Далингер Виктор Алексеевич

д-р пед. наук, заведующий кафедрой, профессор

ФГБОУ ВО «Омский государственный

педагогический университет»

г. Омск, Омская область

DOI 10.31483/r-74564

УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ СТУДЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация*: в статье рассматривается сущность учебно-исследовательской деятельности студентов по математике и показана организация этой деятельности при решении экстремальных геометрических задач с параметрами, упор сделан на решение этих задач геометрическими методами.*

Ключевые слова*: учебно-исследовательская деятельность, экстремальные задачи, геометрические задачи с параметрами на экстремум.*

Подготовка высококвалифицированных специалистов предполагает формирование у них исследовательских компетенций, которые следует рассматривать как один из компонентов профессиограммы специалиста.

Как показывает практика обучения математике в высшей школе, формирование исследовательских компетенций успешно происходит в случае учебно-исследовательской деятельности студентов.

Исследовательские умения важны как в профессиональной деятельности, так и в жизнедеятельности в целом.

В учебно-исследовательской деятельности целеполагание становится движущей силой только тогда, когда цель субъективно важна и значительна для участника этого процесса [1].

В данной статье мы остановимся на организации учебно-исследовательской работы студентов при решении экстремальных геометрических задачах с параметрами.

В интересной книге [8] в тринадцатом рассказе (с. 117–141) приводятся аналитические решения ряда геометрических задач на экстремум единообразным способом (в то время как геометрическое решение каждый раз свое и часто трудно находимое). Применяемый аналитический аппарат представлял собой классический метод множителей Лагранжа условной оптимизации. Это своеобразное соревнование геометрии с анализом было, затем продолжено в работе [9]. Там речь шла об одной олимпиадной задаче для школьников в 1985 г. [2, с. 96].

Задача 1. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2 см. Пусть M – точка окружности S_1, вписанной в квадрат $ABCD$, а N – точка окружности, проходящей через вершины A, B_1, C. Найдите наименьшее расстояние между ними.

Эта задача имеет замечательно красивое, но трудно находимое геометрическое решение. В работе [9] приводится аналитическое решение, основанное на условной оптимизации. Опишем начальный шаг авторского решения.

Введем пространственную систему координат следующим образом: начало координат O поместим в центр куба, положительные полуоси Ox, Oy, Oz направим проходящими соответственно через грани AA_1D_1D, DD_1B_1C, $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно им. Тогда имеем $A = (1; -1; -1)$, $B_1 = (-1; -1; 1)$, $C = (-1; 1; -1)$. Проходящая через эти точки окружность является сечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ плоскостью $x + y + z + 1 = 0$. Берутся точки

$$N = (x; y; z) \in S_2,\ M = (\cos t; \sin t; -1) \in S_1\ (0 \le t \le 2\pi) \tag{1}$$

и минимизируется расстояние между ними $d = \sqrt{(x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2 + (z + 1)^2}$. Беря подкоренное выражение в качестве целевой функции и применяя метод Лагранжа при условиях $x + y + z + +1 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$, автор заметки [9] показал, что $d_{min} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

В предлагаемой работе задача 1 решается тем же методом, но по-другому. Вместо минимизации функции от четырех аргументов при двух связях здесь она решается как оптимизационная двумерная задача с параметром t при одном уравнении связи, при этом целевая функция линейная по основным переменным. По ходу решения попутно выявляется и величина $d_{\max}$ без обращения к чертежу. Проведенные рассуждения почти дословно переносятся на решение следующей родственной задачи из книги [7, с.208].

Задача 2. В том же кубе на лучах A_1A, A_1B_1, A_1D_1 взяты соответственно точки E, F, G так, что $A_1E = A_1F = A_1G = b$. Пусть M – точка окружности S_1, вписанной в квадрат $ABCD$, а N – точка окружности S_2, проходящей через E, F, G. Чему равно наименьшее значение длины отрезка MN?

Решение задачи 1. Используя уравнения сферы и плоскости, пересечением которых является S_2, представим целевую функцию (квадрат расстояния между N, M) в виде

$$u = 3 - 2\,(1 + \cos t)\,x - 2\,(1 + \sin t)\,y,\ 0 < t < 2\pi. \qquad (2)$$

Будем исследовать ее на экстремум при связи

$$g\,(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2 - 3 = 0. \qquad (3)$$

Геометрически задача сводится к тому, чтобы при всяком фиксированном значении параметра t среди линий уровня $u = const$ (прямых) выбрать те, которые касаются графика уравнения связи $g\,(x, y) = 0$ (эллипса), и точки касания проверить на нужную оптимальность.

Потребуем, чтобы градиент функции Лагранжа $L = u + \lambda g$ по x, y был нулевым. Из равенств $\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ получим систему

$$\begin{cases} 2x + y = \dfrac{2}{\lambda}\,(1 + \cos t) - 1 \\ x + 2y = \dfrac{2}{\lambda}\,(1 + \sin t) - 1 \end{cases},$$

откуда

$$x = \frac{2}{3}\left(\frac{1 + 2\cos t - \sin t}{\lambda} - \frac{1}{2}\right), y = \frac{2}{3}\left(\frac{1 + 2\sin t - \cos t}{\lambda} - \frac{1}{2}\right). \qquad (4)$$

При таких x, y из уравнения связи (3) получим

$$\frac{2+\cos t+\sin t - \cos t \sin t}{\lambda^2} - 1 = 0.$$

Заметим, что здесь числитель дроби не меньше $3 / 2 - \sqrt{2} > 0$, так что

$$\lambda = \pm\sqrt{2+cos\,t+sin\,t - cos\,t\,sin\,t}.$$

При указанных выше *x*, *y*, как функций параметра, получим следующее выражение через него целевой функции:

$$u(t) = \frac{2}{3}\left(\cos t+\sin t - 4\lambda(t)\right)+\frac{13}{3}.$$

Заметим, что второй дифференциал функции Лагранжа $d^2L = 2\lambda(dx^2+ + dxdy + dy^2)$ является знакоопределенной квадратичной формой. Она положительно определенная, если множитель Лагранжа положительный, поэтому указанное выше значение целевой функции минимальное; при смене знака имеем максимум. На этом применение метода Лагранжа и закончилось. Остается исследовать функцию *u(t)* отрезке [0; 2π] на минимум при $\lambda > 0$ и на максимум при $\lambda < 0$. Анализ этой функции на экстремум технически затруднителен, поэтому введем еще параметр $p = \cos t + \sin t$. Имеем: $t \in [0,2\pi] \Rightarrow p\in \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. Тогда

$$u = \frac{2}{3}\left(p \mp 4\sqrt{\frac{5}{2}+p-\frac{1}{2}p^2}\right)+\frac{13}{3}.$$

Рассмотрим случаи знаков множителя Лагранжа.

1) $\lambda > 0$. Оптимизационная задача

$$u = \frac{2}{3}\left(p - 4\sqrt{\frac{5}{2}+p-\frac{1}{2}p^2}\right)+\frac{13}{3} \to \min \quad \left(p \in \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\right)$$

имеет единственное решение во внутренней стационарной точке отрезка $p_0 = 1 - \sqrt{2/3}$, при этом $u_{min} = 5 - 6\sqrt{2/3} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

2) $\lambda < 0$. Задача

$$u = \frac{2}{3}\left(p + 4\sqrt{\frac{5}{2}+p-\frac{1}{2}p^2}\right)+\frac{13}{3} \to \max \quad \left(p \in \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\right)$$

имеет решение на границе: $u_{max} = u\left(\sqrt{2}\right) = 7 + 2\sqrt{2}$.

Осталось указать точки окружностей, между которыми расстояния экстремальные. Для этого подберем какой-нибудь угол t так, что

$\cos t + \sin t = 1\text{-}\sqrt{2/3}$. Рассмотрим точки в R^3

$$M = (\cos t\,; \sin t\,; \text{-}1), N = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \cos t\,; \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sin t\,; \text{-}\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Они лежат соответственно на окружностях S_1, S_2 и расстояние между ними равно $\sqrt{3}\text{-}\sqrt{2}$.

Наибольшее расстояние между точками окружностей достигается при $M = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; \text{-}1)$, N = (-1; -1; 1) и равно $\sqrt{7+\sqrt{2}} \approx 3.135032$.

Решение задачи 2. Предполагаем, что $b > 0$. При указанном выше выборе системы координат имеем $E = (1; -1; 1 - b)$, $F = (1 - b; -1; 1)$, $G = (1; -1 + b; 1)$. На этот раз окружность S_2 является пересечением поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 - 2 - (b - - 1)^2 = 0$, $x - y + z + b - 3 = 0$. Берем точки согласно (1) и будем находить не только наименьшее, но и наибольшее расстояния между ними. Целевая функция строится аналогично и имеет вид

$$u(x, y) = 10 - 2(1 + \cos t)x + 2(1\text{-}\sin t)y + (b\text{-}1)^2\text{-}2b,$$

уравнением связи будет $g(x, y) = x^2 + y^2 + (\text{-}x + y + 3 - b)^2 - 2 - (b - 1)^2 = 0$. Аналогами равенств (4) станут

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{2\cos t + \sin t + 1}{\lambda} + 3\text{-}b\right), y = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sin t + \cos t\,\text{-}1}{\lambda} + b\text{-}3\right), (4a)$$

множителями Лагранжа будут $\lambda = \pm (2 + \cos t \sin t - \sin t + \cos t)^{1/2} / b$. При этом значение целевой функции в точке (4a)

$$u = \frac{4}{3}\left[\frac{3\text{-}b}{2}(\sin t\,\text{-}\cos t)\text{-}\lambda b^2\right] + b^2\text{-}\frac{8}{3}b + 7,$$

а второй дифференциал функции Лагранжа имеет вид $d^2L = 4\lambda(dx^2 - dxdy + + dy^2)$. Введем параметр $p = \sin t - \cos t$ и будем исследовать функции

$$u(p) = \frac{4}{3}\left(\frac{3\text{-}b}{2}p \mp b\sqrt{\frac{5}{2}\text{-}\frac{1}{2}p^2\text{-}p}\right) + b^2\text{-}\frac{8}{3}b + 7 \qquad (5)$$

соответственно на минимум и на максимум на отрезке $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$. Согласно знакам в (5) стационарная точка как функция параметра b имеет вид

$$p(b) = -1 \pm (b-3)\sqrt{\frac{2}{b^2-2b+3}},$$

соответствующие графики представлены ниже. Несложные выкладки дают значение целевой функции в ней: $u\big(p(b)\big) = [\sqrt{(b-1)^2+2} \mp \sqrt{2}]^2$. Снова рассматриваем случаи знаков множителя Лагранжа.

1) $\lambda > 0$, т.е. в (5) берем знак «минус». Из двух значений целевой функции на концах отрезка $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ наименьшим является

$u\big(-\sqrt{2}\big) = (b-2)^2 + (\sqrt{2}-1)^2$. Нетрудно проверить, что $u\big(p(b)\big) \leq \mathrm{u}\big(-\sqrt{2}\big)$, причем знак равенства имеет место лишь при $b = b_0 = \sqrt{2} + 1$. Такое значение параметра является критическим в том смысле, что при $b < b_0$ стационарная точка покидает отрезок, иначе остается на нем. Этой ситуации соответствует левый чертеж на предлагаемом ниже рисунке. Следовательно,

$$d_{min} = \begin{cases} \sqrt{(b-2)^2 + (\sqrt{2}-1)^2} \text{ при } b < \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{(b-1)^2+2}-\sqrt{2} \text{ при } b \geq \sqrt{2}+1 \end{cases}. \qquad (6)$$

2) $\lambda < 0$. На этот раз имеем значения на границе

$$u\big(-\sqrt{2}\big) = [b + \tfrac{2(\sqrt{2}-1)}{3}]^2 + (\tfrac{5\sqrt{2}-1}{3})^2, u\big(\sqrt{2}\big) = [b-\tfrac{2(\sqrt{2}+1)}{3}]^2 + (\tfrac{5\sqrt{2}+1}{3})^2, \quad (7)$$

при этом

$$\max\{u\big(-\sqrt{2}\big), u\big(\sqrt{2}\big)\} = \begin{cases} u\big(-\sqrt{2}\big) \text{ при } b > 3/2 \\ u\big(\sqrt{2}\big), \text{если } b \leq 3/2 \end{cases}.$$

Непосредственно проверяется, что $u\big(p(b)\big) \geq \mathrm{u}\big(\sqrt{2}\big)$, причем знак равенства имеет место лишь при $b = b_1 = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}+1} \approx 0.325$; аналогично $u\big(p(b)\big) \geq \mathrm{u}\big(-\sqrt{2}\big)$ и равенство возможно только при $b = b_2 = \frac{3(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}-1} \approx 3.961$. Эти значения также критические: при $b < b_1$ или $b > b_2$ стационарная точка $p(b)$ покидает отрезок – см. правый чертеж на рис. 1 (зона «покидания», как и на левом чертеже, помечена штриховкой).

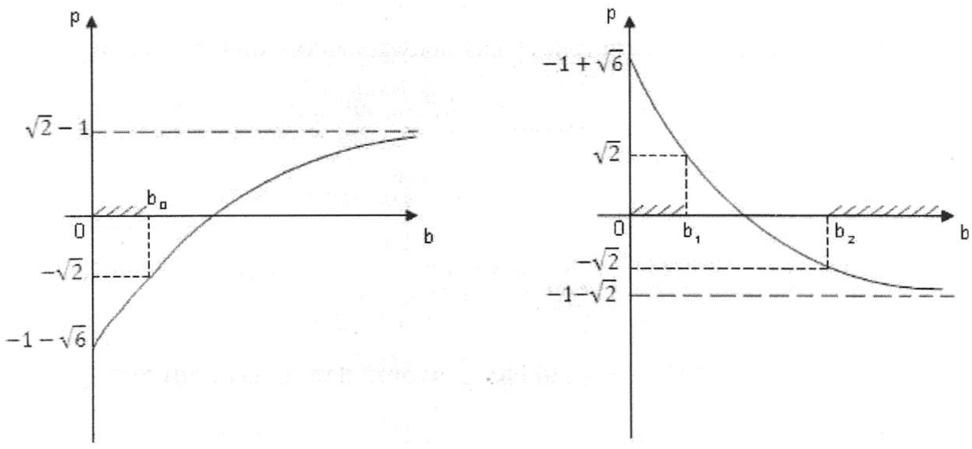

Рис. 1. Рисунок к задаче 2

Следовательно,

$$d_{max} = \begin{cases} \sqrt{(b\text{-}1)^2 + 2} + \sqrt{2}, \text{если } b_1 \le b \le b_2 \\ \sqrt{u(\sqrt{2})} \text{ при } b < b_1 \\ \sqrt{u(\text{-}\sqrt{2})} \text{ при } b > b_2 \end{cases}, \tag{8}$$

где $u(\pm\sqrt{2})$ находятся согласно формулам (7). Здесь верхнее выражение согласуется с тем, что расстояние между точками двух концентрических сфер не более суммы их радиусов, причем равенство достижимо. Например, при b = 2 найдем какое-нибудь решение уравнения $\sin t$ – $\cos t$ $= p(2) =$ -1 $+ \sqrt{2/3}$ и положим

$$\mathrm{M} = (\cos t\,; \sin t\,, \text{-}1), N = (\text{-}\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \cos t\,; \text{-}\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sin t\,; \sqrt{\frac{3}{2}}).$$

Расстояние между этими точками равно $\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx$ 3.146.

Заметим, что равенства (6), (8) верны и при b = 0. В этом случае (сделаем чертеж!) окружность S_2 вырождается в точку A_1, наименее удаленная от нее точка N_1 окружности S_1 лежит на диагонали AC на расстоянии $\sqrt{2}$ -1 от A, наиболее удаленная N_2 – на расстоянии $\sqrt{2} + 1$. По теореме Пифагора

$$d_{min} = \sqrt{AA_1^2 + AN_1^2} = \sqrt{4 + (\sqrt{2}\text{-}1)^2}, d_{max} = \sqrt{AA_1^2 + AN_2^2} = \sqrt{4 + (\sqrt{2} + 1)^2}$$

Но точно такие же расстояния получаются и по формулам (6), (8).

Читатель, заинтересовавшийся поднятой в статье проблемой, найдет более обстоятельный разговор об этом в наших работах [3; 4; 6].

Список литературы

1. Богоявленский Д.Н. Психология усвоения знаний в школе / Д.Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская. – М.: АПН РСФСР, 1959. 348 с.

2. Васильев Н.Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад / Н.Б. Васильев, А.А. Егоров. – М.: Наука, 1988. – 96 с.

3. Далингер В.А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся: учебник и практикум для вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2019. – 460 с.

4. Далингер В.А. Учебно-исследовательская работа студентов в процессе обучения математике // Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации: сборник статей XIX Международной научно-практической конференции (15 января 2019 г., Пенза). В 2 ч. – Ч. 2. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – С. 195–199.

5. Далингер В.А. Развитие обучающихся в процессе учебно-исследовательской деятельности // Цифровое общество в контексте развития личности: сборник статей Международной научно-практической конференции (13 июня 2017 г., Пенза). – Уфа: АЭТЕРНА, 2017. – С. 96–102.

6. Далингер В.А. Информационно-коммуникационные технологии в учебно-познавательных исследованиях студентов // Высшее образование сегодня. – 2012. – №11. – С. 67–72.

7. Прасолов В.В. Задачи по стереометрии / В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин. – М: Наука, 1989. – 288 с.

8. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

9. Тихомиров В.М. Геометрия или анализ? // Квант. – 1990. – №10. – С. 47–51.