиент и ограничения описывают реальные управленческие конфликты: между ценой и спросом, масштабом и ресурсами, оборотом и устойчивостью. В простейшем виде задача сводится к поиску максимума функции одной переменной; в развитом виде она превращается в систему моделей, где учитываются несколько товаров, ограничения ресурсов и поведение потребителей.

Главный вывод состоит в том, что максимальный доход редко достигается на краю: не при самой низкой цене, не при самой высокой цене и не при максимальном количестве продаж. Он возникает в точке математического баланса. Будущее этой темы связано с алгоритмическим ценообразованием, большими данными и автоматическим подбором тарифов. Но даже самые сложные цифровые системы опираются на старую математическую идею: прежде чем действовать, нужно понять форму функции. А это уже не магия бизнеса, а дисциплина мышления.

Список литературы

1. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник / Н.Ш. Кремер. – М.: Юнити-Дана, 2018. – 479 с. – EDN KSQIMJ

2. Вэриан Х.Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход / Х.Р. Вэриан. – М.: Юнити, 1997. – 767 с.

3. Таха Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха. – М.: Вильямс, 2005. – 912 с. – EDN QJONXJ

4. Chiang A.C. Fundamental Methods of Mathematical Economics / A.C. Chiang, K. Wainwright. – New York: McGraw-Hill, 2005. – 688 p.