Об одном доказательстве теоремы синусов

DOI 10.31483/r-74764
УДК 514.12.01

Далингер В.А.
ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет»,
Омск, Российская Федерация.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0281-4422, e-mail: dalinger@omgpu.ru

Резюме: Автор статьи подчеркивает, что в школьном курсе геометрии хорошо известны теорема синусов и теорема косинусов. В данном курсе они доказаны авторами учебника способом, отличным от того, который приведен автором в данной статье. В статье рассматривается авторский способ доказательства теоремы синусов неизвестный в литературных источниках и основанный на векторно-координатном *методе*; также доказываются дополнительно две теоремы, одна из которых касается вычисления вписанного угла в окружность, а другая касается вычисления углов просмотра хорды окружности; для самостоятельной работы автором предложена задача, в которой объектом исследования является хорда окружности. *Результат исследования*. Доказательство теоремы синусов, выполненное автором на основании своей методики, несомненно, вызовет большой интерес у публики, заинтересованной в данном исследовании. Данный материал может послужить основой для организации учебно-исследовательской деятельности учащихся по математике. *Делается вывод о том*, что учебно-исследовательская деятельность учащихся по математике может быть эффективно организована при: установлении существенных свойств понятий; выявлении связей данного понятия с другими понятиями; поиске других методов доказательства теорем; формулировании обратной теоремы и установление ее истинности; проведении классификации математических объектов и отношений между ними; решении математических задач различными способами и методами; составлении новых задач, которые следуют из уже решенных; приведение примеров и контрпримеров, иллюстрирующих тот или иной факт и т. д.

Ключевые слова: теорема синусов, теорема косинусов, векторно-координатный метод, скалярное произведение векторов, вписанный угол в окружность, хорда окружности, угол просмотра хорды.

Для цитирования: Далингер В.А. Об одном доказательстве теоремы синусов // *Развитие образования*. – 2020. – № 1 (7). – С. 16-18. DOI:10.31483/r-74764.

Revisiting a Proof of the Sine Theorem

Victor A. Dalinger
FSBEI of HE "Omsk State Pedagogical University",
Omsk, Russian Federation.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0281-4422, e-mail: dalinger@omgpu.ru

Abstract: The author of the article outlines, that in school geometry course, the sine theorem and the cosine theorem are well known. In this course, they are proved by the authors of the textbook in a way different from the one that is presented in the article. The article considers the author's method of proving the sine theorem unknown in the literature sources and based on the vector-coordinate *method*; two more theorems are also proved, one of which concerns the calculation of the inscribed angle in the circle, and the other concerns the calculation of viewing angles of the chord of the circle; one task is proposed by the author for independent work, in which the object of research is the chord of a circle. *Research results*. A proof of the sine theorem, presented by the author on the basis of his technique, undoubtedly quicken public interest. The material can serve as a basis for organizing educational and research activities of students in mathematics. *It is concluded that* educational and research activities of students in mathematics can be effectively organized when: establishing the essential properties of concepts; identifying the relationship of this concept with other concepts; searching for other methods of proving theorems; formulating the inverse theorem and establishing its truth; classification of mathematical objects and relations between them; solving mathematical problems in various ways and methods; drawing up new tasks that result from already solved ones; providing examples and counterexamples that illustrate a particular fact, etc.

Keywords: sine theorem, cosine theorem, vector-coordinate method, scalar vector product, inscribed angle in a circle, chord of circle, view of chord angles.

For citation: Victor A. Dalinger (2020). Revisiting a Proof of the Sine Theorem. *Razvitie obrazovaniya = Development of education, 1(7)*, 16-18. (In Russ.) DOI:10.31483/r-74764.

Синус теоремин пĕр ĕнентерĕвĕ

Далингер В.А.
АВ ФПБ «Омск патшалăх педагогика университечĕ» ВУ,
Омск, Раççей Патшалăхĕ.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0281-4422, e-mail: dalinger@omgpu.ru

Аннотаци: Статья авторĕ ак мĕн палăртать: шкулăн геометри курсĕнче синуспа косинус теоремисем паллă вырăн йышăнаççĕ. Вĕсене вĕренӳ кĕнекин авторĕсем статья авторĕн мелĕпе ăнлантармаççĕ. Статьяра синус теоремине автор мелĕпе мĕнле ăнлантармаллине кăтартнă. Ку меле литературăра унччен ниçта та çырса кăтартман. Автор хăй ăнлантарăвне векторпа координаци меслечĕ çинче никĕслет; кунсăр пуçне хушса тата икĕ теоремăна ĕнентернĕ. Вĕсенчен пĕри çаврашка ăшне вырнаçнă кĕтесе шутласа кăларассипе çыхăннă, тепри – çаврашка хордине пăхмалли кĕтесе шутласа тупассипе. Ачасене хăйсем тĕллĕн ĕçлеме автор çаврашка картине шутласа тупмалли задача сĕнет. Тĕпчев пĕтĕмлетĕвĕ. Синус теорине автор сĕннĕ меслетпе ĕнентерни, паллах, ку теоремăран куç вĕçертменсене кăсăклантарса яма пултарать. Материал ачасене ăслăлăх тĕпчевне илĕртекен никĕс пулма пултарать. Пĕтĕмлетӳре ачасен вĕренӳпе тĕпчев ĕçне тухăçлă йĕркелеме çак условисем кирлине кăтартнă: ăнлавсен чи пĕлтерĕшлĕ паллисене туптармалла; ку е вăл ăнлавпа ытти ăнлавсем хушшинче çыхăну пуррине кăтартмалла; теоремăна ăнлантарма юрăхлă урăх мелсене шыраттармалла; хирĕçле теорема тупса вăл чăн пулнине çирĕплеттермелле; математика объекчĕсемпе вĕсем хушшинчи çыхăнусене ушкăнлаттармалла (классификацилеттермелле); математика задачисене тĕрлĕ меслетпе тата мелпе шутлаттармалла; шутланă задачăсем çине таянса çĕне задачăсем ăсталама сĕнмелле; ку е урăх факта иллюстрацилекен майлă тĕслĕхсемпе хирĕçле тĕслĕхсем туптармалла.

Тĕп сăмахсем: синус теореми, косинус теореми, векторпа координат меслечĕ, векторсене скалаярпа кăларасси, çаврашка ăшне ўкернĕ кĕтес, çаврашкан хорди, хорда курăнакан кĕтес.

Цитатăлама: Далингер В.А. Синус теоремин пĕр ĕнентерĕвĕ // *Вĕренў аталанăвĕ*. – 2020. – № 1 (7). – С. 16-18. DOI:10.31483/r-74764.

Введение

Совершенствование процесса обучения в образовательной школе идёт в направлении поиска эффективных методов обучения, которые бы позволили усваивать как предметное содержание, так и обеспечивали бы личностный рост учащихся. Одним из важнейших личностных качеств учащихся является способность проводить учебные исследования, в ходе которых они приобретают новые знания и способы деятельности.

Многие профессиональные качества в будущем зависят от уровня сформированности у того или иного специалиста познавательных умений, в том числе и исследовательских умений. Анализ профессиограмм специалистов показывает, что во многие из них включаются такие умения, как: проводить исследования, выдвигать гипотезы, доказывать или опровергать выдвинутые гипотезы, формулировать и решать проблемы, нести ответственность за принятое решение.

Способность учащихся к творческой (а значит, и к исследовательской) деятельности эффективно развивается в процессе их целесообразно организованной деятельности под руководством учителя.

Нужно создавать условия, способствующие возникновению у учащихся познавательной потребности в приобретении знаний, в овладении способами их использования и влияющие на формирование умений и навыков творческой деятельности.

Метод исследования. Теорема синусов будет доказана векторно-координатным методом.

В школьных курсах геометрии, например, в учебнике [1] даются доказательства теоремы синусов и теоремы косинусов. Доказательство этих теорем есть и в вузовских учебниках геометрии, например, в учебнике [2].

В данной статье мы приведем авторское доказательство теоремы синусов, которое отличается от уже известных.

Результаты. Рассмотрим одну из двух дуг, на которые данная окружность разбивается данной хордой. Из любой точки A выбранной дуги хорда видна под одним и тем же углом (считается, что точка A отлична от концов хорды). Этот факт в данной заметке устанавливается векторно-координатным методом. Используются следующие обозначения: R – радиус окружности, a – длина хорды, α – величина угла A, $\rho=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$.Широко известен случай, когда хорда является диаметром $(a = 2R)$, поэтому ниже мы предполагаем, что она короче диаметра. Тогда из двух дуг одна длиннее другой, что мы видим на рис. 1.

В случае а) точка A лежит на большей дуге, в случае б) – на меньшей.

Из чертежей видно, как выбиралась система координат – начало в центре окружности, ось абсцисс параллельна хорде BC.

Докажем следующее утверждение.

Лемма. Имеет место равенство

$$\cos\alpha=\begin{cases}\dfrac{p}{R}\ \text{в случае а)},\\ -\dfrac{p}{R}\ \text{в случае б)}.\end{cases}\qquad(1)$$

Доказательство. Рассмотрим случай а) – точка A лежит на большей дуге. При указанной системе координат имеем $B\left(\frac{a}{2},-p\right), C\left(-\frac{a}{2},-p\right)$.

Пусть $A(R\cos t, R\sin t)$ где параметр t выбран так, что

$$y_A > y_B \Leftrightarrow R\sin t + p > 0\ (2a)$$

Рассмотрим векторы

$\overline{AB}=\left(\frac{a}{2}-R\cos t, -p-R\sin t\right), \overline{AC}=\left(-\frac{a}{2}-R\cos t, -p-R\sin t\right)$.

Найдем их скалярное произведение. Опуская детали вычислений, укажем ответ:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=2R^2-\frac{a^2}{2}+2pR\sin t.$$

Затем найдем квадраты длин векторов:

$$AB^2=2R^2+2pR\sin t-aR\cos t,$$

$$AC^2=2R^2+2pR\sin t+aR\cos t.$$

Их произведение равно

$$(2R^2+2pR\sin t)^2-(aR\cos t)^2=4R^2(p+R\sin t)^2.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{AB\cdot AC}=\frac{2\left(R^2-\frac{a^2}{4}\right)+2pR\sin t}{2R\,|p+R\sin t|}=\frac{p(p+R\sin t)}{R|p+R\sin t|}.$$

Так как выражение в круглых скобках положительно, то получим равенство (1) в случае а).

В случае б) имеем неравенство

$$R\sin t-p>0\ (2б)$$

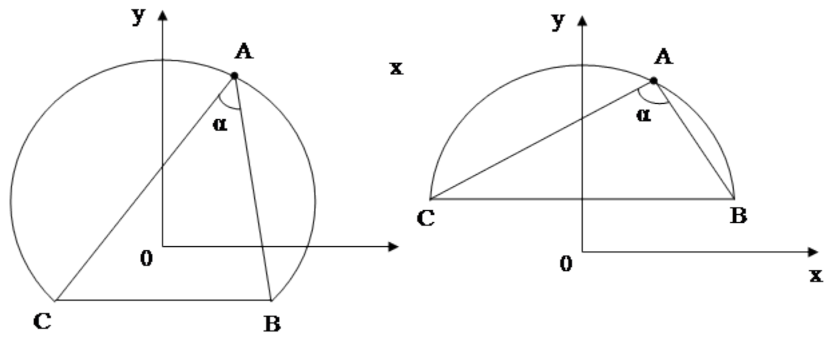
и равенства

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=2R^2-\frac{a^2}{2}+2pR\sin t,$$

$$AB^2\cdot AC^2=4R^2(p-R\sin t)^2.$$

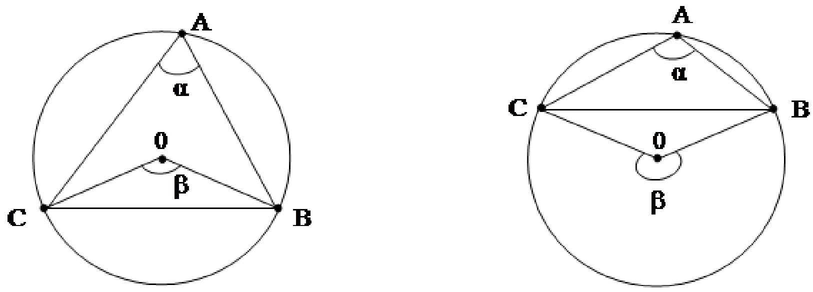
На этот раз

$$\cos\alpha=\frac{2p(p-R\sin t)}{2R|p-R\sin t|}=-\frac{p}{R}.$$



а) б)

Рис. 1
Fig. 1



а) б)

Рис. 2
Fig. 2

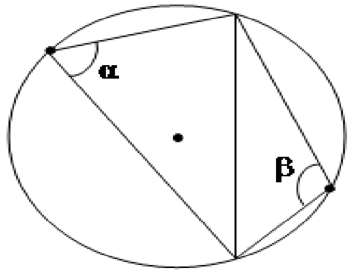


Рис. 3
Fig. 3

Лемма доказана. Приведем примеры применения равенства (1). Заметим, что оно верно и при $a = 2R$.

1. Из (1) следует, что $\cos^2\alpha = 1 - \frac{a^2}{4R^2}$.

Отсюда $\frac{a^2}{4R^2} = \sin^2\alpha, \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Применяя это равенство к двум другим сторонам треугольника ABC (рис. 1), получим теорему синусов: отношения длин сторон к синусам противолежащих углов одно и то же и равно диаметру описанной окружности.

2. Доказать, что вписанный угол вдвое меньше центрального: $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ (оба угла опираются на одну и ту же дугу – рис. 2).

Проверим в случае а), что $2\alpha = \beta$. Имеем:

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{p}{R}\right)^2 - 1 = 1 - \frac{a^2}{2R^2}$.

По теореме косинусов в треугольнике $B0C$

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = 1 - \frac{a^2}{2R^2} \quad (3)$$

Но на интервале $(0, \pi)$ из равенства косинусов двух углов следует равенство самих углов.

3. При заданной хорде на большей и меньшей дугах взято по одной точке (рис. 3).

Доказать, что углы просмотра хорды из этих точек взаимно дополняемы до π.

Согласно равенству $\cos\alpha + \cos\beta = 0$ (1), левую часть преобразуем к виду

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Здесь косинус полуразности отличен от нуля, ибо $\alpha, \beta \in (0, \pi)$.

Следовательно,

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0, \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}, \alpha+\beta = \pi,$$

что и требуется.

В заключение предлагаем читателю такую задачу: какова должна быть длина хорды окружности радиуса R, чтобы из центра окружности она виднелась под тем же углом, что и из точек меньшей дуги?

Подсказка: использовать формулы (1) и (3).

Ответ: $R\sqrt{3}$.

Список литературы

1. Геометрия. 7–9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев [и др.]. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.
2. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1988. – 224 с.

References

1. Atanasian, L. S., Butuzov, V. F., & Kadomtsev, S. B. (2010). Geometriia. 7-9 klassy: uchebnik dlia obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdenii., 384. M.: Prosveshchenie.
2. Il'in, V. A., & Pozniak, E. G. (1988). Analiticheskaia geometriia., 224. M.: Nauka.

Информация об авторе

Далингер Виктор Алексеевич – д-р пед. наук, профессор, заведующий кафедрой математики и методики обучения математике ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет», г. Омск, Российская Федерация

Information about the author

Victor A. Dalinger – doctor of pedagogical sciences, professor, head of the Department of Mathematics and Mathematics Teaching Techniques, FSBEI of HE “Omsk State Pedagogical University”, Omsk, Russian Federation

Автор ҫинчен пĕлтерни

Далингер Виктор Алексеевич – педагогика ăслăлăхĕн д-рĕ, профессор, АВ ФПБ «Омск патшалăх педагогика университечĕ» ВУн математика тата математикăна вĕрентмелли методика кафедрин ертӳҫи, Омск, Раҫҫей Патшалăхĕ.