

Майорова Ирина Николаевна

учитель

Гузь Марина Павловна

учитель

МБОУ «СОШ №41

с углубленным изучением отдельных предметов»

г. Чебоксары, Чувашская Республика

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ САМОПОДОБНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Аннотация: в статье рассматриваются самоподобные последовательности класса Колакоски как объект математического исследования. Обоснована актуальность темы через связь с анализом пользовательских последовательностей и оптимизацией работы сайтов. Предмет исследования – последовательности Ольденбурга – Колакоски, впервые описанные Б. Колакоски в 1967 году и внесённые в онлайн-энциклопедию целочисленных последовательностей. Цель работы – построение нескольких самоподобных последовательностей, исследование их свойств и визуализация их фрактальной природы. Используются методы работы с научной литературой, сравнительного анализа, обобщения, моделирования, конструирования и визуализации. Описан авторский способ изображения последовательностей в виде концентрических окружностей и спирали, позволяющий наглядно проявить фрактальные свойства. Сделан вывод, что основу появления подобных рядов составляет понятие числового фрактального ряда. Материал адресован исследователям в области математики, фрактальной геометрии и информатики.

Ключевые слова: самоподобные последовательности, последовательность Колакоски, последовательности Ольденбурга – Колакоски, фракталы, числовой фрактальный ряд, визуализация, моделирование, самоповторение, энциклопедия целочисленных последовательностей, анализ последовательностей.

Введение

Резюме: в данной работе исследован принцип построения и свойства самогенерирующей последовательности. На её принципе построения созданы несколько модификаций, исследованы некоторые свойства данных последовательностей, визуализированы и построены модели построенных последовательностей.

Актуальность исследования.

Изучая процесс построения и функционирования сайтов, мы анализировали, какие шаги предпринимают пользователи, чтобы завершить или продолжить действие на сайте. Нам нужно было быстро определить эффективность действий пользователей, сократить число малоэффективных или прерванных действий, тем самым мы улучшали работу сайта. На каждом шаге работы надо было копить базу данных – определенный объем знаний о том, как могут поступать пользователи. Сократив количество прерванных или неэффективных действий можно улучшить работу сайта. Таким образом, исследование и анализ незавершенных и завершенных действий имеет фундаментальное значение для оптимизации эффективности сайта. Специальные последовательности позволяют визуализировать шаги, которые предпринимают пользователи. Улучшить работу сайта можно с помощью анализа последовательностей, составленных их количества обращений и их чередования. В поисках этой эффективности, мы натолкнулись на класс самоподобных последовательностей, обладающих необычным свойством. Наша работа посвящена этим специальным последовательностям.

Объект исследования: некоторые замечательные самоподобные последовательности

Предмет исследования: последовательности класса Колакоски.

Цель: построить несколько последовательностей с особыми свойствами, подобных последовательности Колакоски.

Для достижения цели, были выдвинуты следующие задачи исследования:

- изучить научную литературу по теме;
- выяснить принцип построения последовательности;
- создать несколько самоподобных последовательностей;

- исследовать свойства последовательностей;
- создать визуализацию последовательностей;
- исследовать изменения визуализации в зависимости от вида самоподобной последовательности;
- сделать вывод, проанализировав полученные данные, доказать или опровергнуть гипотезу.

Гипотеза: можно ли при визуализации моделей последовательностей Ольденбурга-Колакоски, проявить наглядно их фрактальную природу?

Методы исследования: работа с научной литературой, сравнительный анализ, обобщение, моделирование, конструирование, визуализация.

Основная часть

Математика – всеобъемлющая наука, методы которой позволяют описать закономерности и структуру самых необычных явлений окружающего нас мира. Одним из удивительнейших понятий, являются фрактальные объекты. В ходе построения самоподобных числовых рядов, мы выяснили, что они обладают свойствами, которые проявляются самым удивительным способом. Оказалось, что самогенерирующие числовые ряды порождают геометрические фракталы.

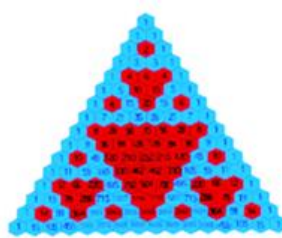


Рисунок 1 Пирамида Паскаля-

Фракталы известны уже почти век, хорошо изучены и имеют многочисленные приложения в жизни. В основе этого понятия лежит очень простая мысль: бесконечное и разнообразное множество фигур можно получить из относительно простых конструкций при помощи копирования и изменения масштаба [1]. В математике изучена фрактальность трех измерений: пыль Кантора [2], снежинка Коха [3], функция Веерштрасса [2], уравнение Ферхьюста [3], логическое уравнение, описывающее популяцию животных [5] и т. д.

В нашем случае, продлив эксперимент построения числового ряда, как можно дольше, мы получаем, строго определенные фрактальные образования.

Наглядная и стойкая связь алгебраических и геометрических фрактальных объектов описана несколькими примерами. Например, треугольник Серпинского [4] проявляется в пирамиде Паскаля (арифметическом), как цветографическая символика. Если в $2n$ строках покрасить все четные числа красным цветом, а нечетные – синим, как на рис.1 Если же достаточно долго продолжать пирамиду Паскаля, фрактальность проявляется все больше [4]. Образования, похожие на треугольник Серпинского – геометрические фракталы, возникают в игре «Жизнь» из длинной вертикальной линии. Игра основана на принципе деления клеток. И мы получили возникновение геометрических фрактальных образований из числовых последовательностей.

1. Сборка самоподобной последовательности.

Последовательность Колакоски (A000002 в OEIS) – вторая особая числовая последовательность, была занесена в онлайн Энциклопедию целочисленных последовательностей [2; 6], сразу после последовательности чисел Фибоначи. Записал ее Билл Колакоски в 1967 г. Однако, до этого момента, ее описание появляется в 1939 году в работах Руфуса Олденбургера. Но название она все-таки получила – *самогенерирующаяся последовательность Колакоски*.

Что же она из себя представляет? Это числовой ряд, представленный бесконечным набором единиц и двоек, которая является кодированием длин серий и прототипом для бесконечного семейства родственных последовательностей [4], и только, на первый взгляд, кажется, что она проста! Она может выглядеть вот так:

1 n-ть : 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1...

Или вот так:

1,2,2,1,1,2,1,2,2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2,1,2...

$1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, \dots$
 $1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \dots$
 $1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \dots$
 $1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \dots$

6. Предполагается, но пока не доказано, что плотность единиц равна $\frac{1}{2}$.

Построим несколько примеров из бесконечного семейства последовательностей Колаковски. Каждый прототип имеет свою собственную кодировку длины выполнения [7].

Для множества $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$:

$1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, \dots$

[illegible]

Для множества $\{1, 2, 3\}$

1, 2, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1...

4. Выводы исследования прототипов самогенерирующих последовательностей.

1. Мы заметили одну особенность: для любого множества целых чисел, запись длин серий возвращает ту же последовательность, для любого прототипа последовательности Колаковски одно и то же целое число не встречается дважды или более раз подряд или в начале и в конце множества. Например, для множества $\{3, 1, 2\}$:

3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 1, ...

2. Чем больше чисел в исходном множестве, тем сильнее изменяется размерность алгебраического фрактала.

3. Можно составить огромное количество самогенерирующих последовательностей Колакоски из бесконечных целочисленных множеств, так, например, из множества $\{1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \dots\}$:

1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 4, 4, 4, 1, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 6, 6, 6, 6, 1, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 8, 8, 8, 8, 8...
1 2 2 1 1 3 1 4 4 4 1 5 5 5 5 1 1 1 1 6 6 6 6 1 7 7 7 7 7 1 1 1 1 8 8 8 8 8...

5. Визуализация построенных самоподобных последовательностей.

1. Изобразим данные ряды необычным способом. Начнем рисовать с внешней окружности, следующая будет описывать длину группы и т. д. Поскольку ряд бесконечен, вырежем часть ряда, к концу последней части последовательно будем добавлять новые рисунки, получим своеобразную спираль, которую можно продолжать сколь угодно долго... В итоге появляются концентрические окружности, информацией, отсылаемой к внешней части (см рис. 2).



Рисунок 3 Изображение п-ти 3

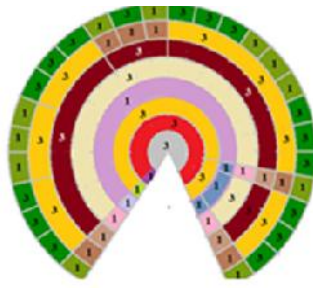


Рисунок 2 Изображение п-ти 1

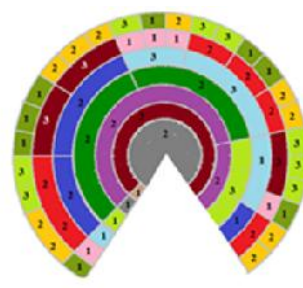


Рисунок 4 Изображение п-ти 4

Увеличим количество колец, закрасив только двойки, единицы не будем трогать, а подчистим цифры, получим вот такой поразительный рисунок:

И наконец: получив раскраску для выявления фрактальной структуры, замечаем повторяющиеся части – узоры. Вот так.



Рисунок 5 Раскраска п-ти 1

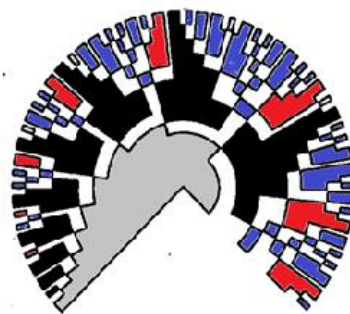


Рисунок 6 Раскраска п-ти 2



Рисунок 7
Раскраски п-ти 1
модификации 1



Рисунок 8
Раскраски п-ти 1
модификации 2



Рисунок 9
Раскраска п-ти 1



Рисунок 1
Фрактальная организация п-ти

По мере уменьшения колец, узор увеличивается, углубляется, сдвигается, проявляется во всей красе фрактальная природа последовательности.

Заключение

В результате проведенной работы, мы смогли сконструировать несколько моделей класса последовательностей Колаковски. Выяснили, что основу их появления создает понятие числового фрактального ряда. Нам удалось визуализировать последовательности, ровно до той степени, когда наглядно проявляются свойства фрактальных объектов.

В ходе исследования мы выполнили все поставленные задачи: изучили литературу по теме последовательности, выяснили при каких условиях можно построить самоподобные последовательности, исследовали некоторые свойства моделей и смогли понять, что пока эта область знаний относится к фундаментальной математике.

С помощью исследования и анализа цель работы была достигнута, удалось подтвердить предположение, о том, что на основе необычного свойства самопорождения числового ряда, можно построить его визуализированную модель, которая во всей своей красоте, докажет фрактальную сущность негеометрического объекта! Построение навело нас на мысль соорудить геометрический тренажер – фрактальную раскраску. Чем сложнее последовательность, тем она более превращается в зрительную головоломку.

Список литературы

1. The OEIS Foundation is supported by donations from users of the OEIS and by a grant from the Simons Foundation. – URL: <https://oeis.org> (date of access: 04.10.2026). – Текст : электронный.
2. Азевич, А. И. Симфония фракталов / А. И. Азевич // Информатика. – 2008. – № 23 (576).
3. Глейк Дж. Хаос. Создание новой науки / Дж. Глейк. – Санкт-Петербург : Амфора, 2001. – 398 с.
4. Деменок, С. Л. Просто фрактал / С. Л. Деменок. – Санкт-Петербург : Страта, 2014. – 172 с.
5. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – Москва : ИКИ, 2002. – 656 с.

6. Морозов, А. Д. Введение в теорию фракталов / А. Д. Морозов. – Москва, 2002.
7. Пайтген, Х. -О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х.-О. Пайтген, П.Х. Рихтер / Х. Пайтген. – Москва : Мир, 1993. – 176 с.
8. Пиквер, К. Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 основных вех в истории математики / К. Пиквер. – Москва : Бином. ЛЗ, 2014. – 543 с.
9. Федер, Е. Фракталы / Е. Федер. – Москва : Мир, 1997.
10. Шлык, В. А. Через фрактальную геометрию к новому восприятию мира / В. А. Шлык. – Москва : Профи, 2014. – 215 с.
11. Практическое применение фрактальных алгоритмов. – URL: <https://m-rush.ru/theory/item/184> (дата обращения: 04.10.2026). – Текст : электронный.