Костин Сергей Вячеславович

старший преподаватель

ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет»

г. Москва

DOI 10.31483/r-74446

О КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ В КУРСЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

***Аннотация**: отмечена полезность компьютерного моделирования различных математических структур (таких как графы, отношения, кольца, решетки и т. д.) при изучении дискретной математики. В качестве примера рассмотрено компьютерное моделирование рефлексивных, симметрических и транзитивных отношений на множестве.*

***Ключевые слова**: компьютерное моделирование, дискретная математика, отношение на множестве, преподавание математики.*

На протяжении последнего времени прослеживается тенденция к постепенному увеличению доли так называемых «дискретных» или «конечных» разделов математики (таких как комбинаторика, теория графов, кодирование и др.) в общем объеме математических знаний, которые преподаются школьникам и студентам. Об этом мы уже писали в статье [3].

В значительной степени это связано, по-видимому, с развитием вычислительной техники, поскольку в основе ее работы лежат различные дискретные устройства (логические вентили, триггеры и т. д.). Однако даже в «чистой» математике в последнее время наблюдается определенное смещение интересов от «непрерывных» к «дискретным» разделам (об этом можно судить, например, по увеличению количества и «толщины» математических журналов, посвященных такому разделу дискретной математики, как комбинаторика).

Наш опыт преподавания дискретной математики показывает, что значительно оживить учебный процесс и ввести в него элементы математического исследования, если угодно, элементы своеобразного «математического эксперимента» можно путем использования компьютерной техники для моделирования дискретных объектов (таких как графы, отношения, кольца, решетки и т. д.).

Как правило, учащиеся с большим энтузиазмом и увлечением пишут компьютерные программы, анализируют и пытаются математически интерпретировать и обосновать результаты их работы, высказывают гипотезы о справедливости или несправедливости тех или иных математических утверждений, наконец (и это особенно радует) учащиеся предлагают свои собственные постановки новых задач для дальнейшего исследования.

В данной статье мы хотели бы рассмотреть лишь одну из задач дискретной математики, при изучении и анализе которой значительную помощь может оказать вычислительная техника, а именно, задачу об исследовании различных типов бинарных отношений на множестве (рефлексивных, симметрических, транзитивных отношений, отношений эквивалентности и т. д.).

Напомним (см., например, [1; 2]), что бинарное отношение ρ на множестве A – это упорядоченная тройка $\langle A, A, S\rangle$, где S – произвольное подмножество декартова квадрата $A^2 = A \times A$ множества A. Множество A называется *множеством* (или *носителем*) отношения ρ (это множество одновременно является множеством отправления и множеством прибытия отношения ρ). Множество S называется *графиком* отношения ρ и обозначается символом $\Gamma(\rho)$.

Если упорядоченная пара $\langle x, y\rangle$ принадлежит графику $S = \Gamma(\rho)$ отношения ρ, то говорят, что *элемент* x *находится в отношении* ρ *к элементу* y и пишут $x \xrightarrow{\rho} y$.

Отношение ρ называется *рефлексивным*, если любой элемент x множества A находится в отношении ρ к самому себе, то есть если

$$(\forall\, x \in A):\ x \xrightarrow{\rho} x.$$

Отношение ρ называется *симметрическим*, если для любых двух элементов x и y множества A из того, что элемент x находится в отношении ρ к элементу y, следует, что элемент y находится в отношении ρ к элементу x, то есть если

$$(\forall\, x, y \in A):\ \left(x \xrightarrow{\ \rho\ } y\right) \Rightarrow \left(y \xrightarrow{\ \rho\ } x\right).$$

Отношение ρ называется *транзитивным*, если для любых трех элементов x, y, z множества A из того, что элемент x находится в отношении ρ к элементу y, а элемент y находится в отношении ρ к элементу z следует, что элемент x находится в отношении ρ к элементу z, то есть если

$$(\forall\, x, y, z \in A):\ \left(x \xrightarrow{\ \rho\ } y\right) \wedge \left(y \xrightarrow{\ \rho\ } z\right) \Rightarrow \left(x \xrightarrow{\ \rho\ } z\right).$$

Если отношение ρ является рефлексивным, симметрическим и транзитивным, то отношение ρ называется *эквивалентностью* (или *отношением эквивалентности*).

Понятия рефлексивного, симметрического и транзитивного отношения допускают наглядную геометрическую интерпретацию с помощью понятия *ориентировнного графа* (*орграфа*) $G(\rho)$ отношения ρ.

Вершины орграфа $G(\rho)$ изображают элементы множества A (с формальной точки зрения можно даже считать, что вершины орграфа $G(\rho)$ совпадают с элементами множества A). Ориентированное ребро (орребро), ведущее из вершины x в вершину y, означает, что элемент x множества A находится в отношении ρ к элементу y множества A.

Отношение ρ является рефлексивным тогда и только тогда, когда орграф $G(\rho)$ не содержит вершин, на которых не «висит» петля. (Поскольку речь идет об ориентированном графе, то, возможно, правильнее говорить не «петля», а «ориентированная петля» или «орпетля».)

Отношение ρ является симметрическим тогда и только тогда, когда орграф $G(\rho)$ не содержит «одинарных» ребер. (Термином «одинарное ребро» мы для краткости называем такую ситуацию, когда от вершины x есть стрелка к вершине y, а от вершины y нет стрелки к вершине x.)

Отношение ρ является транзитивным тогда и только тогда, когда орграф $G(\rho)$ не содержит «незамкнутых» треугольников. (Термином «незамкнутый треугольник» мы для краткости называем такую ситуацию, когда от вершины x есть стрелка к вершине y, от вершины y есть стрелка к вершине z, а от вершины x нет стрелки к вершине z. При этом треугольник может быть «вырожденным», то есть вершина x может совпадать с вершиной z. В этом случае орребро от вершины x к вершине z превращается в орпетлю.)

Можно предложить разные постановки задач, связанных с понятием «отношение на множестве», которые допускают компьютерное исследование и математический эксперимент.

Одной из таких задач является следующая. Пусть множество A состоит из n элементов. Сколько различных бинарных отношений можно ввести на множестве A? Сколько из этих отношений являются рефлексивными, симметрическими, транзитивными? Сколько из этих отношений являются отношениями эквивалентностями?

Вопрос об общем количестве различных отношений и вопрос о количестве различных рефлексивных и симметрических отношений достаточно просто решается без использования компьютера. Покажем это.

Пусть $M = M(\rho)$ – *матрица* бинарного отношения ρ, то есть квадратная матрица n-го порядка такая, что элемент M_{ij} этой матрицы равен 1, если $x_i \xrightarrow{\rho} x_j$, и равен 0 в противном случае. (Мы считаем, что элементы множества A произвольным образом занумерованы числами 1, 2, $\ldots$, n, то есть задана биекция $\varphi\colon A \to [1..n]$. Тот элемент множества A, который в результате биекции φ получает номер i, мы обозначаем символом x_i).

Соответствие $\rho \longleftrightarrow M(\rho)$ между отношениями на множестве A и их матрицами является взаимно однозначным соответствием.

Количество различных отношений на множестве A равно количеству различных булевых матриц размера $n \times n$, то есть равно $N(n) = 2^{n^2}$. (Булевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны числу 0 или числу 1.)

Отношение ρ является рефлексивным тогда и только тогда, когда все элементы матрицы $M(\rho)$, стоящие на главной диагонали, равны 1. Поэтому количество различных рефлексивных отношений на множестве A равно $N_{\text{refl}}(n) = 2^{n(n-1)}$.

Отношение ρ является симметрическим тогда и только тогда, когда матрица $M(\rho)$ является симметрической. Поэтому количество различных симметрических отношений на множестве A равно $N_{\text{sym}}(n) = 2^{n(n+1)/2}$.

К сожалению, количество различных транзитивных отношений на множестве A так просто найти нельзя. И здесь на помощь приходит компьютерная техника.

Можно доказать, что отношение ρ является транзитивным тогда и только тогда, когда $\Gamma(\rho) \circ \Gamma(\rho) \subset \Gamma(\rho)$. (Здесь $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ – это *композиция* графиков Γ_1 и Γ_2, то есть множество всех упорядоченных пар $\langle x, y \rangle$ таких, что существует элемент z такой, что $\langle x, z \rangle \in \Gamma_1$ и $\langle z, y \rangle \in \Gamma_2$.)

Условие $\Gamma(\rho) \circ \Gamma(\rho) \subset \Gamma(\rho)$ равносильно следующему условию: если рассмотреть булево произведение $M(\rho) * M(\rho)$ матрицы $M(\rho)$ на себя, то во всех позициях, в которых в матрице $M(\rho) * M(\rho)$ стоят единицы, в матрице $M(\rho)$ тоже должны стоять единицы. (Если M_1 – булева матрица размера $m \times n$, а

M_2 – булева матрица размера $n \times p$, то булевым произведением $M_1 * M_2$ матриц M_1 и M_2 называется булева матрица M размера $m \times p$ такая, что ее элемент M_{ij} равен 0, если равен 0 соответствующий элемент «обычного» произведения матриц M_1 и M_2, и равен 1 в противном случае.)

Указанное условие можно достаточно легко запрограммировать на компьютере и найти таким образом количество различных транзитивных отношений.

Результаты проведенных учащимися расчетов (при $n=1$, 2, 3, 4) приведены в следующей таблице.

Таблица 1

рефлекс.	симметр.	транзит.	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
-	-	-	0	0	260	56878
-	-	+	0	6	132	3602
-	+	-	0	3	46	923
-	+	+	1	3	10	37
+	-	-	0	0	32	3692
+	-	+	0	2	24	340
+	+	-	0	0	3	49
+	+	+	1	2	5	15
$\sum$			2	16	512	65536

Например, существует ровно 512 различных бинарных отношений на множестве A, в котором содержится $n=3$ элемента. Из этих 512 отношений 260 отношений не являются ни рефлексивными, ни симметрическими, ни транзитивными; 132 отношения не являются рефлексивными и не являются симметрическими, но являются транзитивными и т. д.

Сделаем несколько замечаний по поводу приведенной таблицы.

1. Из таблицы видно, что свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности могут сочетаться между собой во всех восьми возможных сочетаниях. Иначе говоря, круги Эйлера, изображающие множество всех рефлексивных отношений, множество всех симметрических отношений и множество

всех транзитивных отношений находятся на диаграмме Эйлера – Венна в «общем положении».

2. С помощью таблицы можно легко найти, например, количество различных отношений на множестве A, в котором содержится $n = 4$ элемента: 65536. Это согласуется с приведенной выше формулой для количества различных отношений на множестве из n элементов: $N(4) = 2^{4^2} = 2^{16} = 65536$.

3. С помощью таблицы можно легко найти, например, количество различных рефлексивных отношений на множестве A, в котором содержится $n = 4$ элемента: 3692 + 340 + 49 + 14 = 4096. Это согласуется с приведенной выше формулой для количества различных рефлексивных отношений на множестве из n элементов: $N_{\text{refl}}(4) = 2^{4\cdot 3} = 2^{12} = 4096$.

4. С помощью таблицы можно легко найти, например, количество различных симметрических отношений на множестве A, в котором содержится $n = 4$ элемента: 923 + 37 + 49 + 15 = 1024. Это согласуется с приведенной выше формулой для количества различных симметрических отношений на множестве из n элементов: $N_{\text{sym}}(4) = 2^{4\cdot 5/2} = 2^{10} = 1024$.

5. Восьмая строка таблицы соответствует тем отношениям, которые одновременно являются рефлексивными, симметрическими и транзитивными. Как мы уже писали, такие отношения называются отношениями эквивалентности. В алгебре доказывается, что существует взаимно однозначное соответствие между отношениями эквивалентности на множестве A и разбиениями множества A. (Разбиением множества A называется совокупность непустых попарно непересекающихся множеств, объединение которых равно A.) Поэтому количество различных отношений эквивалентности на множестве A равно количеству различных разбиений множества A. Как известно, количество различных разбиений множества A, состоящего из n элементов, называется *числом Белла* и

обозначается символом B_n. Поэтому в восьмой строке нашей таблицы стоят именно числа Белла: $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, …

Числа Белла обладают большим количеством замечательных свойств и встречаются в самых разных вопросах математики (и не только математики). Этим числам вполне можно было бы посвятить, например, отдельное заседание математического кружка.

Отметим, что рассмотренные нами вопросы (количество рефлексивных, симметрических и транзитивных отношений) далеко не исчерпывают чрезвычайно разнообразную и интересную тематику, связанную с изучением бинарных отношений на множестве. Можно изучать также антирефлексивные отношения, антисимметрические отношения, связные отношения, отношения порядка (и их диаграммы Хассе), отношения толерантности и т. д.

С помощью компьютера можно изучать и другие дискретные объекты, например, графы, конечные кольца и поля, решетки. Вот лишь несколько возможных вопросов:

1) сколько существует неизоморфных графов n-го порядка?

2) существует ли регулярный граф n-го порядка, имеющий степень k и диаметр d (например, существует ли кубический граф 10-го порядка, имеющий диаметр 2; как известно, такой граф существует – это знаменитый граф Петерсена)?

3) сколько существует неизоморфных колец из n элементов?

И т. д.

Приведем в качестве примера одну задачу из теории графов, которая вызвала большой интерес у учащихся (автором этой задачи является автор данной статьи): «Существует ли простой регулярный граф четвертой степени, содержащий 11 вершин, в котором между любыми двумя вершинами существует путь длины два?»

Читатели могут попытаться нарисовать граф, обладающий указанными свойствами. Сделать это не так-то просто. И здесь на помощь приходит компьютерная техника. Написав не очень сложную программу, можно поручить компьютеру перебрать все возможные регулярные графы четвертой степени, имеющие 11 вершин, в надежде найти граф, в котором между любыми двумя вершинами существует путь длины два. При этом можно воспользоваться следующим утверждением из теории графов: если A – матрица смежности простого графа G, то количество путей длины s из вершины v_i в вершину v_j графа G равно элементу $(A^s)_{ij}$ матрицы A^s. Поэтому условие, что в графе G между любыми двумя вершинами существует путь длины два, равносильно условию, что в матрице A^2 нет ненулевых элементов.

После нескольких секунд (или минут) поисков компьютеру удается найти граф, обладающий указанными свойствами. Дальнейший анализ с помощью компьютера показывает, что такой граф единственен с точностью до изоморфизма. Два различных изображения этого графа приведены на рис. 1. (Мы рекомендуем читателям в качестве полезного упражнения доказать изоморфность изображенных на рис. 1 графов.) Любопытно, что ребра графа образуют два реберно-непересекающихся гамильтоновых цикла.

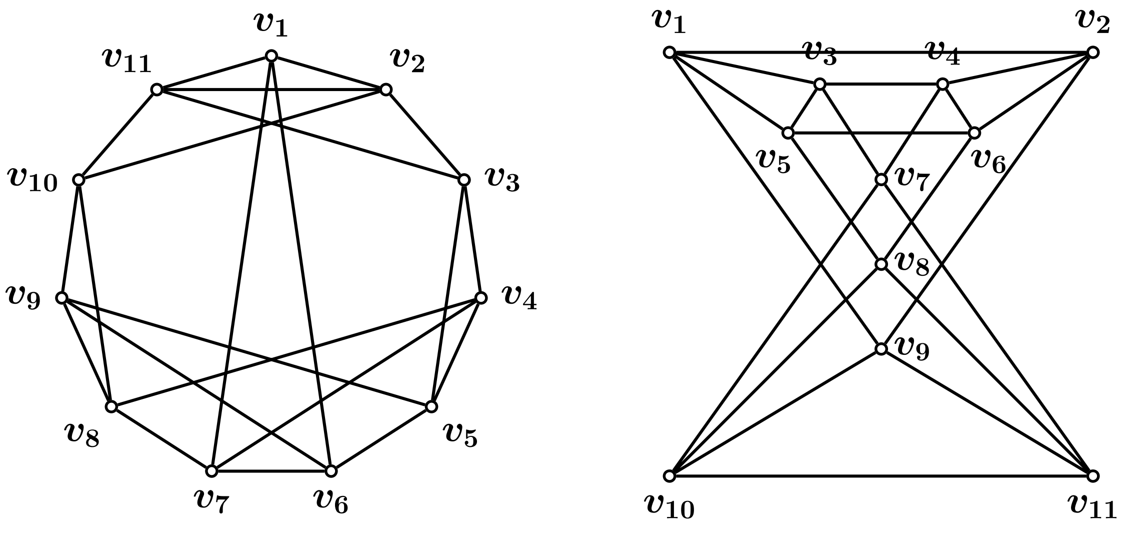

Рис. 1. Регулярный граф четвертой степени, в котором
между любыми двумя вершинами существует путь длины два

Любопытно, что ребра приведенного на рисунке графа образуют два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла.

Очень важно понимать, что решение учащимися рассмотренных нами задач стало возможным благодаря тому, что за последние 10–15 лет значительно возросли вычислительные возможности доступной для широкого круга пользователей компьютерной техники. Именно это сделало возможным компьютерное исследование достаточно сложных и интересных объектов (графов с достаточно большим количеством вершин и ребер, конечных колец с достаточно большим количеством элементов и т. д.).

Наш опыт внедрения компьютеризации в курс дискретной математики показывает исключительную плодотворность этого процесса. Зачастую сформулированная преподавателем задача в дальнейшем существенно расширяется, дополняется и самостоятельно исследуется в новой, более интересной или общей постановке, уже самими учащимися. Процесс обучения становится по-настоящему творческим.

По нашему мнению, курс дискретной математики является в каком-то смысле идеальным местом для использования в учебном процессе современных компьютерных технологий.

Мы были бы очень рады ознакомиться с опытом других преподавателей и будем благодарны за любые комментарии или замечания по затронутым в данной статье вопросам.

Список литературы

1. Вечтомов Е.М. Основные математические структуры. – Киров: Радуга-Пресс, 2013. – 292 с.

2. Костин С.В. Об изучении понятия «отношение» в вузовском курсе математики // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Вып. 16 / гл. ред. Е.М. Вечтомов. – Киров: Радуга-Пресс, 2014. – С. 148–164.

3. Костин С.В. Тождества булевой алгебры множеств и логические равносильности // Актуальные проблемы математики и информатики: теория, методика, практика: сборник материалов V Международной научно-практической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика С.А. Чаплыгина (Елец, 18–20 апреля 2019 г.). – Елец: Елецкий гос. ун-т имени И.А. Бунина, 2019. – С. 37–38.