

**Полещук Ольга Митрофановна**

д-р техн. наук, профессор

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический

университет им. Н.Э. Баумана»

г. Москва

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ Z-ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

***Аннотация:** в настоящее время все больше внимания уделяется проблеме выбора оптимального решения в условиях неопределенности высокого порядка, которая свойственна задачам экономической сферы. Для формализации таких неопределенностей в 2011 году профессор Лотфи Заде ввел понятие Z-числа, которое является упорядоченной парой нечетких чисел  $Z = (A, B)$ . В этой паре  $A$  – ограничение на значения некоторой нечеткой переменной  $X$  ( $X$  есть  $A$ ), а  $B$  представляет собой оценку уверенности в том, что  $X$  есть  $A$ . В статье рассмотрен практический пример, который показывает эффективность использования Z-чисел для принятия решений в условиях высокой степени неопределенности.*

***Ключевые слова:** неопределенность высокого порядка, поддержка принятия решений, z-число.*

В задачах экономической сферы достаточно часто необходимо формализовать и обработать информацию, которая характеризуется высокой степенью неопределенности. Например, «доход компании в следующем году составит около 1000000 у.е., почти уверен» или «убытки будут небольшими, вероятность выше среднего». Для формализации такой информации в 2011 году профессор Лотфи Заде ввел понятие Z-числа [1].

Z-числом называется упорядоченная пара нечетких чисел  $Z = (A, B)$ . Первое нечеткое число  $A$  – это значение, которое принимает некоторая нечеткая переменная  $X$ . Второе нечеткое число  $B$  является показателем надежности

(достоверности) первого числа. Другими словами, второе нечеткое число выражает значение уверенности (возможности, вероятности), что нечеткая переменная  $X$  принимает значение  $A$ . Как правило, числа  $A$  и  $B$  описываются на естественном языке. Пример:  $Z = (\text{около } 45 \text{ минут, очень уверен})$ .

Согласно [2] нечетким множеством  $\tilde{A}$  называется множество пар вида  $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)): x \in X\}$ , где  $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$  – функции принадлежности  $\tilde{A}$ .

Нечетким числом называется нечеткое множество  $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)): x \in R\}$ , где  $\mu_{\tilde{A}}(x): R \rightarrow [0,1]$

Нечеткой переменной называется тройка

$$\{X, U, \tilde{A}\},$$

где  $X$  – название переменной;  $U$  – область ее определения (универсальное множество);  $\tilde{A}$  – нечеткое множество универсального множества, описывающее возможные значения нечеткой переменной [3].

Будем предполагать, что некоторая компания заинтересована двумя направлениями развития своего бизнеса. При этом предлагаются три возможных варианта:  $C_1$  – развивается только первое направление,  $C_2$  – развивается только второе направление и  $C_3$  – развиваются оба направления. Расходы на развитие первого направления составляют 200 000 у.е., расходы на развитие второго направления составляют 170 000 у.е. Если компания выбирает первое направление развития, то доход может составить 610 000 у.е. (высокий уровень дохода –  $S_1$ ), 290 000 у.е. (средний уровень дохода –  $S_2$ ) и 180 000 у.е. (низкий уровень дохода –  $S_3$ ). Если компания выбирает второе направление развития, то доход может составить 460 000 у.е. (высокий уровень дохода –  $S_1$ ), 270 000 у.е. (средний уровень дохода –  $S_2$ ) и 150 000 у.е. (низкий уровень дохода –  $S_3$ ). Если компания выбирает оба направления развития, то доход может составить 860 000 у.е. (высокий уровень дохода –  $S_1$ ), 470 000 у.е. (средний уровень дохода –  $S_2$ ) и 250 000 у.е. (низкий уровень дохода –  $S_3$ ). Эксперты компании вполне уверены, что вероятность высокого и среднего уровня доходов составляет соответственно

около 0,30 и 0,50. Необходимо принять решение о выборе наилучшего варианта развития компании.

Перейдем к формальному описанию рассматриваемой проблемы. Нечеткая информация в задаче будет формализована Z-числами [1]. Варианты развития компании:  $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ .  $C_1$  – развивается только первое направление,  $C_2$  – развивается только второе направление и  $C_3$  – развиваются оба направления. Множество возможных состояний:  $S = \{S_1, S_2, S_3\}$ , где  $S_1$  – высокий уровень дохода,  $S_2$  – средний уровень дохода,  $S_3$  – низкий уровень дохода. Вероятности состояний соответственно описываются Z-числам  $Z_{P(S_1)} = (\text{около } 0.3, \text{ вполне уверен})$ ,  $Z_{P(S_2)} = (\text{около } 0.5, \text{ вполне уверен})$ ,  $Z_{P(S_3)} = (\text{около } 0.2, \text{ вполне уверен})$ .

Набор возможных исходов:  $X = \{(\text{низкий, вероятно}), (\text{выше низкого, вероятно}), (\text{средний, вероятно}), (\text{ниже в сравнении с высоким, вероятно}), (\text{высокий, вероятно})\}$ .

Нечеткая информация о значениях лингвистических переменных и вероятностях их появления приведена в таблице 1.

Таблица 1

Значения лингвистических переменных и их вероятности

	$S_1$ (около 0.3, вполне уверен)	$S_2$ (около 0.5, вполне уверен)	$S_3$ (около 0.2, вполне уверен)
$C_1$	(высокий, вероятно)	(средний, вероятно)	(низкий, вероятно)
$C_2$	(ниже в сравнении с высоким, вероятно)	(средний, вероятно)	(низкий, вероятно)
$C_3$	(высокий, вероятно)	(выше низкого, вероятно)	(низкий, вероятно)

Лингвистической переменной [4] называется пятерка  $\{X, T(X), U, V, H\}$ , где  $X$  – название переменной;  $T(X) = \{X_i, i = \overline{1, m}\}$  – терм-множество переменной  $X$ , то есть множество термов или названий лингвистических значений переменной  $X$  (каждое из этих значений – нечеткая переменная со значениями из универсального множества  $U$ );  $V$  – синтаксическое правило, порождающее названия значений лингвистической переменной  $X$ ;  $H$  – семантическое правило, которое

ставит в соответствие каждой нечеткой переменной с названием из  $T(X)$  нечеткое подмножество универсального множества  $U$ .

Соответствующая матрица решений на основе  $Z$ -чисел приведена в таблице 2.

Таблица 2

Матрица решений

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
	$Z_{41}$	$Z_{42}$	$Z_{43}$
$C_1$	$Z_{11}$	$Z_{12}$	$Z_{13}$
$C_2$	$Z_{21}$	$Z_{22}$	$Z_{23}$
$C_3$	$Z_{31}$	$Z_{32}$	$Z_{33}$

Построение функций принадлежности  $Z$ -чисел осуществляется на основе методов построения функций принадлежности для обычных нечетких чисел и лингвистических переменных [6–8]. Существуют разные методы построения, связанные со способами получения информации. Исходная информация может быть статистической [7, 8] или полученной на основе прямого опроса эксперта или группы экспертов [6]. Функции принадлежности  $Z$ -чисел из таблицы 2 строятся на основе методов, разработанных в [6].

Перейдем к решению задачи. Сначала необходимо определить неизвестные  $Z$ -число, исходя из вероятности  $Z_{P(S_1)_1} = Z_{41} = (A_{41}, B_{41})$ ,  $Z_{P(S_2)_1} = Z_{42} = (A_{42}, B_{42})$ ,  $Z_{P(S_3)_1} = Z_{43} = (A_{43}, B_{43})$ . Поскольку  $Z_{P(S_3)_1}$  полностью определяется через  $Z_{P(S_1)_1}$  и  $Z_{P(S_2)_1}$ , то степень надежности  $B_{43}$  будет такой же, как и степени надежности  $B_{41}$  и  $B_{42}$ . Поэтому для окончательного определения  $Z_{43} = (A_{43}, B_{43})$  необходимо вычислить  $A_{43}$  на основе  $A_{41}$  и  $A_{42}$ . Для вычисления  $A_{43}$  используем подход, предложенный в [5].

Основываясь на полученных ранее  $Z$ -числах, вычислим ожидаемую полезность для каждого из вариантов  $C = \{C_1, C_2, C_3\}$  следующим образом:

$$Z_{U(C_1)} = Z_{11} \times Z_{41} + Z_{12} \times Z_{42} + Z_{13} \times Z_{43},$$

$$Z_{U(C_2)} = Z_{21} \times Z_{41} + Z_{22} \times Z_{42} + Z_{23} \times Z_{43},$$

$$Z_{U(C_3)} = Z_{31} \times Z_{41} + Z_{32} \times Z_{42} + Z_{33} \times Z_{43}.$$

Теперь необходимо выбрать наилучший вариант путем сравнения вычисленных  $Z$ -чисел. Для сравнения будем использовать подход, предложенный в [5]. В соответствии с этим принципом сначала получим степени оптимальности (degrees of optimality) трех наших вариантов:

$$do(C_1) = 1, \quad do(C_2) = 0, \quad do(C_3) = 0.92.$$

Как можно заметить, второй вариант не является оптимальным по Парето. Осталось сравнить первый и третий варианты. Предположим, что степень пессимизма при сравнении этих вариантов равна  $\beta = 0.3$ .

Тогда получим:

$$r(Z_{U(C_1)}, Z_{U(C_3)}) = 0.976 > \frac{1}{2}(do(Z_{U(C_1)}) + do(Z_{U(C_3)})) = 0.96 /$$

Таким образом, лучший вариант –  $C_1$ .

Приведенный пример показывает возможности обработки информации и принятия решений в экономической сфере в условиях неопределенности высокой степени, которая содержит нечеткость и случайность. Для формализации таких неопределенностей профессором Лотфи Заде было введено понятие  $Z$ -чисел. Учитывая, что для задач экономической сферы свойственно наличие экспертной информации с высокой степенью неопределенности смешанного типа, то использование  $Z$ -чисел открывает новые возможности поддержки принятия решений в рамках этих задач.

### ***Список литературы***

1. Zadeh L.A. A Note on Z-numbers // Information Sciences. – 2011. – №181. – P. 2923–2932.
2. Zadeh L.A. Generalized theory of uncertainty (GTU)-principal concepts and ideas // Computational Statistics & Data Analysis. – 2006. – №51 (1). – P. 15–46.
3. Полещук О.М.  $Z$ -числа и их новые возможности для моделирования реального мира / О.М. Полещук, Т.М. Чернова // Современные проблемы физико-математического образования: Сборник материалов VI Международной заочной

научно-технической конференции. Государственный гуманитарно-технологический университет. – 2016. – С. 33–35.

4. Полещук О.М. О развитии систем обработки нечеткой информации на базе полных ортогональных семантических пространств // Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник. – 2003. – №1. – С. 112–117.

5. Aliev R.R. Expected utility based decision making under Z-information and its application / R.R. Aliev, D.A.T. Mraiziq, O.H. Huseynov // Comput. Intell. Neurosci. – 2015. – №4. – P. 21–32.

6. Полещук О.М. Математическая модель обработки экспертных оценок // Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник. – 2005. – №6. – С. 161–163.

7. Poleshuk O.M. Multiple hybrid regression for fuzzy observed data / O.M. Poleshuk, E.G. Komarov // Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society – NAFIPS'2008. – 2008. – С. 4531224.

8. Полещук О.М. Некоторые подходы к моделированию системы управления образовательным процессом // Телекоммуникации и информатизация образования. – 2002. – №3. – С. 4.