Антоновская Ольга Георгиевна

Бесклубная Антонина Вячеславовна

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА И ЕГО ИЗЛОЖЕНИЕ В СОВРЕМЕННОМ УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Аннотация*: в работе рассматривается вопрос об изложении темы «Построение функций Ляпунова» раздела «Прямой метод Ляпунова» в курсах, посвященных динамике систем, дифференциальным уравнениям и т. д., для студентов математических и технических специальностей. Авторы подчеркивают, что метод функций Ляпунова рассматривается прежде всего, как метод, полезный при математическом исследовании динамики конкретных технических систем. Поскольку при практическом применении этого метода имеет смысл строить функции Ляпунова самого простого вида, авторами предлагается к изложению методика построения функций Ляпунова в виде положительно определенных квадратичных форм, обладающих свойствами, определенными особенностями исходной задачи.*

Ключевые слова*: профессиональная деятельность обучаемого, фундаментальность образования, профессионально-значимые и практические цели образования, умение строить модели реальных явлений, математические методы исследования, теория устойчивости, прямой метод Ляпунова, положительно определенная квадратичная форма, матричное уравнение Ляпунова.*

Abstract*: the article is devoted to the problem of the full treatment of the subject “Construction of Lyapunov functions” in the “Lyapunov's direct method” section in the courses on system dynamics, differential equations, etc., for students of mathematical and technical specialties. The authors of the article point out that first of all Lyapunov function method is considered the method useful for studying dynamics of concrete technical systems by mathematical methods. Since for practical use of this method it makes sense to construct Lyapunov functions in simplest form, the methodology for constructing Lyapunov functions in positive definite quadratic forms with given properties, certain features of original problems is proposed by the authors.*

***Keywords**: professional activity of the trainee, fundamentals of education, professionally significant and practical goals of education, ability to construct models of real phenomena, mathematical methods of research, stability theory, Lyapunov's direct method, positive definite quadratic form, Lyapunov matrix equation.*

В настоящее время сущность инженерной деятельности есть интеллектуальное обеспечение процессов создания и обслуживания технических систем. Поэтому перед высшим образованием ставится цель подготовки творчески мыслящих, конкурентоспособных специалистов, владеющих современными методами исследования [9; 12]. Причем важно строить курсы обучения студентов с учетом аспектов будущей профессиональной деятельности обучаемого [9; 12]. Таким образом, на первое место выдвигается проблема повышения фундаментальности образования, и речь здесь прежде всего идет о математическом образовании, которое помимо задач общеобразовательных ставит задачи профессионально-значимые и практические [19]. Причем под профессионально-значимыми и практическими целями понимают формирование умений строить модели простейших реальных явлений, исследовать явления по этим моделям, а также знание необходимых для этого математических методов. Традиционно содержание образовательных курсов по математическим дисциплинам не рассматривает прикладных вопросов, связанных с будущей профессиональной деятельностью обучаемого [16]. Однако развитие математической теории и повышение эффективности ее использования в прикладных целях всегда считалось одной из важнейших проблем. В свете этих задач существенным является развитие и обобщение современной теории устойчивости движения, а значит и изучение ее студентами технических специальностей. Поэтому особенно важным становится изучение одного из основных методов теории устойчивости, известного как прямой, или второй метод Ляпунова. Это метод, который связывает факт устойчивости или неустойчивости установившегося движения с наличием функции, производная которой во времени, взятая в силу рассматриваемой системы, обладает теми или иными свойствами [7, с. 9].

Центральная идея прямого метода Ляпунова состоит в непосредственном исследовании устойчивости системы при помощи подходящим образом построенной вспомогательной функции без предварительного нахождения решений системы. Ранее этот метод незаслуженно получил репутацию метода, имеющего в основном теоретический интерес, поскольку построение используемых в нем вспомогательных функций, так называемых функций Ляпунова (ФЛ), всегда считалось достаточно трудным делом. Скажем, в [15, с. 55] отмечалось, что неизвестен общий способ построения ФЛ, т. е. в каждой конкретной задаче построение ФЛ носит специфический характер. Но ведь значение метода ФЛ далеко не исчерпывается проблемой установления факта устойчивости. Знание ФЛ для конкретной системы автоматического регулирования позволяет дать оценку регулируемой величины, оценку времени протекания переходного процесса (времени регулирования), с помощью ФЛ можно оценить область притяжения (т. е. многообразие всех начальных возмущений, исчезающих во времени), решить задачу устойчивости «в большом» и т. д. [7, с. 9]. Таким образом, прямой метод Ляпунова позволяет оценивать глобальную структуру пространства состояний математической модели системы на основе принципа достаточности (получать оценки сверху асимптотически устойчивых множеств, оценки снизу областей притяжения и т. д.). Поэтому к настоящему времени наработаны многие специальные методы и приемы построения ФЛ [7; 11]. И основной целью при изложении прямого метода Ляпунова в учебном процессе является с одной стороны описание современного состояния наиболее полезных разделов теории, а с другой, указание на многообразие приложений, относящихся к самым различным областям. Причем особое внимание следует уделить методам построения ФЛ простейшего вида, удобных для применения в этих приложениях.

Вопросам построения ФЛ всегда уделялось большое внимание [18, с. 124–134; 25]. При практическом применении метода ФЛ имеет смысл воспользоваться тем фактом, что при анализе устойчивости нелинейных динамических систем, допускающих линеаризацию вблизи состояния равновесия, могут использоваться ФЛ квадратичного вида, построенные для соответствующих линейных систем [18, с. 124–131]. Кроме того, можно поставить задачу построения квадратичной ФЛ, обладающей свойствами, определяемыми особенностями решаемой задачи. Заметим, что важной особенностью второго метода Ляпунова в количественных исследованиях, связанной с наличием некоторого множества ФЛ, является необходимость выбора такой функции из этого множества, которая бы позволяла получить наиболее полное решение поставленной задачи [17]. То есть при изложении второго метода Ляпунова в учебном процессе следует особое внимание уделить построению ФЛ в виде положительно определенных квадратичных форм с указанием их свойств в зависимости от того, как связаны их коэффициенты. В настоящей работе мы приведем наиболее распространенные случаи построения квадратичных ФЛ с заданными свойствами.

При определении устойчивости и получении качественных характеристик линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

используются ФЛ квадратичного вида

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}, i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

Симметричную положительно определенную матрицу $K = (K_{ij})$ с собственными числами $0 < \lambda_1(K) \le \lambda_2(K) \le \ldots \le \lambda_n(K)$ можно получить из матричного уравнения Ляпунова

$$A^T K + KA = C \tag{3}$$

Следует отметить, что отрицательно определенная матрица C, стоящая в правой части уравнения, есть матрица первой производной функции (2) в силу системы (1).

Если дифференциальная система асимптотически устойчива, то при произвольной отрицательно определенной матрице C уравнение (3) имеет единственное решение. При этом интерес представляет получение матрицы K с некоторыми заданными свойствами.

1. Нахождение квадратичной ФЛ, матрица которой имеет заданный спектр собственных чисел [23]. Это означает, что требуется найти пару матриц C_0, K_0, удовлетворяющих (3), где у K_0 заранее задан набор собственных чисел $0 < \lambda_1(K_0) \le \lambda_2(K_0) \le \ldots \le \lambda_n(K_0)$.

В работе [23] предложен следующий алгоритм нахождения матриц C_0, K_0.

1. Задаем отрицательно определенную матрицу C (для определенности можно положить $C = -E$, где E – единичная матрица) и, решая уравнение Ляпунова (3), находим матрицу K.

2. Вычисляем собственные числа матрицы K и ортогональную матрицу U, приводящую K к диагональному виду.

3. Умножением уравнения Ляпунова на $\lambda_n(K_0)/\lambda_n(K)$, где $\lambda_n(K_0)$ – наибольшее собственное значение матрицы K_0, а $\lambda_n(K)$ – наибольшее собственное значение матрицы K, нормируем матрицу K. При этом наибольшее ее собственное число становится равным $\lambda_n(K_0)$.

4. Матрицу $C(0)$ находим по формуле $C(0) = U^T C U$.

5. Вычисляем $\varepsilon_i = \lambda_i(K_0) - \lambda_i(K)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$.

6. Полученные на предыдущем шаге значения ε_i^0 подставляем в выражение

$$C_1(\varepsilon) = A_1^T \Lambda(\varepsilon) + \Lambda(\varepsilon) A_1,$$

где $\Lambda(\varepsilon) = \Lambda(0) + \Lambda_1(\varepsilon)$,

$$\Lambda(0) = diag(\lambda_1(K), \lambda_2(K), \ldots, \lambda_n(K)) = U^T K U,\ \Lambda_1(\varepsilon) = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}, 0),$$

$$A_1 = U^T A U,\ C_1(0) = U^T C U.$$

7. Проверяем условие $det\, C_1(\varepsilon) \ge 0$. Если условие выполняется, то переходим на шаг 8. Иначе вычисления заканчиваются. Матрицу с заданным спектром построить не удалось. Необходимо изменить спектр.

8. Вычисляем матрицу $C_0 = UC_1(\varepsilon)U^T$.

9. Решаем уравнение Ляпунова с матрицей C_0 в правой части. Полученная при этом матрица K_0 дает решение (2) задачи.

Замечание 1. Полное теоретическое обоснование алгоритма дается в [23].

Замечание 2. Методам решения матричного уравнения Ляпунова посвящено немало работ [8; 10; 22; 26–29]. Например, согласно [27], можно найти следующим образом. Обозначим через $P_{A^T}(\lambda)$ и $P_{-A}(\lambda)$ характеристические полиномы матриц A^T, $-A$ соответственно (заметим, что характеристический полином матрицы A^T совпадает с характеристическим полиномом матрицы A)

$$P_{A^T}(\lambda) = P_A(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda^j,\ P_{-A}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} a_j \lambda^j \tag{4}$$

Тогда решение K матричного уравнения (3) можно найти по одной из следующих формул:

$$K = \left[\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{r=0}^{j} (-1)^r (A^T)^{j-r} C A^r \right) \right] P_A^{-1}(-A) A^{-1} \tag{5}$$

$$K = P_{-A}^{-1}(A^T)(A^T)^{-1} \left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} a_j \left(\sum_{r=0}^{j} (-1)^r (A^T)^{j-r} C A^r \right) \right] \tag{6}$$

при условии, что обратные матрицы в (5), (6) существуют.

Следует отметить, что задача получения решения матричного уравнения (3) с заданным спектром означает, что требуется получить квадратичную ФЛ (2), поверхности уровня которой имеют определенную деформацию по отношению к n-мерной сфере (т. е. поверхности уровня которой имеют определенный вид).

2. Нахождение решения уравнения (3), *у которого отношение наибольшего и наименьшего собственных чисел минимально* [23]. Требуется найти матрицу K_0, у которой

$$\lambda_{max}(K_0) / \lambda_{min}(K_0) = \inf_{K} \{ \lambda_{max}(K) / \lambda_{min}(K) \} \tag{7}$$

Это означает, что необходимо найти такую матрицу квадратичной формы (2), чтобы ее поверхности уровня как можно меньше отличались от n-мерной сферы.

В работе [13] показано, что если матрица $C_0 = A^T + A$ является отрицательно определенной, то искомой матрицей K_0 является матрица E, для которой $\lambda_{max}(K_0)/\lambda_{min}(K_0) = 1$. Она является решением уравнения (3) с указанной матрицей $C = C_0$ в правой части. Поверхности уровня квадратичной функции (2) с такой матрицей представляют собой n-мерные сферы. То есть задача имеет простое решение. Если матрица $C_0 = A^T + A$ не является отрицательно определенной, то задача (7) решается по следующему алгоритму [23].

1. Задаем отрицательно определенную матрицу C (для определенности можно положить $C = -E$, где E – единичная матрица) и, решая уравнение Ляпунова (3), находим матрицу K.

2. Вычисляем собственные числа матрицы K и ортогональную матрицу U, приводящую K к диагональному виду.

3. Вычисляем матрицы $A_1 = U^T AU$, $C_1(0) = U^T CU$.

4. Выбираем $\lambda_k(K)$ – наименьшее собственное число матрицы K.

5. Полагаем в матрице $C_1(\varepsilon)$ $\varepsilon_i = 0, i \neq k$.

6. Раскрыв определитель полученной матрицы $C_1(\varepsilon)$, получаем из уравнения $\det C_1(\varepsilon) = 0$ квадратное уравнение относительно $\varepsilon = \varepsilon_k$

$$a\varepsilon^2 - 2b\varepsilon + c = 0,$$

где

$$a = \begin{vmatrix} c^1_{11} & \dots & c^1_{1,k-1} & a^1_{1k} & c^1_{1,k+1} & \dots & a^1_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^1_{k-1,1} & \dots & c^1_{k-1,k-1} & a^1_{k-1,k} & c^1_{k-1,k+1} & \dots & c^1_{k-1,n} \\ a^1_{k1} & \dots & a^1_{k,k-1} & 0 & a^1_{k,k+1} & \dots & a^1_{kn} \\ c^1_{k+1,1} & \dots & c^1_{k+1,k-1} & a^1_{k+1,k} & c^1_{k+1,k+1} & \dots & c^1_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^1_{n1} & \dots & c^1_{n,k-1} & a^1_{nk} & c^1_{n,k+1} & \dots & a^1_{nn} \end{vmatrix},$$

$$b=\begin{vmatrix} c_{11}^1 & \dots & c_{1,k-1}^1 & a_{1k}^1 & c_{1,k+1}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1,1}^1 & \dots & c_{k-1,k-1}^1 & a_{k-1,k}^1 & c_{k-1,k+1}^1 & \dots & c_{k-1,n}^1 \\ c_{k1}^1 & \dots & c_{k,k-1}^1 & a_{kk}^1 & c_{k,k+1}^1 & \dots & c_{kn}^1 \\ c_{k+1,1}^1 & \dots & c_{k+1,k-1}^1 & a_{k+1,k}^1 & c_{k+1,k+1}^1 & \dots & c_{k+1,n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}^1 & \dots & c_{n,k-1}^1 & a_{nk}^1 & c_{n,k+1}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{vmatrix},$$

$$c=\begin{vmatrix} c_{11}^1 & \dots & c_{1,k-1}^1 & c_{1k}^1 & c_{1,k+1}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1,1}^1 & \dots & c_{k-1,k-1}^1 & c_{k-1,k}^1 & c_{k-1,k+1}^1 & \dots & c_{k-1,n}^1 \\ c_{k1}^1 & \dots & c_{k,k-1}^1 & c_{kk}^1 & c_{k,k+1}^1 & \dots & c_{kn}^1 \\ c_{k+1,1}^1 & \dots & c_{k+1,k-1}^1 & c_{k+1,k}^1 & c_{k+1,k+1}^1 & \dots & c_{k+1,n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}^1 & \dots & c_{n,k-1}^1 & c_{nk}^1 & c_{n,k+1}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{vmatrix}.$$

Поскольку [24] $a<0, c>0$, квадратное уравнение имеет корни $\mu_1<0, \mu_2>0$.

7. Вычисляем μ – наибольший корень этого уравнения.

8. Подставляем $\varepsilon_k=\mu$ в выражение $C_1(\varepsilon)$, полагая $\varepsilon_i=0, i\neq k$.

9. Если матрица $C_1(\varepsilon)$ положительно определена, считаем, что $C_1(0)=C_1(\varepsilon)$, $\lambda_k(H)=\lambda_k(H)+\varepsilon_k$ и переходим на шаг 4. Иначе переходим на шаг 10.

10. Вычисляем матрицу $C_0=UC_1(0)U^T$ и, решая уравнение Ляпунова с матрицей C_0 в правой части, находим матрицу матрица K_0 с наименьшим отношением ее максимального собственного числа к минимальному.

3. Нахождение квадратичной ФЛ, удовлетворяющей ограничению на ее первую производную в силу системы [*3*; *6*].

Рассмотрим асимптотически устойчивую линейную дифференциальную систему (1). Будем выбирать ее ФЛ в виде положительно определенной квадратичной формы (2) так, чтобы она обеспечивала выполнение неравенства $\dot{V}<0$ с заданным запасом, т. е. удовлетворяла условию [6] $\max_{V=V_0}(\dot V/V)=-\delta$ $(2\max_{i=\overline{1,n}}\{Re\lambda_i\}\le-\delta<0)$, где

$$\dot V(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}(\dot x_i x_j+x_i\dot x_j) \quad (8)$$

есть первая производная (2) в силу системы (1), а $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n$, $Re\lambda_i<0$ $(i=1,2,...,n)$ – собственные числа матрицы системы $A=(a_{ij})$. Но согласно [6], для того, чтобы (2) была ФЛ для (1) с заданным выше свойством, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты (2) удовлетворяли уравнению

$$det(C_{km}-\delta K_{km})_{k,m=1}^{n}=0,$$

в котором

$$C_{km}=\sum_{i=1}^{n}(K_{ik}a_{im}+K_{im}a_{ik})\ (k,m=1,2,...,n).$$

Здесь величины C_{km} – коэффициенты квадратичной формы (8).

Предложения по нахождению параметров функции (2), обладающей свойством $\max_{V=V_0}(\dot V/V)=-\delta$ $(2\max_{i=\overline{1,n}}\{Re\lambda_i\}\le-\delta<0)$, изложены в работе [5]. В частности, в случае, когда все корни характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1=x_2=...x_n=0$ (1), действительны и различны $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n<0$, существует такое линейное невырожденное преобразование координат [3]

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\xi_i\ \ (i=1,2,...,n) \quad (9)$$

что система (1) в новых координатах принимает канонический вид

$$\dot\xi_i=\lambda_i\xi_i\ \ (i=1,2,...,n).$$

(Столбцы матрицы B являются собственными векторами, соответствующими собственным числам $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n<0$.) Но тогда удовлетворяющей условию $\max_{V=V_0}(\dot V/V)=-\delta$ будет функция

$$V(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n-2}K_{ii}\xi_i^2+K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2+2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n+K_{nn}\xi_n^2 \qquad (10)$$

$$K_{n-1,n}^2=(1-R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn},\ R(\delta)=(\lambda_{n-1}-\lambda_n)^2(\lambda_{n-1}+\lambda_n+\delta)^{-2}$$

$$(2\lambda_n\le-\delta\le 0),\ K_{ii}>0, K_{n-1,n-1}K_{nn}-K_{n-1,n}^2>0.$$

А возвращение к прежним $x_i, i=1,2,...,n$ с помощью обратной матрицы B^{-1}, позволит получить квадратичную ФЛ с определенным выше свойством.

Если собственные числа $\lambda_i, i=1,2,...,n-2$ матрицы A действительны и различны, а $\lambda_{n-1,n}=\mu\pm i\nu$, причем $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_{n-2}<Re\,\lambda_n<0$, квадратичную ФЛ с $\max\limits_{V=V_0}(\dot V/V)=\delta$ для канонической системы целесообразно искать в виде

$$V(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}K_{ij}\xi_i\xi_j+K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2+2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n+K_{nn}\xi_n^2$$

$$(K_{ij}=K_{ji}, i,j=1,2,\ldots,n),$$

где

$$(K_{nn}+K_{n-1,n-1})^2=C(\delta)(K_{n-1,n-1}K_{nn}-K_{n-1,n}^2),$$

а $\lambda_{n-1,n}=\mu\pm i\nu$, или в виде (10), где $K_{i-1,i-1}=K_{ii}$, если переменные ξ_{i-1},ξ_i соответствуют паре комплексно-сопряженных корней, для которых $Re\,\lambda_{i-1,i}<Re\,\lambda_{n-1,n}$ [5] и т. д.

Следует отметить, что функция (2), удовлетворяющая ограничениям на величину ее производной, является удобной при решении прикладных динамических задач. Во-первых, для определения областей притяжения асимптотически устойчивых множеств нелинейных систем при условии, что (2) построена для соответствующей линеаризованной системы [4]. Более того, для оценивания областей притяжения предлагается строить множество ФЛ, а в качестве оценки области притяжения выбирать объединение оценок, полученных для всех функций множества [20]. Во-вторых, подобная ФЛ может быть использована при решении задач определения времени протекания переходного процесса [2]. Вообще, проблема определения длительности переходных процессов в той или иной реальной технической системе является одной из наиболее важных динамических задач.

В ходе решения задачи нахождения времени переключения в существенно нелинейных технических системах при изменении управляющего параметра возникает задача точного определения момента окончания переходного процесса в системе [2]. Критерием его окончания обычно считается попадание траектории математической модели на некоторое множество M_σ, вид которого определяется техническими условиями задачи. Множество M_σ всегда содержит состояние равновесия или иное асимптотически устойчивое множество, соответствующее рабочему режиму системы, и может быть неограниченным [1]. А поскольку в существенно нелинейной системе могут иметь место колебательные переходные процессы, первый же момент попадания траектории математической модели на заданное множество не может гарантировать того, что она с течением времени множества M_σ не покинет. Этот факт порождает задачу выделения таких подмножеств в M_σ, которые траектория системы в дальнейшем покинуть не сможет. Для решения этой задачи и используется прямой метод Ляпунова.

В заключение следует отметить, что прямой метод Ляпунова в последнее время становится инженерным инструментом не только анализа устойчивости движения технических систем. Исследование принципиальных математических проблем, относящихся к этому методу, а также исследование вопросов эффективного построения ФЛ для прикладных задач, позволило установить универсальность и эффективность прямого метода Ляпунова для широкого круга проблем [15]. Идеи и приемы метода ФЛ проникают во многие разделы современной математики. Это не только теория управления, но и вычислительная и дискретная математика [18]. Метод ФЛ это также и метод исследования широкого круга задач качественного и количественного оценивания макроструктуры пространства состояний математических моделей реальных систем, Более того, теоретические исследования показали, что прямой метод Ляпунова позволяет решать задачу точного оценивания макроструктуры пространства состояний нелинейных систем с помощью так называемых «разрешающих» ФЛ [21]. Этот факт имеет большое теоретическое значение, т. к. дает прочную теоретическую основу для различных технических приемов и процедур, направленных на получение с помощью прямого метода Ляпунова (с использованием принципа достаточности) количественных оценок областей устойчивости «в большом» и предельной ограниченности. Кроме того, прямой метод Ляпунова позволяет исследовать различные динамические свойства систем, такие как точность, время регулирования, управляемость и т. д. К тому же этот метод, хотя и применяется в основном для анализа, наиболее приспособлен для синтеза устойчивых или обладающих другими заданными свойствами технических систем [14]. Как это часто бывает при решении научных задач, проблемы анализа и синтеза оказываются достаточно тесно связанными между собой, и каждое продвижение на пути к решению проблемы анализа устойчивости дает возможность отыскания решений новых задач синтеза стабилизирующих управлений. Конечно, теория синтеза систем автоматического управления с помощью ФЛ находится еще в стадии становления. Однако в [14] на основе идей прямого метода Ляпунова сформулирован ряд утверждений, позволяющих предложить достаточно конструктивные способы решения задач синтеза стабилизирующего управления как для случая скалярного, так и векторного управлений для линейных и некоторых классов нелинейных систем. Причем показано, что использование в качестве ФЛ простейших положительно определенных функций вида «квадратичная форма фазовых координат» позволяет выделить множество стабилизируемых систем специального вида [14, с. 86–102]. Рассмотрены также случаи, когда можно использовать ФЛ более сложного вида [14, с. 102–116].

Из всего вышеизложенного следует, что важность прямого метода Ляпунова в теории устойчивости не вызывает сомнений. А значит и его изложение в образовательном процессе является чрезвычайно важным. В особенности он может быть полезен студентам технических и математических специальностей как будущим исследователям, ученым и инженерам высокой квалификации.

Список литературы

3. Антоновская О.Г. К анализу формы и длительности переходных процессов при переключениях синтезатора с делителем частоты и пропорционально-интегрирующим фильтром по диапазону / О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов, Н.И. Лобашов // Динамика систем: Межвуз. сб. – Горький: Изд-во ГГУ, 1989. – С. 59–72.

4. Антоновская О.Г. Метод функций Ляпунова как инструмент решения прикладных задач и особенности его изложения в современном учебном процессе / О.Г. Антоновская, А.В. Бесклубная // Великие реки-2019: сб. трудов научного конгресса Международного научно-промышленного форума. – Н. Новгород: Изд-во ННГАСУ, 2019. – С. 74–77.

5. Антоновская О.Г. Некоторые предложения по изложению метода функций Ляпунова в образовательном процессе / О.Г. Антоновская, А.В. Бесклубная // Международный научно-исследовательский журнал. Ч. 2. – 2019. – №4(82). – С. 94–98.

6. Антоновская О.Г. Об одном способе оценки области притяжения устойчивого решения системы дифференциальных уравнений / О.Г. Антоновская // Инновационная наука. – 2015. – №9. – С. 11–15.

7. Антоновская О.Г. О выборе коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами / О.Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, №3. – С. 276–281.

8. Антоновская О. Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами / О.Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, №9. – С. 1220–1224.

9. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости / Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 1967. – 224 с.

10. Воронцов Ю.О. Численные алгоритмы для решения матричных уравнений AX+BXT=C и AX+BX*=C / Ю.О. Воронцов, Х.Д. Икрамов. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, №6. – С. 843–852.

11. Замыслова А.И. Практическая направленность обучения математике в техническом вузе / А.И. Замыслова // Гуманитарные и социальные науки. – 2016. – №5. – С. 189–196.

12. Икрамов Х.Д. Матричные уравнения AX+BXT,=C и AX+BX*=C / Х.Д. Икрамов, Ю.О. Воронцов // Доклады академии наук. Математика. – 2013. – Т. 449, №5. – С. 513–515.

13. Калитин Б.С. Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений / Б.С. Калитин. – Минск: Изд-во БГУ, 2013. – 264 с.

14. Князева О.Г. Профессиональная направленность обучения математике в технических вузах / О.Г. Князева // Известия Алтайского государственного университета. Серия: Педагогика и психология. – 2012. – С. 17–21.

15. Комаров Ю.А. Некоторые замечания об экстремальной функции Ляпунова для линейных систем / Ю.А. Комаров, Д.Я. Хусаинов // Украинский математический журнал. – 1983. – Т. 35, №6. – С. 750–753.

16. Кунцевич В.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

17. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Наука, 1966. – 532 с.

18. Малыгина О.А. Совершенствование обучения высшей математике в технических университетах / О.А. Малыгина // Международный научно-исследовательский журнал. – 2018. – №3(69). – С. 170–174.

19. Пустовойтов Н.А. Вопросы алгоритмизации второго метода Ляпунова / Н.А. Пустовойтов // Прямой метод в теории устойчивости и его приложения / под. ред. В.М. Матросова, Л.Ю. Анапольского. – Новосибирск: Наука, 1982. – С. 124–131.

20. Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

21. Сауренко Н.Е. Инновационное обучение математике в современном вузе / Н.Е. Сауренко // Академический вестник Института образования взрослых

Российской академии образования: Человек и образование. – 2010. – №2(23). – С. 137–139.

22. Сиразетдинов Т.К. Способ построения множества функций Ляпунова для исследования устойчивости нелинейных систем // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем / под. ред. В.М. Матросова, Л.Ю. Анапольского. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 64–71.

23. Степаньянц Г.А. О существовании оптимальных функций Ляпунова для динамических систем / Г.А. Степаньянц, Б.М. Шамриков // Доклады Академии наук СССР. – 1973. – №5. – С. 270–281.

24. Фишман В.М. О решении матричного уравнения Ляпунова / В.М. Фишман // Автоматика и телемеханика. – 1981. – №1. – С. 190–192.

25. Хусаинов Д.Я. Об одном методе нахождения решения уравнения Ляпунова с заданными свойствами / Д.Я. Хусаинов, Е.А. Юнькова // Украинский математический журнал. – 1984. – Т. 36, №4. – С. 528–531.

26. Чарин В.С. Линейные преобразования и выпуклые множества / В.С. Чарин. – Киев: Вища школа, 1976. – 191 с.

27. Четаев Н.Г. Устойчивость движения / Н.Г. Четаев. – М.: Наука, 1965. – 207 с.

28. Чуйко С.М. О решении матричного уравнения Ляпунова / С.М. Чуйко // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – №5. – С. 176–185.

29. Яксубаев К.Д. Сведение разностного уравнения теплопроводности к уравнению Ляпунова / К.Д. Яксубаев, Н.В. Поротикова // Научный потенциал регионов на службу модернизации. – 2013. – №1(4). – С. 195–200.

30. Muller, P. Chr. (1970). Solution of the Matrix Equations AX+XB=-Q and SX+XS=-Q. SIAM Journal on Applied Mathematics, 18, 3, 682–687.

31. Smith, R. A. (1966). Matrix Calculations for Liapunov Quadratic Forms. Journal of Differential Equations, 2,2, 208–217.

Антоновская Ольга Георгиевна – канд. физ.-мат. наук, доцент ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет», Россия, Нижний Новгород.

Бесклубная Антонина Вячеславовна – канд. пед. наук, доцент ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет», Россия, Нижний Новгород.