

**Черкашин Юрий Семенович**

## **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА 2018**

**Аннотация:** в монографии явно просматриваются три части. В первой приводится векторный анализ группы уравнений часто именуемый «Уравнениями Максвелла». Собственно перу Максвелла принадлежит одно уравнение, в котором он ввел так называемый «ток смещения». Анализ показывает, что этот ток является лишней припиской и мешает взаимной согласованности уравнений группы. Без этого тока исчезают волновые свойства электрического и магнитного полей. Электрическое и магнитное поля перестают быть «особой формой материи». Во второй части дано краткое изложение основ новой электродинамики, без уравнения Максвелла, записана группа уравнений, не имеющая внутри себя противоречий. За основу приняты уравнения потенциалов, закон Кулона и законы взаимодействия токов. Дальнейшему развитию подлежит теория распространения радиосигналов. В последней части приводятся примеры подробного, полного расчета электрических и магнитных потенциалов типичных источников. Монография предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов технических вузов.

**Ключевые слова:** уравнения электродинамики, теория поля, поля потенциалов, электрическое и магнитное поле.

**Abstract:** the monograph clearly shows three parts. The first part contains a vector analysis of a group of equations often referred to as the «Maxwell Equations». Actually one equation belongs to Maxwell's pen, in which he introduced the so-called «bias current». Analysis shows that this current is an extra postscript and interferes with the mutual consistency of the group of equations. Without this current, the wave properties of the electric and magnetic fields disappear. Electric and magnetic fields cease to be a «special form of matter." In the second part, a brief presentation of the fundamentals of new electrodynamics is given, without the Maxwell equation, a group of equations is written, which has no contradictions. The basis is the equation of potentials, the Coulomb law and the laws of the interaction of currents. The theory of

*radio signal propagation is subject to further development. The last part provides examples of a detailed, complete calculation of the electric and magnetic potentials of typical sources. The monograph is intended for researchers, teachers, graduate students and senior students of technical universities.*

**Keywords:** *electrodynamics equations, field theory, potential fields, electric and magnetic fields.*

*Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  постепенно исчезают из современной записи физических законов: их вытесняют потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  [4, с. 26].*

### *Введение*

Шестьдесят лет тому назад автору этих строк довелось сдавать студенческие экзамены по Теоретическим основам электротехники. Вопрос экзаменационного билета: «На столе на подставке закреплён заряд и рядом лежит магнит. Существует ли вектор Пойнтинга  $[EH]$  и, если существует, то куда движется энергия?» В Основах Теории Электричества И.Е. Тамма в 1946 г. [1, с. 503] и в учебнике под редакцией К.А. Круга в 1952 г. [2, с. 371] утверждается «Мы приходим к представлению о непрерывной циркуляции энергии по замкнутым путям в статическом электромагнитном поле». И дальше: «Представление это не приводит к каким-либо следствиям, могущим быть проверенным на опыте, а потому лишено непосредственного физического смысла». Я повторил эти соображения. Преподаватель этого не читал и поставил мне *пару*. Преподаватель на пересдаче (осенний), услышав повторенный мной вопрос и ответ, поставил *отлично*. Хвост был ликвидирован. Со временем я понял, что прав был все-таки преподаватель, который поставил двойку.

Главная ошибка в высказывании академика И.Е. Тамма заключается в отношении такого рода поля к виду *электромагнитных*. Здесь имеет место два поля: одно электрическое без магнитной составляющей, второе магнитное без электрической составляющей, а не одно единое.

Другим «казусом» стало известное положение, что магнитное поле длинного соленоида или тороидальной катушки с током во внешнем объеме равно нулю, а электрическое присутствует, то есть не выполняются уравнения Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . (Магнитное поле  $\vec{B}$  равно нулю, значит, равен нулю его ротор и не может существовать переменное электрическое поле). *«Итак, магнитное поле вне очень длинного соленоида действительно равно нулю, хотя векторный потенциал нулю не равен»* [3, с. 285; 4, с. 21]. Сам Р. Фейнман видит причину этого несоответствия в игнорировании квантовых свойств поля [4, с. 17, 26].

Всякая теория является описанием, обобщением свойств группы опытов. Если, хотя бы один из опытов не подходит под описание, то неверна теория. (Сказанное относится и к тороиду, или тороид должен быть исключён из группы известных электромагнитных устройств).

Ещё, почему в теории распространения сигналов по двухпроводным линиям (переходные процессы) не применяют уравнения теории поля?

Эти факты требовали разрешения. И только недавно автору пришло в голову провести векторный анализ совместимости основных уравнений группы, называемых уравнениями Максвелла. Основные выводы этого сопоставления опубликованы несколько раз в изданиях, так называемых Международных конференций [5; 6]. Автор приходит к выводу, что основными уравнениями электродинамики являются не уравнения электрического и магнитного полей, а уравнения полей электрического и магнитного потенциалов.

### 1.1. Анализ совместимости уравнений Максвелла

Р. Фейнман приводит сводную таблицу формул электродинамики [4, с. 149.].

Перечень формул Р. Фейнмана	
<b>Уравнения Максвелла</b>	
$div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$	$div \vec{B} = 0$
$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$	$rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
<b>И их решения</b>	
$\vec{E} = -grad \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$	$\vec{B} = rot \vec{A}$
$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(t - r_{xp} / c)}{4\pi\varepsilon_0 r_{xp}} dV_p$	
$\vec{A}(x, y, z, t) = \int \frac{\mu_0 \cdot \vec{j}(t - r_{xj} / c)}{4\pi \cdot r_{xj}} dV_j$	
<b>Потенциалы поля <math>\varphi</math> и <math>\vec{A}</math></b> определяются источниками поля $\rho$ и $\vec{j}$ , и связаны дифференц. уравнениями:	
$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$	

Если к известным уравнениям электрического и магнитного полей применить операторы векторной алгебры, можно обнаружить их взаимное несоответствие. Неожиданным является результат: введенный Максвеллом в систему параметров «ток смещения» оказывается лишним.

Если взять ротор от двух уравнений в середине таблицы, то должны получиться два основных уравнения Максвелла:  $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , и  $rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Берём ротор от  $\vec{E}$  и, применяя второе уравнение из пары  $\vec{B} = rot \vec{A}$ , найдем:  $rot \vec{E} = -rot grad \varphi - rot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 - \frac{\partial}{\partial t} rot \vec{A} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Первое уравнение получилось.

Для дивергенции вектора  $\vec{E}$  с учётом  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$  получим:

$$div \vec{E} = -div grad \varphi - \frac{\partial}{\partial t} div \vec{A} = -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} div \vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} div \vec{A}.$$

Для случая «вдали» [6], где  $\text{div}\vec{A} = 0$ , найдём  $\boxed{\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ . Два уравнения полу-

чились. Здесь одно уравнение вытекает из другого.

Эти преобразования выполнили Л.Д. Ландау и Е.М. Лившиц [7, с. 182].

Если аналогично взять ротор от второго уравнения, то значение  $\text{rot}\vec{B}$  будет отличаться от табличного.

Для второй пары уравнений  $\text{rot}\vec{B} = \text{rot}\text{rot}\vec{A} = \text{grad}\text{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$ , с учётом  $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$  получим:  $\text{rot}\vec{B} = -\nabla^2\vec{A} + \text{grad}\text{div}\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \text{grad}\text{div}\vec{A}$ . Для случая «вдали», где  $\text{div}\vec{A} = 0$ , получим  $\boxed{\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}}$ . Здесь нет «тока смещения». (в уравнении Макс-

велла  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  он есть). Какое значение  $\text{rot}\vec{B}$  правильное?

Последнее уравнение в группе выполняется всегда  $\text{div}\vec{B} = \text{div}\text{rot}\vec{A} \equiv 0$ .

И.Е. Тамм в книге «Основы теории электричества» даёт поочерёдный последовательный вывод уравнений Максвелла. И.Е. Тамм вслед за Максвеллом вводит в формулы понятие плотность «тока смещения», как производную напряженности электрического поля по времени. Однако в параграфе «токи смещения» [1, с. 402] допущены ошибки.

Понятие плотность является характеристикой точки пространства. Но в приведенном на рисунке этого параграфа пространстве, ограниченном поверхностью, ни в точках объема, ни в точках на поверхности нет мест, где бы могло происходить суммирование плотности тока проводимости и так называемого тока смещения. На всей поверхности и внутри неё нет точек, содержащих ток проводимости, кроме места пересечения проводника этой поверхностью. В месте пересечения есть ток проводимости, однако отсутствует «ток смещения», то есть отсутствуют точки, в которых может происходить суммирование плотности тока проводимости с «током смещения». В этой связи не имеет смысла понятие «полного тока», так как он нигде не течёт и соответственно не должен присутствовать в уравнениях электродинамики.

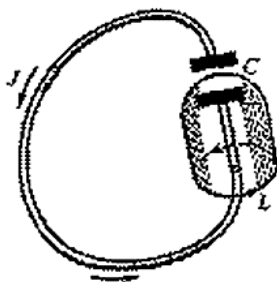


Рис. 1. Из книги И.Е. Тамма «ОТЭ» [1]

В рассуждениях этого параграфа упущен простой смысл. Вспомним интегральную форму записи теоремы Гаусса  $\oint_s \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Взяв производную по времени от обеих частей равенства, найдем  $\oint_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} i(t)$ . Изменение напряженности поля  $\vec{E}$  связано просто с изменением заряда на обкладках конденсатора. Перетекание зарядов определяет ток в проводнике. Ток в пределах сечения провода определяет плотность тока проводимости.

Похожую ошибку делает Р. Фейнман [4, с. 79]. Через любую точку, выбранной на сферической поверхности петли, можно провести такую же соприкасающуюся петлю (обе петли вместе будут напоминать цифру 8); направление вектора индукции в выбранной точке от обоих контуров будут противоположными. Суммарный вектор магнитной индукции окажется равным нулю. И так для всех точек поверхности вектор магнитной индукции равен нулю. Нет причин вводить какой-либо ток для «погашения тока проводимости». (аналогично, действие всех вертикальных токов смещения внутри плоского конденсатора будет нулевым).

«Ток смещения» не создает магнитное поле. Если бы он его создавал, то должно быть и обратное действие. То есть внешнее магнитное поле должно оказывать механическое воздействие на «ток смещения». Это действие не может проявиться, так как отсутствует носитель «тока смещения» (проводник, диэлектрик).

Л.А. Бессонов пишет [8, с. 651]. «Введение в основные уравнения переменного электромагнитного поля тока смещения является заслугой Джеймса

Максвелла. В 1873 г. Максвеллом была издана книга «Трактат об электричестве и магнетизме». В этой книге и был введён в электротехнические расчёты ток смещения».

Отметим, что «ток смещения» был введён в уравнения без каких-либо обоснований, если не считать желания видеть симметричную форму уравнений.

Существующая группа уравнений Максвелла представляет собой *взаимно несогласованную систему уравнений*. «Ток смещения» мешает совместимости уравнений.

Во многих книгах проявляется двойственность результатов в решениях поля. Например, в [8, с. 700.] приводится решение векторного потенциала (ф.19.22), затем через его ротор определяют индукцию  $B$  (ф.19.24) и с применением первого уравнения Максвелла (ф.19.29) находят электрическое поле  $E$ , (ф.19.35), (ф.19.36). Прямое определения  $E$  через производную по времени от векторного потенциала  $A$  по уравнению (ф.19.10) приводит к иным результатам.

### 1.2. Распространение сигналов по двухпроводным линиям связи.

Процесс распространения сигналов по двухпроводным линиям изучается в курсе «Теоретических основ электротехники», в разделе переходные процессы в электрических цепях

Исходные дифференциальные уравнения для линии с распределенными параметрами:

$$\text{имеют вид [2, с. 274]} \quad \left[ -\frac{\partial u}{\partial z} = r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \right] \left[ -\frac{\partial i}{\partial z} = g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \right]$$

Продифференцировав одно уравнение по  $x$  другое по  $t$ , для свободного пространства, где  $r_0 = g_0 = 0$ , находим:

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] \left[ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right], \text{ где обозначено } L_0 C_0 = \frac{1}{v^2}$$

Решением этих дифференциальных уравнений являются так называемые волновые функции, представляющие собой некое распределение напряжения  $u = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$  или тока вдоль линии и движущееся вдаль или к началу канала подобно движению корабля с его надстройками рубкой и мачтами.

Движение начинается с подачи разности потенциалов между вводными зажимами линии и состоит из трех процессов: во-первых, под действием потенциала и поля, существующего на фронте потенциала  $\vec{E} = \text{grad}\varphi$  начинают сдвигаться заряды в проводниках, во-вторых, движение зарядов, то есть электрический ток, порождает вокруг себя магнитное поле  $\vec{B}$ , и в-третьих, изменение магнитного поля вызывает по закону электромагнитной индукции опять электрическое поле, тормозящее скорость нарастания тока. С небольшой задержкой по времени элемент длины проводника получают заряд, а потенциал получает возможность продвинуться к следующему элементу.

Эта группа трёх процессов передвигается вдоль проводника. Глядя из середины проводника, направления вперед и назад представляются равноправными. Какое движение будет установившемся, зависит от начальных и граничных условий.

Если взять в качестве примера длинной линии коаксиальный кабель, можно найти электрическое и магнитное поле внутри кабеля:

$$E_r(r) = \frac{q}{2\pi r \varepsilon_0}, \quad u_{12} = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad u(r) = E_r(r) \cdot r \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad C_0 = \frac{q}{u_{12}} = 2\pi \varepsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

$$B_\alpha(r) = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} i(t), \quad \Phi = \int_{r_1}^{r_2} B_\alpha dr = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} i(t) \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad L_0 = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad L_0 C_0 = \varepsilon_0 \mu \mu_0 = \frac{1}{v^2}.$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial E_r}{\partial z} r \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\partial B_\alpha}{\partial t} r \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \boxed{-\frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{\partial B_\alpha}{\partial t}},$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial B_\alpha}{\partial z} r \frac{2\pi}{\mu \mu_0} = 2\pi \varepsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{\partial E_r}{\partial t} r \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \boxed{-\frac{\partial B_\alpha}{\partial z} = \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial E_r}{\partial t}}$$

Дифференциальные уравнения для полей имеют тот же вид как исходные уравнения.

Физически поля являются порождением потенциалов. Двигутся потенциалы вдоль линии, как плыли бы две ветви дерева, а поля как листья на этих ветвях. Одно поле переменное электрическое потенциальное, другое магнитное



вихревое, полученное от тока заряда ёмкости. Эти два поля независимы, но связаны. Общий для обеих полей – электрический ток.

Интенсивность и электрического и магнитного поля изменяются с изменением расстояния от центра: они интенсивные (густые) ближе к центру и слабые ближе к оплётке. Скорость бега слоёв волн при различной их интенсивности, тем не менее, одинакова. Плывет (со скоростью света) такое облако, плотное ближе к оси и редящее ближе к оболочке, не меняя оттенков (интенсивности) и формы. Научному сообществу необходимо определить (договориться), что участок пространства, заполненный полем разной интенсивности, является одним полем или он заполнен группой полей.

Дискриминация полей обостряется, если начать рассматривать поля в кабеле с двумя слоями изоляции (жила покрыта изоляцией иной проницаемости). Скорость распространения сигналов будет различна. Одно ли это поле? Это может стать предметом новых исследований. Опять напрашивается вывод: распространяются разности потенциалов и токи, поля являются лишь спутниками продвижений потенциалов и токов.

Если к началу линии будет подключен источник постоянной разности потенциалов, то по линии пробежит волна, когда она достигнет конца линии, в подключенную нагрузку в соответствии величиной разности потенциалов потечет ток. Спустя время в несколько периодов установится постоянный режим.

Аналогично решаются задача распространения сигналов при другой конфигурации проводников, например вертикальный провод над проводящей поверхностью (антенна) и др.

Для теории волнового распространения электромагнитных воздействий по проводам никакая дополнительная связь между  $E$  и  $B$  не потребовалась. (Например, уравнения из таблиц электродинамики, так называемые, уравнения Максвелла).

Здесь магнитные силовые линии, нанизаны на провода с током. Напряженность электрического поля и «токи смещения» перпендикулярны токам проводимости в проводах. Кольца, предполагаемых Максвеллом магнитных силовых

линий, нанизанных на линии «токов смещения» расположены между проводами. Их плоскости не пересекаются проводами линии.

«Ток смещения» не создает магнитное поле. Если бы он его создавал, то в кабеле должно существовать два перпендикулярных магнитных поля. Если бы ток смещения существовал, то должно быть и обратное действие. То есть внешнее магнитное поле должно оказывать механическое воздействие на «ток смещения». Это действие не может проявиться, так как отсутствует носитель «тока смещения» (проводник или диэлектрик). Гипотеза Максвелла, что ток смещения порождает магнитное поле, не оправдывается, так же как гипотеза Лавуазье о существовании теплорода.

Распространение электромагнитных воздействий в пространстве не может доказать справедливость сфантазированного Максвеллом уравнения! Пример: в двухпроводных линиях; есть распространение без уравнения!

Второе (первое) уравнения Максвелла не участвует в уравнениях распространения. Оно не выведено Максвеллом, а просто выдуманно, является плодом фантазии [14]. Из него должен быть исключён «ток смещения». С видоизменением первого уравнения (это уже будет не уравнение Максвелла) исчезнут волновые уравнения распространения полей [например, 8, с. 690], то есть пропадет теоретическая основа для самостоятельного движения электрического и магнитного полей, поля перестанут быть особой формой Материи!

Теория распространения электрических возмущений в пространстве вне проводников требует дополнительного развития.

Структура изложения электродинамики должна быть, видимо, такой:

## *2.0. Начала новой (постмаксвелловской) электродинамики*

В 1600 г (415 лет тому назад) английский врач Вильям Гильберт систематизировал известные явления по электричеству и магнетизму. Работа практического значения не имела. 230 лет назад, в 1785 г француз Шарль Кулон открыл первый закон, где люди научились проводить первые электрические измерения, что является первым признаком появления науки. В 1800 году Вольта изобрел

источник гальванического тока. В 1820 году Эрстед и Ампер дали первые описания взаимодействия электрических токов.

Практическое использование электричества и электрической энергии стало возможным только после открытия в 1831 г. (всего 185 лет тому назад) английским ученым Майклом Фарадеем закона электромагнитной индукции. Благодаря этому открытию из груды железа, меди, небольшого количества бумаги и быстрого движения стало можно получать и передавать на большие расстояния тепло, свет, механическую силу и много всего другого. Возникли и стали развиваться «Теоретические основы электротехники». «Теория электромагнитного поля».

Многочисленными опытами установлено, что между двумя электрическими зарядами или токами существуют силы взаимодействия. Рассматриваемые далее математические зависимости являются результатом обработки данных многих опытов. Пространство, в котором происходит изменение тех или иных параметров принято называть полем: поле температур, поле скоростей, поле сил. На вносимый в поле сил заряд или ток действует сила. При передвижении заряда или тока производится работа. Работа по перемещению единичного заряда или элемента тока (величиной в единицу и не имеющего размерности) называется потенциалом. Понятие вводится для того, чтобы найденный однажды, часто трудным образом, потенциал мог пригодиться для расчётов с любым внесённым зарядом.

Например, механический потенциал шара в точках на поверхности стола одинаковый, в точках над его поверхностью он больше. Для подъёма шара на некоторую высоту требуется сила (равная силе тяжести). Сила подъёма единицы массы определяется уравнением:  $\vec{F}_1 = -\text{grad}\varphi_{\text{тяж}} = g_{\text{земли}}$  – градиент потенциала. Сила подъёма тела конкретной массы  $m$   $F = mg_{\text{земли}}$ . Поверхности равного потенциала называются эквипотенциалами. В данном случае – это плоскости, точнее сферы большого диаметра.

### 2.1. Электрические и магнитные потенциалы

Источниками потенциалов являются: для электрических полей электрические заряды, для магнитных полей токи.

2.1.1. В пространствах занятых зарядами действует закон Кулона:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R_{1,2}^2} \vec{r}_{1,2}$$

Вектор силы направлен вдоль прямой, соединяющей точки расположения зарядов, при одинаковом знаке зарядов в сторону расталкивания. В точке 2 может оказаться заряд любой величины. Если ввести понятие *единичный заряд*, по величине равный единице и не имеющий размерности, формула приобретёт вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R}, \quad (2.1)$$

где R расстояние от заряда до точки наблюдения. Сама величина называется «*потенциал*». Он представляет собой работу, которую надо совершить для переноса единичного заряда издалека в характеризующую точку наблюдения. Если заряд будет не единичный, а конкретный (в кулонах), то работа получится в джоулях. Электрический потенциал величина скалярная, не векторная. Это свойство особенно удобно при наличии группы зарядов, так как потенциал в точке наблюдения будет просто суммой потенциалов от каждого заряда по отдельности. Потенциал группы зарядов.  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{R_n}$

Если заряды распределены в пространстве с плотностью  $\rho$ , то потенциал будет равен.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R_u} dV. \quad (2.2)$$

Силу, действующую на единичный заряд, называют напряженностью электрического поля и обозначают  $\vec{E}$ .

$$\vec{E} = -grad\varphi. \quad (2.3)$$

Понятие электрическое поле становится необходимым в случаях изучения причин возникновения электрических разрядов, эмиссии электронов вокруг холодных и горячих проводников, процессов ускорения заряженных частиц в ускорителях и т. п.

Градиент представляет собой функцию, которая строит из прилежащих к точке значений (например, температуры) вектор, показывающий величину и

направление самого быстрого изменения обследуемой величины (в данном примере – температуры).

При такой последовательности действий можно найти поле в большинстве конфигураций расположения зарядов, например, поле внутри, выше плоскости заряженного кольца. Для прямого нахождения поля, с использованием закона Гаусса, требуется наличие симметрии.

Вал цунами на море, сход снежной лавины в горах представляют собой движение механического потенциала. Передний край лавины показывает скорость нарастания и продвижения потенциала, это то, что мы в теории электричества называем электрическим или магнитным полем.

На испытательных установках прочности электрической изоляции поднимают потенциал рабочего электрода. Электрическое поле в зазоре зависит от формы электрода (игла, шар). Здесь понятия потенциал, поле мысленно делимы.

На практике используются в основном переменные во времени потенциалы это: силовые устройства, устройства передачи информации по радиоканалам. При этом потенциал и поле (т.е. скорость его изменения) тесно связаны и трудно делимы. Например, в кругах, расходящиеся от камня, брошенного в тихую водяную гладь, текущий уровень подъема и спада (например, в сантиметрах) относительно среднего уровня – это потенциал, бегущие склоны, (подъемы и спады) – это волны. Волны могут быть быстрые и плавные при одинаковой высоте подъема (потенциале) (например, если мы будем качать воду веслом).

Сила, действующая на конкретный заряд  $q_2$ :

$$\vec{F} = q_2 \vec{E} . \quad (2.4)$$

Работа по перемещению единичного заряда из одной точки пространства в другую определяется разностью потенциалов.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int \vec{E} d\vec{l} \quad (2.5)$$

Работа по перемещению конкретного заряда:  $(\varphi_1 - \varphi_2)q_2 = q_2 \int \vec{E} d\vec{l} .$

Работа за единицу времени – мощность:

$$w = (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{q_2}{\Delta t} = u \cdot i. \quad (2.6)$$

Здесь мы видим отличие нового изложения начал электродинамики от предыдущего: Как и раньше источником поля являются электрические заряды. Раньше заряд создавал электрическое поле, теперь создаёт поле электрического потенциала. Электрическое поле является градиентом потенциала. Один из ярких примеров отличия подхода является сфера с равномерно расположенным на поверхности зарядом. Расчёт потенциала даёт его прямое значение как внутри, так и вне сферы (см раздел примеры потенциалов). Потенциал внутри сферы равен потенциалу на поверхности снаружи. Электрическое поле внутри равно нулю, так как  $\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = -\text{grad}(\text{const}) = 0$ .

Для определения потенциала «снаружи» через электрическое поле приходилось прибегать к рассуждениям о значении постоянной интегрирования. Этим недостатком обладают все расчёты, в которых восстановление основной величины производится через известную её производную.

Если заряды, формирующие поле, расположены на некоторой эквипотенциальной поверхности (поверхность проводника), то вводится понятие электрической емкости –  $C$ , как отношение заряда к потенциалу проводника:  $C = q / \varphi$ . В практической электротехнике этот параметр используется в отношении к разности потенциалов:

$$q = C(\varphi_2 - \varphi_1) = C \cdot u. \quad (2.7)$$

Энергия, запасенная в электрической емкости, равна

$$W_s = Cu^2 / 2. \quad (2.8)$$

Электрическое поле вокруг проводника имеет, как правило, сложную форму и энергия системы может быть записана через напряженность электрического поля только для упрощенных конфигураций.

**2.1.2.** Теперь рассмотрим *поле группы подвижных зарядов – электрического тока*.

Каждая точка пространства характеризуется векторным потенциалом. Составляющая векторного потенциала в произвольной точке пространства,

например, в точке расположения элемента второго тока от элемента первого тока имеет такое же вид, как и скалярный потенциал электрического поля, с тем отличием, что теперь это величина векторная [2. с. 342]

$$d\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}}{R_{1;2}} \quad (2.9)$$

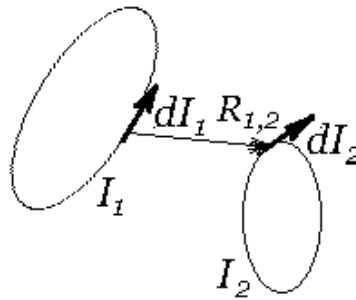


Рис. 2

Направление элемента вектора потенциала совпадает с направлением элемента действующего тока. Потенциал от всей группы элементов тока первого кольца [8, с. 630]:

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta}dV}{R_u} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l}}{R_u} \quad (2.10)$$

Магнитное поле тока:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (2.11)$$

При такой зависимости магнитного поля и магнитного потенциала будем иметь

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad (2.12)$$

(поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю). В этом случае говорят, магнитное поле не имеет истоков.

В векторном поле токов роль градиента потенциала играет ротор (rot) вектора. Приведём бытовую иллюстрацию функции ротора: Возьмем вращающийся «волчок». Если взять роторы скоростей движения различных частичек тела волчка, то мы получим значение (удвоенное) угловой скорости вращения, одинаковое для всех точек. То есть мы будем констатировать, что тело вращается с некой угловой скоростью. Вектор скорости будет направлен вдоль оси вращения.

Если ось волчка будет прецессировать, то будет прецессировать и вектор векторного потенциала. Если оператор ротора применить к скоростям частиц чая в помешиваемом стакане чая, то векторы угловой скорости в центре стакана и ближе к стенкам будут разными.

Магнитное поле также хорошо иллюстрируется воронкой атмосферного вихря или воронкой слива воды в ванной.

Сила, действующая на элемент второго тока:

$$d\vec{F} = I_2[d\vec{l}_2\vec{B}], \quad (2.13)$$

Здесь мы видим отличие нового изложения начал электродинамики от предыдущего: Как и раньше источником магнитного поля являются электрические токи. Раньше ток создавал магнитное поле, теперь он создаёт магнитный потенциал. Магнитное поле является ротором потенциала. Один из ярких примеров отличия подхода – тороидальная катушка индуктивности или длинный соленоид. Ток создает магнитный потенциал и внутри катушки и снаружи. Магнитное поле индукции существует только внутри катушки, снаружи это поле равно нулю.

2.1.3. Третий столп фундамента электродинамики – закон электромагнитной индукции:

$$\boxed{-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}_{\text{инд}}} \quad (2.14)$$

Закон отражает связь изменений магнитного потенциала с напряженностью электрического поля.

Закон электромагнитной индукции *для произвольной точки пространства* может быть сформулирован следующим образом: *«временные изменения векторного потенциала создают электрическое поле  $E_{\text{инд}}$ , называемое индукционным или электромагнитным».*

При таком подходе обнаруживается *единый принцип* нескольких опытов Фарадея (движение проводника в магнитном поле и неподвижный проводник в переменном магнитном поле (трансформатор)). О них пишет Фейнман [4, с. 53]. *«Мы не знаем в физике ни одного другого такого примера, когда бы простой и*



точный общий закон требовал для своего настоящего понимания анализа в терминах двух разных явлений. Обычно столь красивое обобщение оказывается исходящим из единого глубокого основополагающего принципа. Но в этом случае, какого-либо особо глубокого принципа не видно. Мы должны воспринимать «правило» как совместный эффект двух совершенно различных явлений».

Теперь общий принцип есть – меняющийся во времени магнитный потенциал. Временные изменения потенциала наступают, и когда заряд (проводник) перемещается в неравномерном поле векторного потенциала, и когда потенциал создан переменным током.

Закон Фарадея для контура представляет собой интегральную форму выражения (2.14). Действительно:

$$-\oint_L \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_L \vec{A} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \text{rot} \vec{A} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{B} d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}DC_{инд} = \oint_L \vec{E}_{инд} d\vec{l}.$$

При равенстве интегралов, равны подынтегральные выражения. (Во втором и третьем равенствах (знак =) использованы теорема Стокса и  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ ).

Закон Фарадея для контура  $\mathcal{E}DC_{инд} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  не является дифференциальной формой уравнений электродинамики, так как производная берётся не от векторов электрического и магнитного полей.

Если взять ротор от обеих частей равенства: (2.14), то

$$\text{rot} \vec{E}_{инд} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial (\text{rot} \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.15)$$

Это уравнение с учётом издержек замены последовательности дифференцирования дополняет известный комплект формул электродинамики.

Полное электрическое поле в пространстве равно сумме двух полей: поле электрических зарядов и поле индукционное, рожденное изменениями магнитного поля.

$$\vec{E} = \vec{E}_\rho + \vec{E}_{инд} = \vec{E}_\rho - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.16)$$

Аналогично электрическому полю для сред с линейной зависимостью намагниченности среды от тока для магнитного поля получим:  $\Phi = L \cdot i$ , и часто используемые в технической практике

$$-\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt} = u, \text{ и } W_m = Li^2 / 2 \quad (2.17)$$

Уравнения потенциалов позволяют определить полную картину полей. Потенциалы являются носителями электрического и магнитного поля.

## 2.2. Система согласованных уравнений электродинамики

Таблица формул электродинамики должна иметь иной вид (таблица 2).

Таблица 2

Перечень согласованных уравнений электродинамики	
<b>Потенциалы электродинамики</b>	
$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{(t - r_{x\rho} / c)}{4\pi \cdot r_{x\rho}} dV_\rho$	
$\vec{A}(x, y, z, t) = \int \mu_0 \cdot \vec{j} \frac{(t - r_{xj} / c)}{4\pi \cdot r_{xj}} dV_j \text{ или}$	
$\vec{A}(x, y, z, t) = \int \mu_0 \rho \cdot \vec{v} \frac{(t - r_{xj} / c)}{4\pi \cdot r_{xj}} dV_j$	
<b>Их производные</b>	
$\vec{E} = \vec{E}_\rho + \vec{E}_{\text{инд}}, \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A},$	
$\vec{E}_\rho = -\text{grad} \varphi, \quad \vec{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$	
<b>и дополнительные уравнения.</b>	
$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \left( \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} \right) \quad \text{div} \vec{B} = 0$	
$\text{rot} \vec{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + (\text{grad} \text{div} \vec{A})$	
<p>X (x, y, z) – точка наблюдения</p> <p><math>\vec{j} = \rho \vec{v}</math>, В таблице скобками обозначены дополнительные члены для точек пространства «вблизи», где <math>\text{div} \vec{A} \neq 0</math>.</p>	

В уравнениях этой таблицы отсутствует «ток смещения» и само уравнение Максвелла.

Пространственные изменения электрического потенциала воспринимаются как электрическое поле  $\vec{E}_p = -grad\varphi$ . (Например, в системе декартовых координат будем иметь  $E_{px} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ,  $E_{py} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ,  $E_{pz} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ ). Поле напряженности электрического поля является производной потенциалов в прямом и переносном смысле слова.

Пространственные изменения магнитного потенциала воспринимается как магнитное поле  $rot\vec{A} = \vec{B}$ , (Например, в системе цилиндрических координат при наличии цилиндрической симметрии, то есть при отсутствии зависимости параметров от угла  $\alpha$  для вектора  $\vec{A}$  будем иметь:  $rot_\alpha\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = B_\alpha$ ,  $rot_r\vec{A} = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} = B_r$ ,  $rot_z\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha)\right] = B_z$ ).

Временные изменения магнитного потенциала воспринимается так же как электрическое поле  $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E}_{инд}$ ,

В всех случаях поля являются скоростью изменения потенциалов. И электрическое и магнитное поле не есть материальные субстанции, они являются просто скоростями изменения потенциалов во времени или положения потенциала в пространстве!

Поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  обеспечивают лёгкую запись силовых воздействий на заряды и токи возле точки наблюдения.

Теперь можно ответить на вопрос, поставленный в начале. Длинный соленоид и тороид относятся к таким конфигурациям источника потенциала, в которых пространственные изменения потенциала во внешней области отсутствуют  $rot\vec{A} = \vec{B} = 0$ , а временные изменения определяются законом изменения тока.

С учетом вышесказанного: *самый верхний ранг (уровень) уравнений поля есть уравнения потенциалов*. Уравнения поля следуют из них. Ниже уровнем идут уравнения цепей, «закон Ома» и так далее.

Изменение формул электродинамики приведёт к изменению теории поля, теории распространения радиоволн, изменению теории антенн, остальная часть теоретических основ электротехники останется практически неизменной.

*«Выражение «реальное поле» реального смысла не имеет»... «реальное поле – это математическая функция, которая используется нами, чтобы избежать представления о дальнодействии» [4, с. 15]. В этой форме мысль выражена излишне формально. Когда мы говорим о распространении потенциала, невольно присутствует представление о запаздывающем дальнодействии, физически оно есть. (Жаль, что мы не знаем «тайных» нитей этих взаимодействий).*

### *3.0. Излучение и распространение энергии.*

Волновая зависимость потенциалов от расстояния и времени (аргумент функций  $(t - r_{xp}/c)$ ) определяет то, что с возникновением в некоторой точке пространства, исчезновением или изменением источника (заряда или тока) от этой точки начинает распространяться изменение потенциала [4, с. 120, 149]. Очевидно, что это продвижение происходит со скоростью света.

Запаздывающие потенциалы распространяются волновым образом (без изменения облика, рисунка поля) и с ними распространяются поля. Диаграмма «направленности» поля потенциала определяет диаграмму направленности электрического и магнитного полей. Потенциалы играют первичную роль. Электрическое и магнитное поля не самостоятельны. Они являются просто характеристикой скорости изменения потенциалов. Поля не могут распространяться без потенциалов. Когда поле потенциала и связанные с ним электрические и магнитные поля, достигают границы раздела двух сред, в новой среде возникают смещение связанных зарядов или токи, которые создают новую картину поля потенциалов и других полей (отражение). Если признать, что добавление Максвеллом в уравнения поля «тока смещения» есть волюнтаризм, то *не* придется говорить о каком-то самостоятельном виде движения полей кроме движения потенциалов.

С исключением из уравнений «тока смещения», исчезают волновые уравнения распространения электрического и магнитного поля, и само понятие распространения полей [1, с. 124; 4, с. 390]. Исчезает понятие материальности поля.

#### 4.0. Многочастотные поля

Если наблюдатель находится между двумя источниками, то мимо него проходят одни волны влево другие направо. Когда мы ведём прием радиостанций разных частот в одном месте, то опять же понимаем, что имеем дело с самостоятельными электромагнитными полями. В каждой точке имеется много электромагнитных полей, а не единое электромагнитное поле.

В общем случае частоты источников не равны.

Намеренье дать вывод формул для многочастотного поля представлено в [2, с. 374]. *«Электромагнитные поля могут быть, в общем случае, произвольными функциями времени. Исследование и расчет таких полей можно существенно облегчить (без ограничения общности выводов) если данное поле рассматривать как результат наложения постоянного поля и переменных полей, меняющихся во времени по гармоническому закону с различными частотами. Этот прием, как известно, обосновывается теорией тригонометрических рядов (и интегралов Фурье) и линейностью уравнений».*

Однако последующий вывод уравнений во всех учебниках проведен только для поля одной частоты.

Вокруг нас имеет место не электромагнитное поле, а множество электромагнитных полей. *Поле на каждой частоте есть самостоятельное поле.* На нулевой частоте могут существовать два поля одно электрическое, другое магнитное.

Особняком стоят поля целых кратных частот. Здесь мы, как и во всей электро радиотехнике, имеем дело с несинусоидальным полем той или иной формы (например, импульсным) и разложением этих полей в ряды Фурье.

Вернёмся к введению. Поле, созданное расположенными рядом электрическим зарядом и магнитом, представляет собой два независимых поля. Каждое из этих полей является атрибутом своего потенциала, но вместе они не образуют единого электромагнитного поля, поскольку векторы  $E$  и  $H$  не связаны уравнениями электродинамики. Иллюстрацией этого является, например, то, что простое перемещение, заряда не приводит к изменениям магнитного поля.

Главная ошибка в том высказывании И. Е. Тамма заключается в отнесении такого рода двух полей к виду одного электромагнитного.

### 5.0. Источники электрических потенциалов

На рисунке представлены основные явления электродинамики, показано их соподчинение.



Рис. 3

Список приведенных явлений, конечно, может быть расширен. Мы видим три основных вида получения электрических зарядов и потенциалов. Эти слова противоречат известному постулату: *электрические заряды не возникают и не исчезают*. В природе нет фактов опровергающих этот постулат! Противоречие снимается, если мы вспомним, что в природе заряды существуют парами из положительных и отрицательных зарядов, например, протоны и электроны, ионы. На расстояниях, превышающих размеры диполя, такая пара представляется наблюдателю нейтральной.

Существует ряд физических явлений, когда положительные и отрицательные заряды на время раздвигают на значительные расстояния. Это: 1) трение частиц материи. В результате, скопление малых зарядов может составлять большой

заряд, занимать большие площади и объемы. Со временем заряды объединятся медленно или быстро (гроза), 2) химическое, фото, термо разъединение зарядов, формирование разности электрических потенциалов («сторонние ЭДС») и 3) явления, благодаря которым, электричество вошло в практическую жизнь. Они представлены в правой нижней части рисунка. Это – пребывание проводника в поле переменного магнитного потенциала – закон Фарадея в дифференциальной форме (ЮС Черкашин). Здесь образуется, как бы замкнутый круг – изменения потенциала вызывают электрическое поле, электрическое поле в проводниках вызывает движение зарядов, то есть электрический ток, а последний порождает магнитный векторный потенциал. Передвижение проводника в поле потенциала может сопровождаться механической работой. Происходит преобразование механической энергии в электрическую и обратно. В этом круге может циркулировать энергия больших уровней (электродвигатели, электростанции).

Явлений, в которых изменения электрического поля вызывают появление магнитного поля, не существует. Уравнение Максвелла ложно. Равенство, задающее связь, указанных в уравнении величин неверно. На практике нет фактов подтверждающих это равенство. Факт распространения электромагнитных воздействия не может являться подтверждением равенства.

Если электрический заряд или ток переменные во времени, то могут существовать следующие совокупности: 1) переменный электрический потенциал и переменное электрическое поле 2) переменный магнитный потенциал, переменное магнитное поле и ещё переменное электрическое поле.

О энергии поля. Камень, поднятый над землёй имеет потенциал с точностью произвольной постоянной величины, то есть потенциал неудобный для практического использования. Практически интересна разность потенциалов. Однако, и разность потенциалов становится практически важной только после задания массы камня. Смена положения камня может происходить при совершении работы, с изменением энергии системы. Если камень может свободно перемещаться, падать, то его потенциальная энергия может переходить в кинетическую,

тепловую и др. энергию. Всё сказанное относится к потенциалу электрического заряда и магнитному потенциалу тока.

Водохранилище – это контейнер, в котором некая масса поднята на высоту. При падении с высоты происходит преобразование потенциальной энергии в кинетическую, а затем при наличии турбин и электрогенератора в электрическую.

В электричестве подобный контейнер есть конденсатор и катушка индуктивности. Заряженные они являются хранителями энергии. Только при оценке *удельного* количества энергии (на единицу объема) можно говорить о энергии поля:  $w_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$ .  $w_m = \frac{\mu\mu_0}{2} H^2$ . Просто всё получается только для плоского конденсатора. У цилиндрического конденсатора поле внутри объема имеет разную величину.

#### *6.0. Примеры полей потенциалов и их производных полей*

Геометрические формы основных источников для тех и других потенциалов различны: для электрических потенциалов основные источники имеют форму точечного заряда, форму линий и замкнутой поверхности (например, сферы); для магнитных потенциалов – форму линий, рамок (колец), катушек. Точечных и замкнутых поверхностных источников для магнитных потенциалов не бывает. Переменные электрическое поле может быть возбуждено изменениями электрического или магнитного потенциала. Изменения электрического потенциала не вызывают появления переменного магнитного поля.

Заряд на изоляционной подставке может изменяться за счёт притекающего (оттекающего) тока. Например, в диполе Герца два разноименных точечных заряда изменяются за счёт перемещения частей зарядов от одного полюса к другому, то есть электрического тока. Таким образом, диполь Герца является источником сразу двух видов электрического поля.

Ниже конечные результаты расчёта потенциалов представлены относительно короткими формулами (обведены рамкой) и графиками, вместе с тем, для того чтобы можно было проверить их достоверность приведены подробные преобразования.



## 6.1. Примеры полей электрических потенциалов

### 6.1.1. Потенциал уединённого точечного заряда

Потенциал уединённого точечного заряда  $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_u}$  следует из опытного

закона Кулона. Здесь  $R_u$  радиус интегрирования, расстояние от точки наблюдения (точки поиска потенциала) до точки расположения заряда  $q$ . Потенциал группы зарядов является суммой потенциалов в точке наблюдения от всех зарядов. Формула является основой для нахождения электрических потенциалов практических всех геометрических форм источников.

### 6.1.2. Потенциал равномерно заряженной сферической поверхности

Определим электрический потенциал заряда, распределенного равномерно на шаровой поверхности радиуса  $r$  (рис. 4). В виду сферической симметрии решение будем искать в сферических координатах:  $R, \Theta, \alpha$ .

Элемент заряженной поверхности  $ds = r \cdot d\alpha_\rho \cdot r \sin\theta_\rho \cdot d\theta_\rho$  Элемент заряда

$$dq = \frac{q \cdot ds}{4\pi r^2}, \quad dq = \frac{q \cdot d\alpha_\rho \cdot \sin\theta_\rho d\theta_\rho}{4\pi},$$

$$\text{Потенциал } \varphi = \frac{q}{16\pi^2 \epsilon_0} \oint \oint \frac{d\alpha_\rho \cdot \sin\theta_\rho \cdot d\theta_\rho}{R_\epsilon}$$

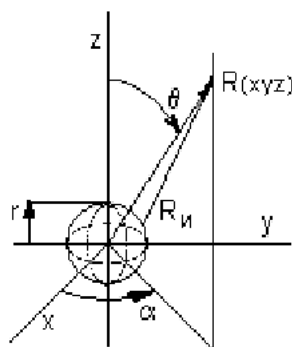


Рис. 4

Радиус интегрирования – расстояние от точки наблюдения до точки расположения элементарного заряда запишем сначала в декартовых координатах. Координаты точки наблюдения:  $x, y, z$ . Координаты элемента заряженной сферической поверхности:  $x_\rho, y_\rho, z_\rho$ . Проекции разности:  $(x - x_\rho), (y - y_\rho), (z - z_\rho)$ .

Расстояние между точкой наблюдения и элементом поверхности  $R_u = \sqrt{(x-x_\rho)^2 + (y-y_\rho)^2 + (z-z_\rho)^2}$ . Связь декартовых координат точек пространства со сферическими:  $x = R \sin \theta \cos \alpha$ ,  $y = R \sin \theta \sin \alpha$ ,  $z = R \cos \theta$ , элементов заряженной поверхности:  $x_\rho = r \sin \theta_\rho \cos \alpha_\rho$ ,  $y_\rho = r \sin \theta_\rho \sin \alpha_\rho$ ,  $z_\rho = r \cos \theta_\rho$ . Радиус интегрирования:

$$\begin{aligned} R_u &= \sqrt{x^2 - 2xx_\rho + x_\rho^2 + y^2 - 2yy_\rho + y_\rho^2 + z^2 - 2zz_\rho + z_\rho^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr(\sin \theta \cos \alpha \sin \theta_\rho \cos \alpha_\rho + \sin \theta \sin \alpha \sin \theta_\rho \sin \alpha_\rho + \cos \theta \cos \theta_\rho)} \\ &= \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr(\sin \theta \sin \theta_\rho (\cos \alpha \cos \alpha_\rho + \sin \alpha \sin \alpha_\rho) + \cos \theta \cos \theta_\rho)} \\ \text{и } R_u &= \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr(\sin \theta \sin \theta_\rho \cos(\alpha - \alpha_\rho) + \cos \theta \cos \theta_\rho)}. \end{aligned}$$

Обозначим  $(\alpha - \alpha_\rho) = \beta$ .

тогда  $R_u = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr(\cos \theta \cos \theta_\rho + \sin \theta \sin \theta_\rho \cos \beta)}$

Это самый простой вид записи размера радиуса интегрирования в сферических координатах. Можно перейти к относительным размерам:  $\frac{R}{r} = \chi_R$

$$R_u = \sqrt{\chi_R^2 + 1 - 2\chi_R(\cos \theta \cos \theta_\rho + \sin \theta \sin \theta_\rho \cos \beta)} \quad (6.1)$$

Общее решение потенциала встречает математические трудности.

Определим потенциал на оси при  $\theta = 0$ , и следовательно  $\sin \theta = 0$ , и  $\cos \theta = 1$ .

Из (6.1) найдём радиус интегрирования  $R_u = \sqrt{\chi_R^2 + 1 - 2\chi_R(\cos \theta_\rho)}$ .

$$\text{Запишем потенциал: } \varphi = \frac{q}{16\pi^2 \varepsilon_0 r} \iint \frac{d\beta_\rho \cdot \sin \theta_\rho d\theta_\rho}{\sqrt{\chi_R^2 + 1 - 2\chi_R(\cos \theta_\rho)}}$$

Сделаем замену переменных.  $dt = \sin \theta_\rho d\theta_\rho$ .  $\cos \theta_\rho = -t$  После замены пере-

$$\text{менных потенциал: } \varphi = \frac{q}{16\pi^2 \varepsilon_0 r} \iint \frac{d\beta_\rho \cdot dt}{\sqrt{\chi_R^2 + 1 + 2\chi_R t}}.$$

Параметры  $\beta$  и  $t$  являются независимыми; интегрирование по  $\beta_\rho$  дает  $2\pi$ .

Интеграл от простейшей иррациональной дроби  $\frac{1}{\sqrt{at+b}}$  имеет вид  $\frac{2}{a}\sqrt{at+b}$ .

$$\text{То есть } \varphi = \frac{q}{8\pi \varepsilon_0 r} \frac{2}{2\chi_\rho} \sqrt{\chi_R^2 + 1 + 2\chi_\rho t} = \frac{q}{8\pi \varepsilon_0 r} \frac{1}{\chi_R} \sqrt{\chi_R^2 + 1 - 2\chi_\rho \cos \theta_\rho} \Big|_0^\pi.$$

$$\varphi = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\chi_R} \left( \sqrt{\chi_R^2 + 1 + 2\chi_R} - \sqrt{\chi_R^2 + 1 - 2\chi_R} \right) =$$

$$= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\chi_R} \left( \sqrt{(\chi_R + 1)^2} - \sqrt{(\chi_R - 1)^2} \right) \cdot \boxed{\varphi = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\chi_R} (\chi_R + 1 - |\chi_R - 1|)}.$$

При  $\chi_R < 1$ , (внутри сферы)  $|\chi_R - 1| = 1 - \chi_R$ , и  $\boxed{\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}$ , потенциал постоянный (6.2)

(решение не очевидное), при  $\chi_R > 1$ , (вне сферы)  $|\chi_R - 1| = \chi_R - 1$ ,  $\boxed{\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\chi_R}}$  (6.3)

уменьшается по гиперболическому закону, также, как у точечного заряда.

В силу симметрии такой потенциал должны иметь все точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра сферы, не только на оси  $\theta = 0$ .

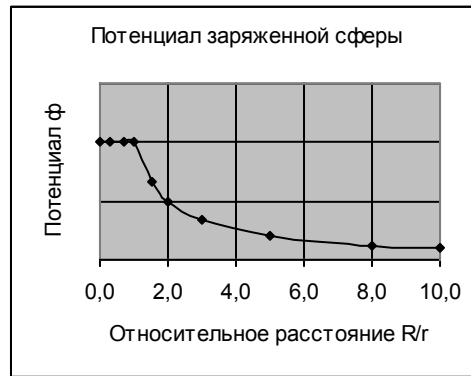


Рис. 5

Здесь выявляется очень важный факт: потенциал непрерывен при изменении координат от бесконечности до нуля. Потенциал показывает, что при переносе контрольного заряда из бесконечности до точек на поверхности шара и до всех точек, расположенных внутри шаровой поверхности, одинаков. Электрическое поле, определяемое через производные потенциала, внутри шара равно нулю. Поле потенциала является более полной, информативной характеристикой электрического поля (в частности, не требуется поиск постоянной интегрирования, который необходим при определении потенциала через напряженность поля).

### 6.1.3. Электрический диполь

Под диполем обычно понимают конфигурацию двух одинаковых по величине зарядов разной полярности (рис. 6).

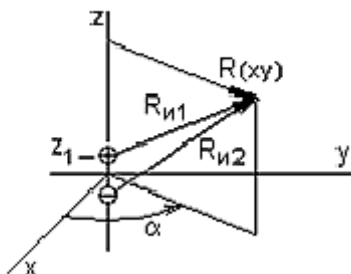


Рис. 6

Как раньше радиус интегрирования  $R_u = \sqrt{(x - x_\rho)^2 + (y - y_\rho)^2 + (z - z_\rho)^2}$  при  $x_\rho = y_\rho = 0$ ,  $R_u = \sqrt{r^2 + (z - z_\rho)^2}$

В конфигурации источника потенциала имеется всего два заряда, то есть, имеем два радиуса интегрирования:

$$R_{u1} = \sqrt{R^2 + (z - z_1)^2}, \quad R_{u2} = \sqrt{R^2 + (z + z_2)^2}.$$

И определение общего потенциала сводится к простому суммированию потенциалов двух зарядов (второй заряд отрицательный).

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_{u1}} - \frac{1}{R_{u2}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} \right)$$

В относительных единицах  $\chi_R = \frac{R}{l/2}$ ,  $\chi_Z = \frac{z}{l/2}$

$$\phi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \left( \frac{1}{\sqrt{\chi_R^2 + (\chi_Z - 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\chi_R^2 + (\chi_Z + 1)^2}} \right) \quad (6.4)$$

(Для «гантели» (два заряда одинаковой полярности) знак в середине скобок будет плюс. Будем иметь грубое подобие потенциала заряженного отрезка).

Применяя  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$  к (2.4), можно определить электрическое поле диполя.

Оператор градиента в цилиндрических координатах:  $\text{grad}\phi = r^0 \frac{\partial\phi}{\partial R} + \alpha^0 \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \alpha} + z^0 \frac{\partial\phi}{\partial z}$

при имеющемся виде симметрии потенциал не зависит от угла  $\alpha$ . В относительных единицах,  $E_R = -\frac{2}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \chi_R}$ ,  $E_Z = -\frac{2}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \chi_Z}$ .

Например, производная дроби  $\frac{\partial}{\partial \chi_R} \left( \frac{1}{\sqrt{\chi_R^2 + (\chi_Z - 1)^2}} \right) = \frac{-\chi_R}{\sqrt{(\chi_R^2 + (\chi_Z - 1)^2)^3}}$ .

Проведя преобразования, найдём радиальную составляющую поля:

$$E_R = \frac{q}{\pi \varepsilon_0 l^2} \left( \frac{\chi_R}{\sqrt{(\chi_R^2 + (\chi_Z - 1)^2)^3}} - \frac{\chi_R}{\sqrt{(\chi_R^2 + (\chi_Z + 1)^2)^3}} \right) \quad (6.5)$$

Осевая составляющая электрического поля:

$$E_Z = \frac{q}{\pi \varepsilon_0 l^2} \left( \frac{\chi_Z - 1}{\sqrt{(\chi_R^2 + (\chi_Z - 1)^2)^3}} - \frac{\chi_Z + 1}{\sqrt{(\chi_R^2 + (\chi_Z + 1)^2)^3}} \right) \quad (6.6)$$

Если заряды переменны во времени  $q(t)$ , то потенциал и поле будет переменным.

#### 6.1.4. Электрический потенциал заряженного кольца

В виду цилиндрической симметрии решение будем искать в цилиндрических координатах:  $R$ ,  $\alpha$ ,  $z$ . (рис. 7).

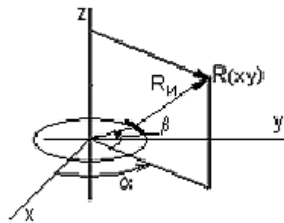


Рис. 7

Однако радиус интегрирования – расстояние от точки наблюдения до точки расположения элементарного заряда запишем сначала в декартовых координатах.

Координаты точки наблюдения:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Координаты элемента заряженной окружности:  $x_\rho$ ,  $y_\rho$ ,  $z_\rho$ . Разности проекций:  $(x-x_\rho)$ ,  $(y-y_\rho)$ ,  $(z-z_\rho)$ . Расстояние

$R_u = \sqrt{((x-x_\rho)^2 + (y-y_\rho)^2 + (z-z_\rho)^2)}$ . Связь декартовых координат точек

пространства с цилиндрическими:  $x = R \cos \alpha$ ,  $y = R \sin \alpha$ ,  $z$ . Координаты элементов заряда;  $x_\rho = r \cos \alpha_\rho$ ,  $y_\rho = r \sin \alpha_\rho$ ,  $z_\rho$ .

$$R_u = \sqrt{x^2 - 2xx_\rho + x_\rho^2 + y^2 - 2yy_\rho + y_\rho^2 + (z - z_i)^2} = \sqrt{R^2 - 2xx_\rho + r^2 - 2yy_\rho + (z - z_i)^2}$$

$$R_u = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr(\cos \alpha \cos \alpha_\rho + \sin \alpha \sin \alpha_\rho) + (z - z_\rho)^2}$$

$$R_u = \sqrt{R^2 + r^2 + (z - z_\rho)^2 - 2Rr \cos(\alpha - \alpha_\rho)} \text{ обозначим } \alpha - \alpha_\rho = \beta \quad (6.7)$$

Ради общности можно перейти к относительным размерам:  $\frac{R}{r} = \chi_R$   $\left(\frac{z}{r}\right) = \chi_Z$ ,

$$\left(\frac{z_\rho}{r}\right) = \chi_{Z\rho}, \quad \boxed{R_u = r \sqrt{\chi_R^2 + 1 + (\chi_Z - \chi_{Z\rho})^2 - 2\chi_R \cos \beta}} \quad (6.8)$$

Когда кольцо расположено на плоскости  $xu$ ,  $z_\rho = 0$ .

Это самый простой вид записи радиуса интегрирования в цилиндрической системе координат. Отсюда можно начать интегрировать. Длина окружности  $l = 2\pi r$ . Потенциал элемента заряженного кольца.

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_u} = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 r} \frac{rd\beta}{R_u} = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{d\beta}{R_u}. \text{ Потенциал кольца:}$$

$$\varphi = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0} \oint \frac{d\beta}{R_u} = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0} \oint \frac{d\beta}{r \sqrt{\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2 - 2\chi_R \cos \beta}}, \quad (6.9)$$

Запишем косинус через половинный угол  $\cos \beta = \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)$ ,

$$\varphi = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 r} \oint \frac{d\beta}{\sqrt{\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2 - 2\chi_R + 4\chi_R \sin^2 \frac{\beta}{2}}} \text{ и сделаем замену переменных, чтобы при-}$$

вести корень к форме, присущей эллиптическим интегралам.

$$\frac{\beta}{2} = \psi + \frac{\pi}{2} \quad \psi = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \quad d\beta = 2d\psi, \quad \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \sin^2 \psi.$$

Пределы  $\beta=0$ ,  $\psi=-\pi/2$ ;  $\beta=2\pi$ ,  $\beta/2=\pi$ ;  $\psi=\pi/2$ .

$$\varphi = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2 - 4\chi_R \sin^2 \psi}},$$

$$\text{обозначим } \boxed{\frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} = k^2} \quad (6.10)$$

это – фундаментальный параметр оценки пространства с практически наиболее частой цилиндрической (осевой) симметрией.

$$\varphi = \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \text{ Потенциал кольца в точке } x, y, z:$$

Функция относительно угла  $\psi$  – чётная, поэтому можно установить меньшие пределы. Корень с параметрами  $\chi_R$  и  $\chi_Z$  также не зависит от  $\psi$  и может быть вынесен за знак интеграла.

$$\varphi = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r} \frac{F(k)}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \quad (6.11)$$

Интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = F$  называют полным эллиптическим интегралом

первого рода и обозначают F или K. Эллиптический интеграл F(k) определит диаграмму направленности в плоскости, проходящей через ось z.

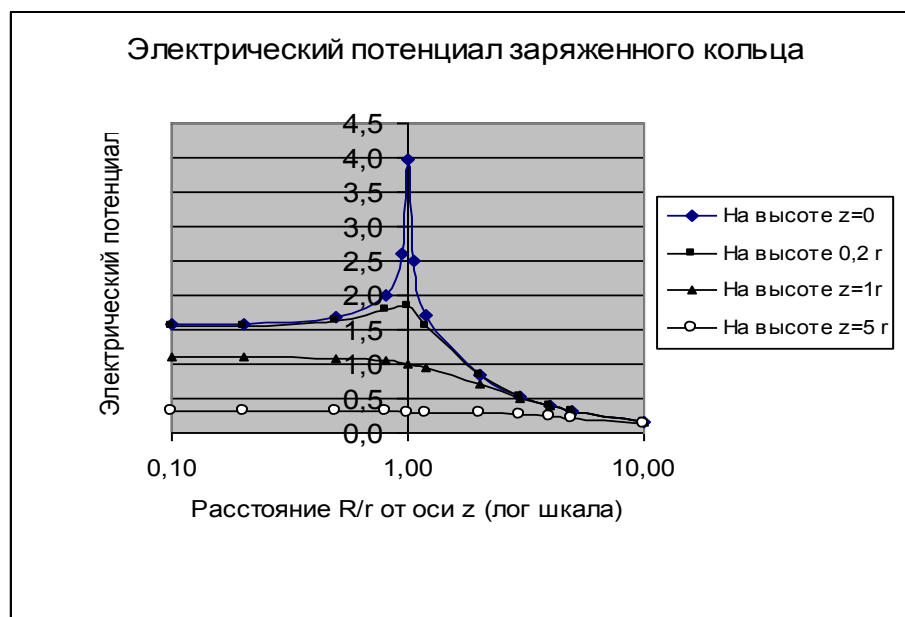


Рис. 8. Графики распределения потенциала кольца в пространстве

#### 6.1.4.1. Электрическое поле плоского кольца.

Авторы большинства книг указывают на возможность определения электрического и магнитного поля через поле потенциала, не производя самих расчётов. Расчёты оказываются весьма громоздкими, однако выполненные один раз в относительных единицах они оказываются пригодными в большинстве практических случаев

$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ . Оператор градиента в цилиндрических координатах:

$\text{grad}\varphi = r^0 \frac{\partial\varphi}{\partial R} + \alpha^0 \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha} + z^0 \frac{\partial\varphi}{\partial z}$  при имеющемся виде симметрии

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -r^0 \frac{\partial\varphi}{\partial R} - z^0 \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R}, \quad E_Z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

При переходе к относительным единицам,  $R = \chi_R r$ ,  $\partial R = r \partial \chi_R$ ,  $z = \chi_Z r$ ,

$\partial z = r \partial \chi_Z$ , то есть  $\text{grad}\varphi = -r^0 \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \chi_R} - z^0 \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \chi_Z}$ , и  $E_R = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \chi_R}$ ,  $E_Z = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \chi_Z}$ . Приме-

няя к (6.11), найдем

$$E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -\frac{\partial\varphi}{r \partial \chi_R} = \frac{-q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \chi_R} \left( \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \right) \right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \frac{\partial}{\partial \chi_R} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \right], \quad (6.12)$$

Производная дроби  $\frac{\partial}{\partial \chi_R} \left( \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \right) = \frac{-(\chi_R + 1)}{\sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^3}}$ .

Первый член суммы (6.12):  $\frac{-(\chi_R + 1)}{\sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^3}} F$ .

Второй член суммы. Дифференцируя интеграл F, найдём:

$$\frac{\partial}{\partial \chi_R} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{2} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} d\psi, \text{ здесь}$$

$$\frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R} = \frac{\partial}{\partial \chi_R} \frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} = 4 \left( \frac{1}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} + \frac{-2\chi_R(\chi_R + 1)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2} \right) =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{4(-\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2} \\
\text{и } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 1 + k^2 \sin^2 \psi) d\psi}{k^2 \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{k^2 \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} - \\
&- \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - k^2 \sin^2 \psi) d\psi}{k^2 \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} = \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} - \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)}}
\end{aligned}$$

Теперь в числителе нет синуса, здесь второй интеграл уже есть эллиптический интеграл первого рода. Первый интеграл есть первичный интеграл 3 вида –  $\theta(\psi, k)$ , Таблицы на него отсутствуют. По [9, с. 33] он выражается через интеграл второго рода и дополнительный член, который в нашем случае при подстановке пределов 0 и  $\pi/2$  обращается в 0.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} = \theta = \frac{1}{1 - k^2} \left( E(\psi, k) - \frac{k^2 \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \right) = \frac{1}{1 - k^2} E(\psi, k)$$

$$\text{То есть } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{1 - k^2} E(\psi, k) - F(\psi, k) \right),$$

$$\text{где } \frac{1}{1 - k^2} = \frac{1}{1 - \frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} = \frac{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2 - 4\chi_R} = \frac{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2}$$

Для получения производной от интеграла F остается разделить на 2 и умножить на производную  $\frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \chi_R} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} &= \frac{1}{2k^2} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R} \left( \frac{1}{1 - k^2} E(k) - F(k) \right) = \\
&= \frac{-(\chi_R^2 - 1 - \chi_Z^2)}{2\chi_R} \left( \frac{E(k)}{((\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2)} - \frac{F(k)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)} \right), \\
\text{где } \frac{1}{2k^2} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R} &= \frac{1}{2} \frac{(1 + \chi_R)^2 + \chi_Z^2}{4\chi_R} \frac{4(-\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2} = \frac{(-\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{2\chi_R((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)}.
\end{aligned}$$

Полностью второй член суммы (6.12):

$$\frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \frac{\partial}{\partial \chi_R} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} =$$

$$= \left( \frac{-(\chi_R^2 - 1 - \chi_Z^2)}{2\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \right) \left( \frac{E(k)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} - \frac{F(k)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)} \right)$$

Дифференцирование интеграла F свелось к комбинированию интегралов E и F с различными коэффициентами. Радиальная составляющая электрического поля будет:

$$\begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \chi_R} = \frac{-q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left[ \frac{-(\chi_R + 1)}{\sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^3}} F(k) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{-(\chi_R^2 - 1 - \chi_Z^2)}{2\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \right) \left( \frac{E(k)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} - \frac{F(k)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)} \right) \right] \cdot E_R = \\ &= \frac{-q}{4\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left[ \frac{1}{\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \left( 2 \frac{((- \chi_R (\chi_R + 1)) F(k))}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} + \frac{(\chi_R^2 - 1 - \chi_Z^2) F(k)}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\chi_R^2 - 1 - \chi_Z^2) E(k)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} \right] \end{aligned}$$

приводя подобные члены найдём:

$$E_R = \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)}} \left( \frac{1}{\chi_R} F(k) + \frac{(\chi_R^2 - 1 - \chi_Z^2) E(k)}{\chi_R ((\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2)} \right) \quad (6.13)$$

Графики изменения радиальной составляющей напряженности поля на разной высоте над плоскостью кольца в зависимости от расстояния от оси z представлены на рис 9.

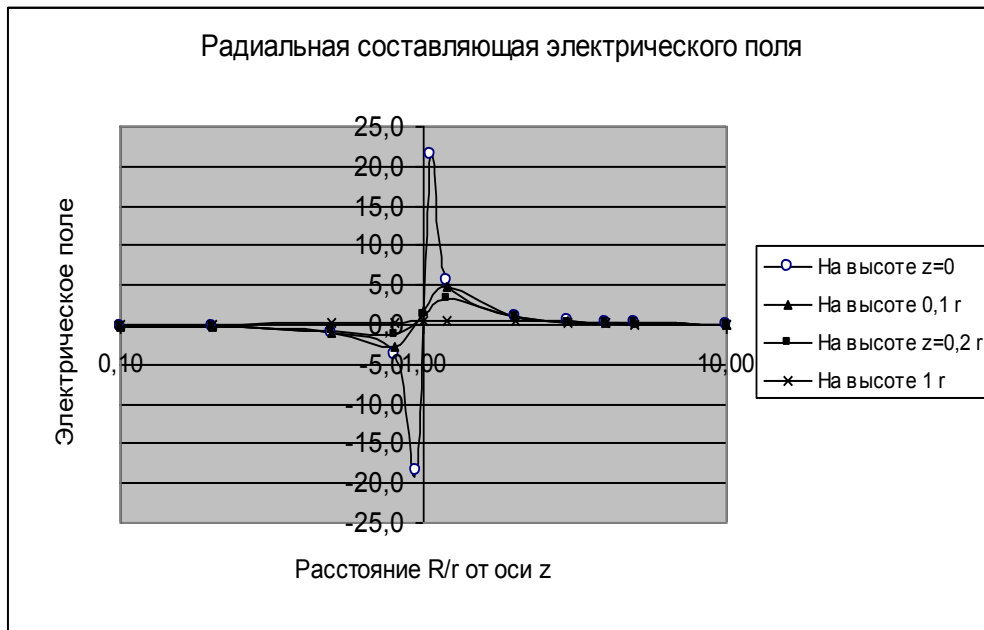


Рис. 9. Радиальная составляющая электрического поля кольца

Отрицательное значение характеризует то, что внутри кольца поле направлено против направления роста радиуса (к центру кольца).

Очевидно, что при применении закона Гаусса  $\oint_s E_n ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$  при обходе поверхности должна учитываться и внутренняя сторона кольца. Формулировка «значение потока не зависит от формы  $S$  до тех пор, пока заряд  $q$  находится внутри» [3, с. 83] для внешней поверхности, охватывающей кольцо, оказывается неверной. Другими словами, поток вектора напряженности электрического поля зависит от конфигурации расположения зарядов внутри поверхности. В данном случае отсутствует объемная (сферическая) симметрия поля вокруг кольца.

Определим аксиальную (вертикальную) составляющую электрического поля.

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \chi_z} = \frac{-q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \chi_z} \left( \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2}} \right) \right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2}} \frac{\partial}{\partial \chi_z} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \right], \quad (6.14)$$

Производная дроби  $\frac{\partial}{\partial \chi_Z} \left( \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \right) = \frac{-\chi_Z}{\sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^3}}.$

Первый член суммы (6.12):  $\frac{-\chi_Z}{\sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^3}} F.$

Второй член суммы. Дифференцируя интеграл F, найдём:

$$\frac{\partial}{\partial \chi_Z} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{2} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_Z} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} \partial \psi,$$

$$\text{здесь } \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_Z} = \frac{\partial}{\partial \chi_Z} \frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} = 4\chi_R \left( (-1) \frac{2\chi_Z}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2} \right) = \frac{-4\chi_R 2\chi_Z}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2}$$

С интегралом произведем аналогичные преобразования. Получим:

$$\frac{\partial}{\partial \chi_Z} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{2k^2} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_Z} \left( \frac{1}{1 - k^2} E(k) - F(k) \right) \quad (6.15)$$

Второй член суммы (6,14):

$$\left( \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \right) \frac{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}{4\chi_R} \frac{-4\chi_R 2\chi_Z}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2} \left( \frac{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} E(k) - F \right)$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \right) \cdot \left( \frac{-2\chi_Z}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} E(k) - \frac{-2\chi_Z}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)} F(k) \right)$$

Оба члена вместе  $E_Z = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} *$

$$* \left( \frac{-\chi_Z F}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} + \frac{-2\chi_Z}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} E(k) + \frac{2\chi_Z}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)} F(k) \right)$$

$$\text{и } E_Z = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \left( \frac{\chi_Z F(k)}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} - \frac{2\chi_Z E(k)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} \right) \quad (6.16)$$

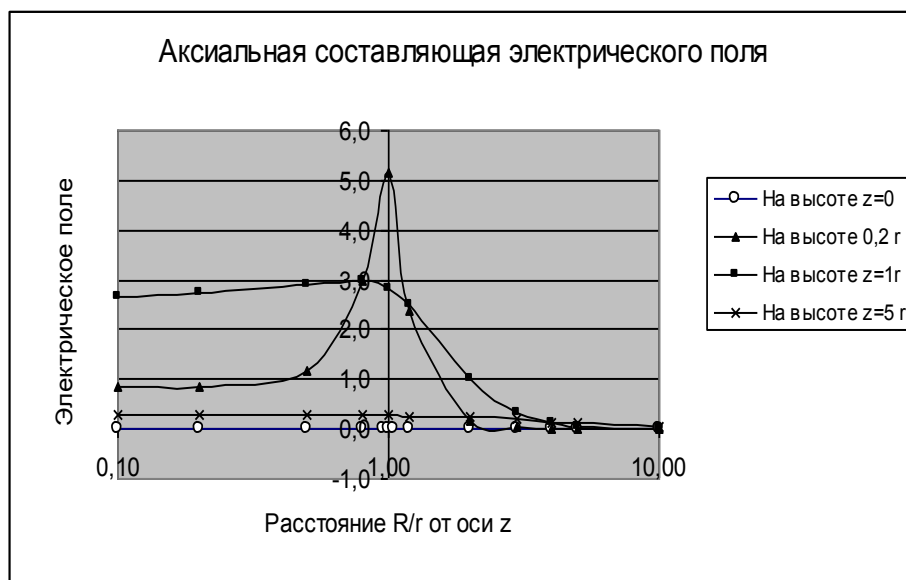


Рис. 10. Аксиальная составляющая электрического поля кольца

Понятно, что в плоскости кольца, на высоте  $z = 0$ , в силу имеющейся симметрии не может быть вертикальной составляющей поля.

### 6.2. Примеры полей магнитных потенциалов

Рассмотрим поля проводников с током. Под током понимается движение зарядов. Имеется несколько комбинаций такого движения. Движение электронов в электронной ламе или в пучке ускорителя заряженных частиц сопровождается электрическим полем заряда. Внешнее электрическое поле при движении зарядов в металлическом проводнике отсутствует, так как в проводнике имеется одинаковое количество положительных и отрицательных зарядов. В металлическом проводнике нет движения положительных зарядов, так они образованы зарядом неподвижных протонов. В ионной среде (растворы, вольтова дуга) ток состоит из движения зарядов обеих полярностей. Движение разнополярных зарядов в противоположных направлениях создает одинаковое магнитное поле. Сумму этих полей мы воспринимаем как единое магнитное поле. Далее мы рассматриваем ток в целом нейтрального проводника.

Типовыми конфигурациями проводников с током являются: прямой отрезок провода, рамка, катушка, соленоид и тороид. Несмотря на простоту геометрических форм, в литературе отсутствует полные строгие решения картины полей во всей области пространства вокруг проводника. В известных решениях нет

ответа, как выглядит потенциал вблизи источника на расстояниях, сопоставимых с его размерами.

Вводя понятие вектор-потенциала  $A$  учёные накладывают ограничение (как закливание), что для постоянного поля  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  и для переменного поля  $\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Однако, в уравнения для вычисления потенциала эти требования не заложены. При этом выяснилось, что принятое авторами многих книг по электродинамике [2, с. 348.], [8, с. 627], [1, с. 217, 438], [3, с. 279], [7, с. 220] допущение-предположение, что  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  на практике для многих простых конфигураций проводников не выполняется.

Рассмотрим подробнее каждый случай.

### 6.2.1. Отрезок прямого провода с током

Отметим вначале некоторую некорректность постановки этого вопроса. Токи всегда замкнуты и отрезков тока не бывает. Однако диполь Герца является хорошим приближением к отрезку проводника с током. Под действием сторонних сил можно заставить заряды перемещаться в сторону друг друга. Чем быстрее перемещение зарядов, тем сильнее электрический ток.  $i(t) = \partial q / \partial t$ . Подобные решения проведены в [2, с. 341; 8, с. 649; 3, с. 263, 283].

Суммирование векторных потенциалов отрезков тока составляющих замкнутый контур позволяет определить векторный потенциал проводника сложной замкнутой формы.

6.2.1.1. Найдем вектор-потенциал отрезка тока во всех точках окружающего пространства (рис. 11).

Выберем цилиндрическую систему координат.

Координаты точки наблюдения  $R, \alpha, z$ .

Вектор тока в этой системе имеет только одну проекцию вдоль оси  $z$ . Элемент тока  $\vec{\delta} = d\vec{l} = Id\vec{l}$ . Такую же составляющую будет иметь и вектор-потенциал

$$A. \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{\delta} dV}{R_u}.$$

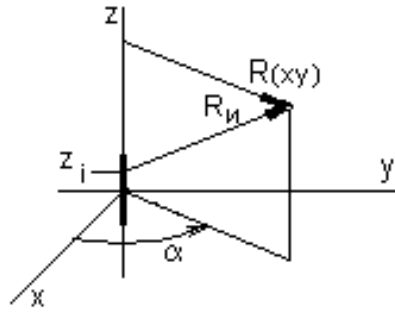


Рис. 11

Однако радиус интегрирования – расстояние от точки наблюдения до точки расположения элемента тока  $R_u$  сначала, найдем, используя декартовы координаты. Координаты точки наблюдения:  $x, y, z$ . Координаты элемента тока  $x_i=0, y_i=0, z_i$ . Радиус интегрирования  $R_u = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_i)^2}$ , учитывая связь декартовых координат с цилиндрическими  $x = R \cos \alpha, y = R \sin \alpha, z = z$ , получим  $x^2 + y^2 = R^2$

Находим суммарное действие всех элементов тока отрезка – потенциал  $A_z$ .

$$A_z = \frac{\mu l}{4\pi} \int_{z_i} \frac{dz_i}{\sqrt{R^2 + (z-z_i)^2}} = \frac{\mu l}{4\pi} \int_{z_i} \frac{dz_i}{R \sqrt{1 + \frac{(z-z_i)^2}{R^2}}} = \frac{\mu l}{4\pi} \int_{z_i} \frac{-du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$A_z = \frac{-\mu l}{4\pi} \operatorname{arcsch} \frac{z-z_i}{R}$$

Здесь применена замена переменных  $(z-z_i)/R=u, dz_i/R=-du$ .

Известно, что интеграл для провода бесконечной длины расходится, то есть векторный потенциал равен бесконечности [1, с. 349]. Мы определим векторный потенциал отрезка проводника длиной  $l$  (L).

Подставляем пределы  $\pm l/2$ .

$$A_z = \frac{\mu l}{4\pi} \left( \operatorname{arcsch} \frac{z+l/2}{R} - \operatorname{arcsch} \frac{z-l/2}{R} \right) \quad (6.17)$$

Выразим размеры в относительных единицах – в длинах половины отрезка, например, высоту  $-z/(l/2)=\chi_z$ , расстояние до оси  $R/(l/2)=\chi_R$ .

$$A_z = \frac{\mu l}{4\pi} \left( \operatorname{arcsch} \frac{2z/l+1}{2R/l} - \operatorname{arcsch} \frac{2z/l-1}{2R/l} \right)$$

$$A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \left( \operatorname{arcsch} \frac{\chi_z + 1}{\chi_R} - \operatorname{arcsch} \frac{\chi_z - 1}{\chi_R} \right) \quad (6,18)$$

Получаем уравнения отличные как от  $A_z = \frac{l \cdot i}{4\pi R}$  [2, с. 378], так и от

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln R \quad [3, \text{с. 284}].$$

На графиках представлены примеры распределения вектор-потенциала в пространстве в функции от относительных расстояний от центра проводника в радиальном направлении и от расстояния от центра проводника вдоль его оси.

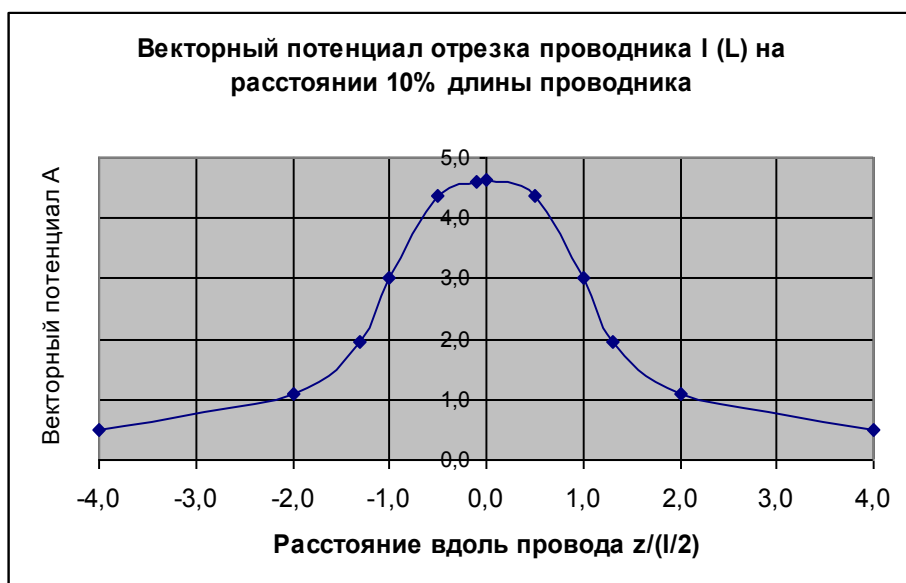


Рис. 12. График распределения магнитного потенциала отрезка проводника при перемещении вдоль оси на расстоянии от оси, равном 10% от длины проводника



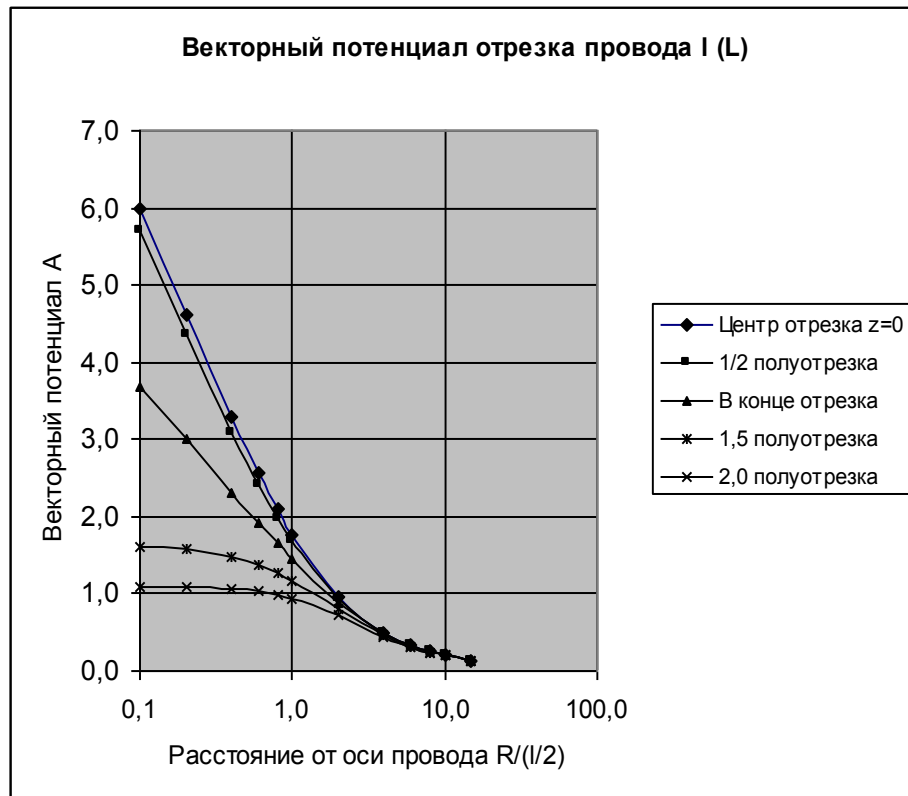


Рис. 13. Графики распределения потенциала отрезка проводника против его середины, и на высотах 0,5–2,0 его длины

6.2.1.2. Найдём дивергенцию вектора  $\vec{A}$ , полученного нами для отрезка провода. Оператор дивергенции в цилиндрических координатах:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

Получим:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\mu I}{4\pi R} \left( \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z+l/2}{R}\right)^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z-l/2}{R}\right)^2 + 1}} \right) \neq 0. \quad (6.19)$$

не равна нулю. При больших по сравнению с длиной отрезка  $l$  ( $L$ ) значениях  $z$  и/или  $R$  дивергенция будет стремиться к нулю. При  $z=0$ , то есть на плоскости  $(x, y)$  дивергенция при любом  $R$  равна нулю.

Уравнение потенциала (6.18) можно записать также в сферических координатах.

Например,  $A_R = \frac{\mu I \cos \theta}{4\pi} \left( \operatorname{arcsch} \left( \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\chi_R \sin \theta} \right) - \operatorname{arcsch} \left( \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\chi_R \sin \theta} \right) \right)$

$$A_\theta = \frac{-\mu I \sin \theta}{4\pi} \left( \operatorname{arcsch} \left( \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\chi_R \sin \theta} \right) - \operatorname{arcsch} \left( \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\chi_R \sin \theta} \right) \right)$$

В [2, с 380] составляющие того же потенциала записаны в сферических координатах иначе  $\dot{A}_R = \frac{\dot{C} \cos \theta e^{-jkR}}{R}$ ,  $\dot{A}_\theta = \frac{\dot{C} \sin \theta e^{-jkR}}{R}$   $\dot{A}_\alpha = 0$

Оператор дивергенции в сферических координатах:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}.$$

Найдём дивергенцию вектора  $\vec{A}$ , которая по принятым предположениям должна быть равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\dot{C} \cos \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R e^{-jkR}) + \frac{\dot{C} e^{-jkR}}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) = \frac{\dot{C} \cos \theta e^{-jkR}}{R^2} [1 - jkR + 2] \neq 0. \text{ Она не равна нулю.}$$

6.2.1.3. Определим значение вектора индукции магнитного поля  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ .

Оператор ротора в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot}_\alpha \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \operatorname{rot}_r \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \operatorname{rot}_z \vec{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right]$$

Вектор  $\vec{A}$  имеет только одну z составляющую, не зависящую от угла  $\alpha$ . Применяя к (6.15) получим:

$$B_\alpha = \operatorname{rot}_\alpha \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu I}{4\pi R} \left( \frac{z + l/2}{\sqrt{(z + l/2)^2 + R^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{(z - l/2)^2 + R^2}} \right) \quad (6.20)$$

Или в относительных единицах:

$$B_\alpha = \operatorname{rot}_\alpha \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu I}{4\pi R} \left( \frac{\chi_z + 1}{\sqrt{(\chi_z + 1)^2 + (\chi_R)^2}} - \frac{\chi_z - 1}{\sqrt{(\chi_z - 1)^2 + (\chi_R)^2}} \right) \quad (6.21)$$

При  $z=0$  (в плоскости  $xy$ ) получается:

$$B_\alpha = \operatorname{rot}_\alpha \vec{A} = \frac{\mu I}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2R}{l} \right)^2}} \quad (6.22)$$

При малом по сравнению с длиной отрезка расстоянии  $R$  получаем выражение, совпадающее с индукцией, полученной с применением закона полного тока.

6.2.1.4. Электрическое поле найдём из  $\vec{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . Если статических зарядов нет [10, с. 61] и ток переменный, то с учётом (6.18) получим:

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial i(t)}{\partial t} \left( \text{arcsch} \frac{\chi_z + 1}{\chi_R} - \text{arcsch} \frac{\chi_z - 1}{\chi_R} \right) \quad (6.23)$$

Вектор напряжённости электрического поля как и вектор магнитного потенциала направлен вдоль оси  $z$ . Радиальная составляющая напряжённости электрического поля возбуждаемого током на любых расстояниях от отрезка тока отсутствует. Это является существенным отличием от поля диполя.

Какое поле, поле отрезка тока или поле диполя является основным в данной точке пространства (а поля отличаются конфигурацией и фазой), зависит от интенсивности каждого из них.

Так может быть определена, например, напряжённость электрического поля вокруг провода линии электропередач, шнура тока линейной молнии и оценена возможность возникновения кольцевой «Шаровой» молнии [12].

В этом прямом решении не приходится вводить и определять постоянную интегрирования.

#### 6.2.2. Отрезок провода с осью, не совпадающей с осью координат.

Пусть проводник находится на расстоянии  $r$  от оси  $z$  (рис. 14).

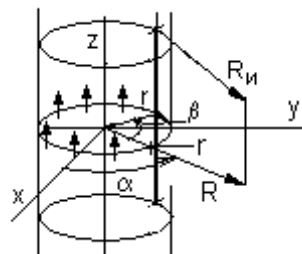


Рис. 14

В цилиндрических координатах координаты точки наблюдения  $x = R \cos \alpha$ ,  $y = R \sin \alpha$ ,  $z$ . Точки элементов проводника:  $x_i = r \cos \alpha_i$ ,  $y_i = r \sin \alpha_i$ ,  $z_i$ . Радиус-вектор интегрирования  $R_u$  запишем сначала в декартовых координатах.

$R_u = \sqrt{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)}$ . Далее выразив его в цилиндрических координатах, найдём:

$R_u = \sqrt{R^2 + r^2 + (z - z_i)^2 - 2Rr \cos(\alpha - \alpha_i)}$  Обозначим  $\alpha - \alpha_i = \beta$ . Потенциал

$$A_{z\beta} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{\partial z_i}{\sqrt{R^2 + (z - z_i)^2 + r^2 - 2Rr \cos \beta}} \quad \text{Было в разд.} \quad (6.2.1.1)$$

$$A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{z_i} \frac{dz_i}{\sqrt{R^2 + (z - z_i)^2}}.$$

Член  $(r^2 - 2Rr \cos \beta)$  характеризует смещение отрезка от оси  $z$ .

Интегрирование по  $z_i$  на конечной длине отрезка можно выполнить аналогично предыдущему. Так может быть определен потенциал отрезка двухпроводной линии (например, при  $\beta_1=0$  и  $\beta_2=\pi$ ).

#### 6.2.2.1. Векторный потенциал отрезка трубки с продольным током

Такой источник поля образован либо элементарными продольными отрезками токов, расположенными на окружности, либо кольцами с элементами токов, направленными вдоль оси (рис 14).

Для элемента элементарного кольца тока на поверхности цилиндра величина  $dI$  определится  $dI = I/2\pi r * r d\beta = Id\beta/2\pi$ .  $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\beta} \frac{dI \vec{z}_0}{R_u}$ .

Если произвести интегрирование по углу  $\beta$ , то получится потенциал элементарного кольца с поперечными токами. Пропуская промежуточные вычисления, найдём;

$$A_z = \frac{\mu I l}{4\pi^2} \iint_S \frac{d\chi_{zi} d\psi}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \gamma^2 + (\chi_z - \chi_{zi})^2 - 4\chi_R \sin^2 \psi}}$$

Однако на пути второго интегрирования возникают значительные трудности. Не удаётся выразить этот интеграл в известных функциях.

#### 6.2.3. Векторный потенциал кольцевого тока

Теперь ток течёт по окружности (рис. 15) Попытка найти векторный потенциал кольцевого тока сделана в [3, с. 290], Потенциал найден только вдали от кольца методом аналогии с потенциалом электростатики. Несколько полнее приведено решение в [11, с. 303].

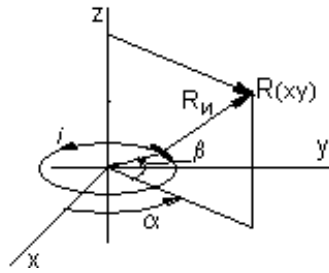


Рис. 15

Выберем ортогональную цилиндрическую систему координат. Теперь элемент интегрирования не скаляр, а вектор  $d\vec{l}$ , Вектор тока в этой системе имеет только одну альфовую проекцию. Такую же составляющую должен иметь и вектор  $\vec{A}$ .

Радиус интегрирования – расстояние от точки наблюдения до точки расположения элементарного тока запишем сначала в декартовых координатах.

Координаты точки наблюдения:  $x, y, z$ . Координаты элемента кольца:  $x_i, y_i, z_i$ . Проекции разности координат:  $(x - x_i) (y - y_i) (z - z_i)$ .

Расстояние  $R_u = \sqrt{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)}$  Связь цилиндрических координат и декартовых:  $x = R \cos \alpha, y = R \sin \alpha, z = z, x_i = r \cos \alpha_i, y_i = r \sin \alpha_i, z_i = z_i$ .

$$\sqrt{R^2 \cos^2 \alpha - 2Rr \cos \alpha \cos \alpha_i + r^2 \cos^2 \alpha_i + R^2 \sin^2 \alpha - 2Rr \sin \alpha \sin \alpha_i + r^2 \sin^2 \alpha_i + (z - z_i)^2}$$

$$R_u = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \alpha_i) + (z - z_i)^2}. \text{ Обозначим } \alpha - \alpha_i = \beta, \text{ будем иметь}$$

$$R_u = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \beta + (z - z_i)^2}. \text{ Выразим подкоренное выражение в относительных единицах. Обозначим; } \frac{R}{r} = \chi_R, \frac{z}{r} = \chi_Z, \frac{z_i}{r} = \chi_{Zi} \text{ вынесем } r \text{ за знак радикала.}$$

$$\boxed{R_u = r \sqrt{\chi_R^2 + 1 + (\chi_Z - \chi_{Zi})^2 - 2\chi_R \cos \beta}} \quad (6.24)$$

при  $z_i$  равном 0 кольцо расположено в плоскости  $x, y$ .

Для радиуса интегрирования получилась компактная запись.

Радиус интегрирования имел такой же вид при изучении заряженного кольца. Вклад элементов заряженного кольца в образование потенциала зависел от ориентации кольца в пространстве и не зависел от ориентации в пространстве

элементов интегрирования. В создании потенциала тока дополнительно важна ориентация каждого элемента тока в пространстве.

С учетом угла  $\beta$ , проекции отрезка элемента тока на направления  $R^0$  и  $\alpha^0$  будут  $dl_R = rd\beta \sin \beta$ ,  $dl_\alpha = rd\beta \cos \beta$ . Как и раньше произведем интегрирование по углу  $\beta$ .

$$A_\alpha = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\beta} \frac{I \cdot r \cos \beta \cdot d\beta}{R_e} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\cos \beta \cdot d\beta}{\sqrt{\chi_R^2 + \chi_Z^2 + 1 - 2\chi_R \cos \beta}} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\cos \beta \cdot d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}},$$

$$\text{где } a = (\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2), \quad b = 2\chi_R,$$

Сначала преобразуем этот интеграл:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\cos \beta \cdot d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} = \frac{\mu I}{-4\pi \cdot b} \int_{\beta} \frac{ad\beta - b \cos \beta \cdot d\beta - ad\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} = \frac{-\mu I}{4\pi \cdot b} \int_{\beta} \frac{ad\beta - b \cos \beta \cdot d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} - \\ &- \frac{-\mu I}{4\pi} \frac{a}{b} \int \frac{d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{a}{b} \int \frac{d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} - \frac{\mu I}{4\pi b} \int \sqrt{a - b \cos \beta} \cdot d\beta \end{aligned}$$

Он свёлся к двум интегралам, напоминающим об эллиптической форме.

Далее воспользуемся тригонометрической формулой:

$$\cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}.$$

$$\text{получим } A_\alpha = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{a}{b} \int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{a - b(1 - 2 \sin^2 \beta/2)}} - \frac{\mu I}{4\pi b} \int_0^{2\pi} \sqrt{a - b + 2b \sin^2 \frac{\beta}{2}} d\beta$$

Это эллиптические интегралы, однако, перед  $\sin^2 \beta/2$  стоит знак плюс.

Сделаем замену переменных:

$$\frac{\beta}{2} = \psi + \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2} \right), \quad d\beta = 2d\psi, \quad \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \sin^2 \psi$$

Пределы  $\beta=0$ ,  $\psi=-\pi/2$ ;  $\beta=2\pi$ ,  $\beta/2=\pi$ ;  $\psi=\pi/2$ .

$$A_\alpha = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\cos \beta \cdot d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{a}{b} \int_{\psi} \frac{2d\psi}{\sqrt{a - b + 2b(1 - \sin^2 \psi)}} - \frac{\mu I}{4\pi} \frac{2}{b} \int_{\psi} \sqrt{a + b - 2b \sin^2 \psi} d\psi$$

Вынося за знак корня  $(a+b)$ , получим:

$$A_\alpha = \frac{\mu I}{4\pi} \left( \frac{a}{b} \frac{2}{\sqrt{a+b}} \int_{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} - \frac{2\sqrt{a+b}}{b} \int_{\psi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi \right) \quad (6.25)$$

Интегралы табличные. Интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = F$ , часто обозначают  $K$ , второй  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} \cdot dx = E$ , есть полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

$$\text{Далее } a+b = (\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2 + 2\chi_R) = ((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2), \quad k^2 = \frac{2b}{a+b} = \frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{2b}{a+b}} = \frac{2\sqrt{\chi_R}}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}, \text{ такой же, как в предыдущих решениях (6.26)}$$

$$\text{Обозначим } \frac{2\sqrt{a+b}}{b} = \frac{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}{\chi_R} = k_E \text{ другой множитель (6.27)}$$

$$\frac{2a}{b\sqrt{a+b}} = \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{\chi_R \sqrt{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2 + 2\chi_R)}} = \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} = k_F \cdot k_F = \frac{k(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{2\chi_R \sqrt{\chi_R}} \quad (6.28)$$

Окончательно получим

$$A_\alpha = \frac{\mu I}{2\pi} \left( k_F \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} - k_E \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi \right),$$

$$\text{или } A_\alpha = \frac{\mu I}{2\pi} (k_F F - k_E E) \quad (6.29)$$

$$\text{или } A_\alpha = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \frac{1}{\chi_R} \left( (\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2) F - ((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2) E \right) \quad (6.30)$$

Элемент тока  $dl$  имеет составляющую вдоль радиуса  $dl_R = rd\beta \sin \beta$ . Проекция вектор-потенциала на направление  $R$ .

$$A_R = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\sin \beta \cdot d\beta}{\sqrt{\chi_R^2 + \chi_Z^2 + 1 - 2\chi_R \cos \beta}} = 0$$

Это интеграл табличный. Его значение при изменении  $\beta$  в пределах от 0 до  $2\pi$  равно 0. То есть радиальная составляющая потенциала, как и предполагалось, равна 0.

$$\text{Размерность вектор-потенциала: } \frac{V \cdot s}{m} = \frac{B \cdot c}{m}.$$

Графики представляют распределение вектор-потенциала в пространстве в функции от относительных расстояний точки наблюдения от оси кольца и от расстояния над плоскостью кольца.

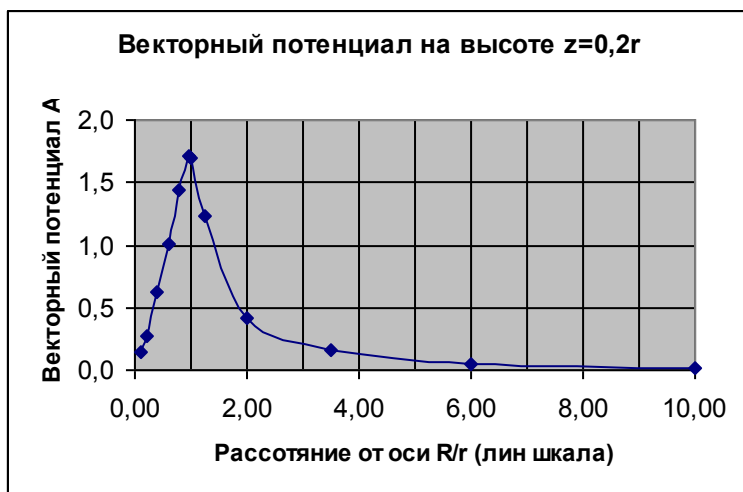


Рис. 16

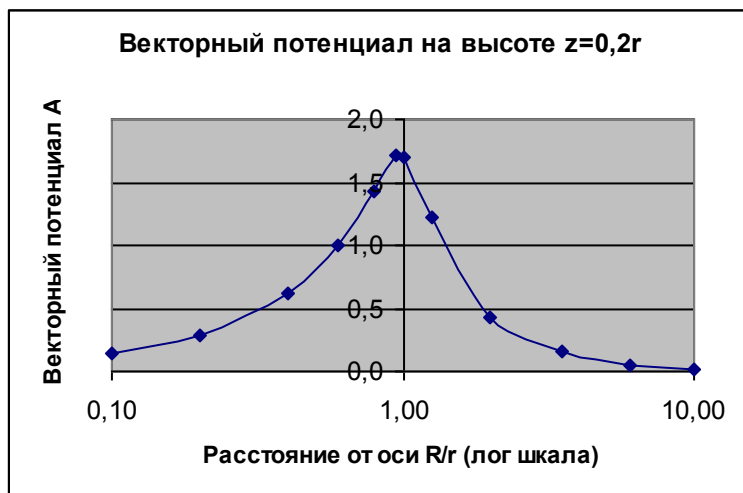


Рис. 17



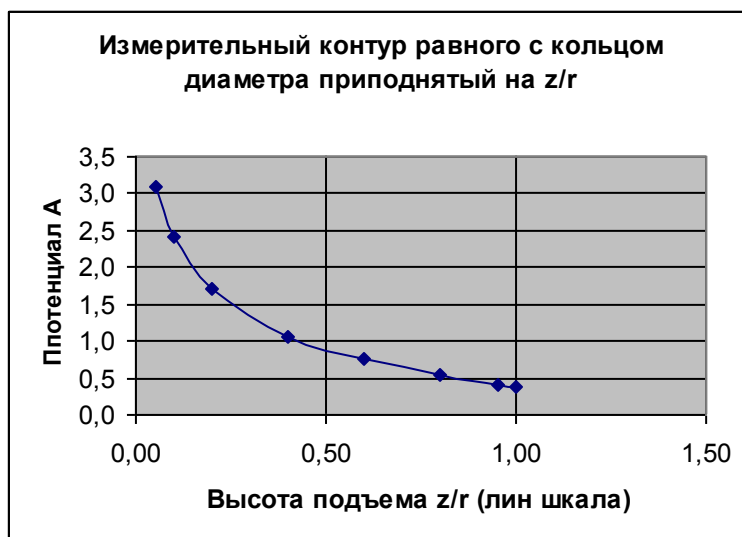


Рис. 18

Графики распределения векторного потенциала кольца с током.

Полученные решения дают картину полей независящую от абсолютных геометрических размеров, а только от относительных. Это означает что, например, при токе 5 А поле будет одинаковым у кольца диаметром 10 см и кольца диаметром 1 м, если мы будем измерять его на расстоянии 20 см и 2 м соответственно. При этом предполагается, что размеры сечения провода значительно меньше радиуса кольца.

На рисунке 19 представлена картина поля векторного потенциала в плоскости витка. Контурными стрелками обозначено поле потенциала меньшей интенсивности. Силовые линии здесь – окружности. В пространстве эквипотенциальные поверхности напоминают тороидальные поверхности (бублик) не кругового сечения.



Рис. 19. Векторный потенциал кольцевого тока

В теории электрических машин термин «вращающееся магнитное поле» должен быть заменён на термин «поле вращающегося магнитного потенциала».

При этом картина, представленного на рисунке потенциала, перемещаться в одном из направлений в плоскости рисунка.

### 6.2.3.1. Найдем дивергенцию вектора магнитного потенциала кольца

Оператор дивергенции в цилиндрических координатах имеет вид:

$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ . Сам вектор потенциал имеет только одну альфовую составляющую (6.29), не зависящую от угла альфа. То есть дивергенция магнитного вектор-потенциала кольцевого тока будет равна нулю независимо от величины и направления удаления от кольцевого тока.

### 6.2.3.2. Вектор магнитной индукции – $\vec{B}$ .

Определим теперь индукцию магнитного поля  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ . Общая форма оператора ротора в цилиндрических координатах:

$$\text{rot}_\alpha \vec{A} = \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}, \quad \text{rot}_R \vec{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \quad \text{rot}_z \vec{A} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (R A_\alpha) - \frac{\partial A_R}{\partial \alpha} \right]$$

При наличии только одной составляющей векторного потенциала  $A_\alpha$ , независимой от угла альфа будем иметь

$$B_R = \text{rot}_R \vec{A} = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial z},$$

$$B_z = \text{rot}_z \vec{A} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (R A_\alpha) \right] = \frac{1}{R} \left[ R \frac{\partial}{\partial R} A_\alpha + A_\alpha \right] = \frac{\partial A_\alpha}{\partial R} + \frac{A_\alpha}{R}.$$

#### 6.2.3.2.1. Радиальная составляющая – $B_R$ , перпендикулярная оси z.

Принятые обозначения  $z = \chi_z r$ ,  $\partial z = r \partial \chi_z$ ,  $R = \chi_R r$ ,  $\partial R = r \partial \chi_R$ .

$$B_R = \text{rot}_R \vec{A} = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} = -\frac{\mu I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} (k_F F - k_E E) = -\frac{\mu I}{2\pi r} \left( k_F \frac{\partial F}{\partial \chi_z} + F \frac{\partial k_F}{\partial \chi_z} - k_E \frac{\partial E}{\partial \chi_z} - E \frac{\partial k_E}{\partial \chi_z} \right) \text{Рассмотрим}$$

последовательно члены этой суммы.

6.2.3.2.1.1. Первый член суммы  $k_F \frac{\partial F}{\partial \chi_z} = B_{R1}$ , определяется тремя входящими параметрами:

$$k_F = \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2)}{\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2}}, \quad F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k^2 = \frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2}.$$

Аналогично (раздел 6.1.4.1.),

$$\frac{\partial F}{\partial \chi_Z} = \frac{\partial}{\partial \chi_Z} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{2k^2} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_Z} \left( \frac{1}{1-k^2} E(k) - F(k) \right).$$

Весь первый член суммы будет:

$$k_F \frac{\partial F}{\partial \chi_Z} = \frac{\chi_Z (\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{\chi_R \sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^3}} \left[ F(\psi, k) - \frac{1}{1-k^2} E(\psi, k) \right].$$

И с учетом  $\frac{1}{1-k^2} = \frac{1}{1 - \frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} = \frac{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2 - 4\chi_R} = \frac{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2}$  оконча-

тельно получим  $k_F \frac{\partial F}{\partial \chi_Z} = \frac{-\chi_Z (\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{\chi_R \sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^3}} \left[ \frac{1}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} E - \frac{1}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} F \right].$

6.2.3.2.1.2. Далее второй член суммы:  $F \frac{\partial k_F}{\partial \chi_Z} = B_{R2}$ , где  $k_F = \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}$ .

$$\frac{\partial k_F}{\partial \chi_Z} = \frac{\chi_Z}{\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \left( 2 - \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)} \right) \text{ и } F \frac{\partial k_F}{\partial \chi_Z} = \frac{\chi_Z (\chi_R^2 + 4\chi_R + 1 + \chi_Z^2)}{\chi_R \sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^3}} F.$$

6.2.3.2.1.3. Находим предпоследний член суммы.  $k_E \frac{\partial E}{\partial \chi_Z} = B_{R3}$ ,

где  $k_E = \frac{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}{\chi_R}$ ,  $E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi$ .

$$\frac{\partial E}{\partial \chi_Z} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin^2 \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_Z} d\psi = \frac{1}{2k^2} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_Z} \int_0^{\pi/2} \frac{-1 + 1 - k^2 \sin^2 \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi.$$

Теперь нет синуса в числителе и  $\frac{\partial E}{\partial \chi_Z} = \frac{1}{2k^2} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_Z} (E - F)$ .

Определив производную  $\frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_Z} = \frac{-4\chi_R 2\chi_Z}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2}$ , окончательно получим

$$k_E \frac{\partial E}{\partial \chi_Z} = \frac{\chi_Z}{\chi_R \sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)}} (F - E),$$

6.2.3.2.1.4. И последний, четвёртый член суммы:  $E \frac{\partial k_E}{\partial \chi_Z} = B_{R4}$ , где

$$k_E = \frac{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}{\chi_R}, \text{ его производная } \frac{\partial k_E}{\partial \chi_Z} = \frac{1}{2\chi_R} \frac{2\chi_Z}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}$$

$$E \frac{\partial k_E}{\partial \chi_Z} = \frac{\chi_Z}{\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} E. \text{ В двух последних } E-E=0. \text{ Остаётся } F.$$

$$k_E \frac{\partial E}{\partial \chi_Z} + E \frac{\partial k_E}{\partial \chi_Z} = \frac{\chi_Z}{\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} F$$

Теперь суммируем члены  $B_R$ , отдельно  $E$  и  $F$ :

$$B_R = -\frac{\mu I}{2\pi r} \frac{k_{\chi_Z}}{2\chi_R \sqrt{\chi_R}} \left( \frac{-(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} E + \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} F + \frac{(\chi_R^2 + 4\chi_R + 1 + \chi_Z^2)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)} F - F \right)$$

$$B_R = \frac{\mu I}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \frac{\chi_Z}{\chi_R} \left( -F + \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} E \right) \quad (6.31)$$

На значительном удалении  $\chi > 1$  единицей можно пренебречь, в скобках получается просто разность двух эллиптических интегралов.

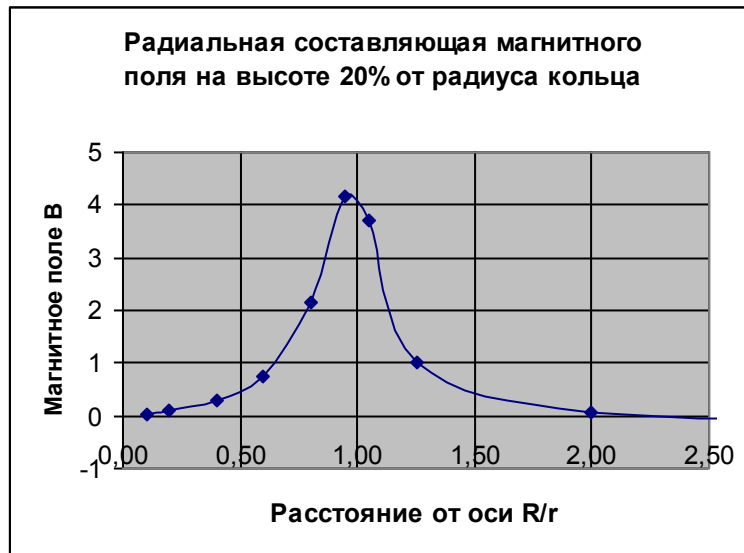


Рис. 20

График распределения горизонтальной составляющей магнитного поля. Уже на расстоянии от кольца равном радиусу  $R/r = 2$ , радиальная составляющая магнитного поля практически равно нулю.

На плоскости ( $z = 0$ ) радиальная (горизонтальная) составляющая индукции на любом расстоянии от центра равна нулю.

6.2.3.2.2. Есть ещё *вторая проекция ротора вектора  $A$* , вертикальная, зетовая, более сложная.

$$rot_z \vec{A} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (R A_\alpha) - \frac{\partial A_R}{\partial \alpha} \right] = B_z, \quad rot_z \vec{A} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (R A_\alpha) \right], \quad rot_z \vec{A} = \frac{1}{R} \left[ A_\alpha + R \frac{\partial A_\alpha}{\partial R} \right]$$

$$B_z = rot_z \vec{A} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial R} + \frac{A_\alpha}{R}, \quad \text{В относительных единицах } R = \chi_R r, \quad \partial R = r \partial \chi_R.$$

$$B_z = \frac{\partial A_\alpha}{\partial R} + \frac{A_\alpha}{R} = \frac{\mu I}{2\pi \cdot r} \left( \frac{\partial}{\partial \chi_R} (k_F F - k_E E) + \frac{k_F F}{\chi_R} - \frac{k_E E}{\chi_R} \right)$$

$$B_z = \frac{\mu I}{2\pi \cdot r} \left( k_F \frac{\partial F}{\partial \chi_R} + F \frac{\partial k_F}{\partial \chi_R} - k_E \frac{\partial E}{\partial \chi_R} - E \frac{\partial k_E}{\partial \chi_R} + \frac{k_F F}{\chi_R} - \frac{k_E E}{\chi_R} \right), \text{ стало 6 членов суммы.}$$

6.2.3.2.2.1. Начнём с  $k_F \frac{\partial F}{\partial \chi_R} = B_{ZI}$ , этот член суммы определяется тремя входящими параметрами:

$$k_F = \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}, \quad F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k^2 = \frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}. \quad \text{Дифференцируем интеграл } F, \text{ найдём}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \chi_R} = \frac{\partial}{\partial \chi_R} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R} d\psi,$$

далее  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}} = \frac{1}{k^2} \left[ \frac{1}{1 - k^2} E(\psi, k) - F(\psi, k) \right].$  Находим производную

$$\frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R} = 4 \frac{\chi_R^2 + 2\chi_R + 1 + \chi_Z^2 - 2\chi_R^2 - 2\chi_R}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2} = 4 \frac{-\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2} \quad \text{Её можно вынести за знак}$$

интеграла и весь первый член суммы  $B_{ZI}$  будет:

$$k_F \frac{\partial F}{\partial \chi_R} = 2 \frac{(\chi_Z^2 + 1 - \chi_R^2)(\chi_Z^2 + 1 + \chi_R^2)}{\chi_R \sqrt{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^5}} \frac{1}{k^2} \left[ \frac{1}{1 - k^2} E(\psi, k) - F(\psi, k) \right],$$

Подставляя значения  $k$ , найдём  $\frac{1}{1 - k^2} = \frac{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2}$

$$\text{и } k_F \frac{\partial F}{\partial \chi_R} = \frac{(\chi_Z^2 + 1 - \chi_R^2)(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{2\chi_R^2 \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \left[ \frac{1}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2} E(\psi, k) - \frac{1}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)} F(\psi, k) \right]$$

6.2.3.2.2.2. Вторая составляющая суммы  $B_{Z2} = F \frac{\partial k_F}{\partial \chi_R}$  определяется теми же

составными параметрами.

$$F \frac{\partial k_F}{\partial \chi_R} = \frac{1}{\chi_R^2 \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} \left( (\chi_R^2 - 1 - \chi_Z^2) - \frac{\chi_R (\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)(\chi_R + 1)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)} \right) F$$

6.2.3.2.2.3. Теперь  $k_E \frac{\partial E}{\partial \chi_R}$ , где  $k_E = \frac{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}{\chi_R}$ ,  $E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \cdot d\psi$ . Ана-

логично (6.2.3.2.1.3),  $\frac{\partial E}{\partial \chi_R} = \frac{1}{2k^2} \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R} (E - F)$

$$\text{здесь } \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R} = \frac{4}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} - \frac{4\chi_R^2(\chi_R + 1)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2} \text{ или } \frac{\partial(k^2)}{\partial \chi_R} = \frac{4(\chi_Z^2 + 1 - \chi_R^2)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2)^2},$$

Сокращая подобные члены, получим  $B_{Z3}$ .  $k_E \frac{\partial E}{\partial \chi_R} = \frac{1}{2} \frac{(\chi_Z^2 + 1 - \chi_R^2)}{\chi_R^2 \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} (E - F)$ .

6.2.3.2.2.4. Четвёртый член суммы  $E \frac{\partial k_E}{\partial \chi_R} = B_{Z4}$ . В нем

$$\frac{\partial k_E}{\partial \chi_R} = \frac{2(\chi_R + 1)}{2\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} - \frac{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}{\chi_R^2}, \quad \frac{\partial k_E}{\partial \chi_R} = \frac{-\chi_R - 1 - \chi_Z^2}{\chi_R^2 \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}},$$

$$\text{и } E \frac{\partial k_E}{\partial \chi_R} = \frac{(-\chi_R - 1 - \chi_Z^2)}{\chi_R^2 \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}} E.$$

Ко всем четырём добавляется  $B_{Z5}$  и  $B_{Z6}$ .

$$\frac{k_F F}{\chi_R} - \frac{k_E E}{\chi_R} = \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{2\chi_R^2 \sqrt{\chi_R}} k_F - \frac{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}{2\chi_R^2 \sqrt{\chi_R}} k_E$$

$$\text{Теперь } B_Z = \frac{\partial A_\alpha}{\partial R_\alpha} + \frac{A_\alpha}{R_\alpha} = \frac{\mu l}{2\pi r} \left( k_F \frac{\partial F}{\partial \chi_R} + F \frac{\partial k_F}{\partial \chi_R} - k_E \frac{\partial E}{\partial \chi_R} - E \frac{\partial k_E}{\partial \chi_R} + \frac{k_F F}{\chi_R} - \frac{k_E E}{\chi_R} \right)$$

$$B_z = \frac{\mu I}{2\pi r} \frac{k}{4\chi_R^2 \sqrt{\chi_R}} \left[ \frac{(\chi_z^2 + 1 - \chi_R^2)(\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_z^2} E - \frac{(\chi_z^2 + 1 - \chi_R^2)(\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2)} F + \right. \\ \left. + 2 \left( (\chi_R^2 - 1 - \chi_z^2) - \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2)(\chi_R^2 + \chi_R)}{((\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2)} \right) F - (\chi_R^2 - 1 - \chi_z^2) F + (\chi_R^2 - 1 - \chi_z^2) E \right. \\ \left. + 2(\chi_z^2 + \chi_R + 1)E + 2(\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2)F - 2((\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2)E \right]$$

Группируя члены с эллиптическим интегралом E, приводя подобные члены

(20 шт.), найдем  $2\chi_R^2 \frac{-(\chi_R^2 - 1 + \chi_z^2)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_z^2} E$

Группируя члены с эллиптическим интегралом F, приводя подобные члены (32 шт.), найдем  $2\chi_R^2 F$ . Такое парадоксальное сокращение числа подобных членов, видимо, свидетельствует о каких-то общих свойствах или дифференцирования эллиптических интегралов, или неких свойствах векторных функций решаемой задачи. Окончательно имеем:

$$B_z = \frac{\mu I}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2}} \left( F - \frac{(\chi_R^2 - 1 + \chi_z^2)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_z^2} E \right) \quad (6.32)$$

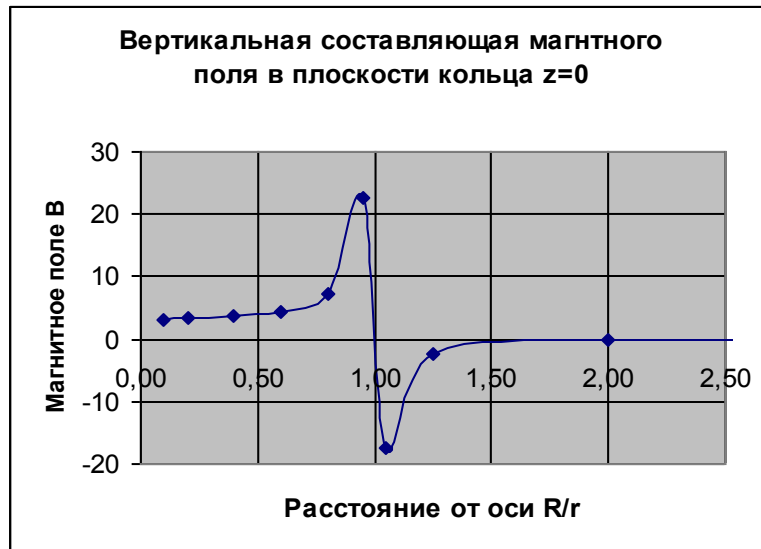


Рис. 21

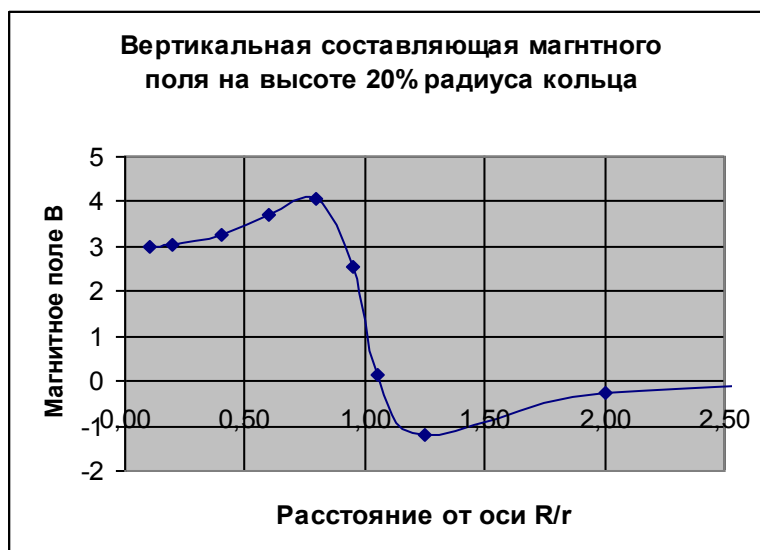


Рис. 22

Графики распределения осевой (вертикальной) составляющей магнитного поля в плоскости кольца и в плоскости на высоте 20% от значения радиуса. Поле  $B$  на этой высоте почти равномерное, то есть силовые линии долго не расходятся.

При построении большего числа плоскостей можно получить точную диаграмму направленности каждой геометрической формы источника поля в любой точке пространства.

**6.2.3.3. Поток вектора магнитной индукции** через заданную поверхность может быть найден без вычисления поля в каждой точке пространства. По теореме Стокса достаточно знать значение вектора потенциала на контуре, на который опирается эта поверхность.  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{s} = \oint \vec{A} d\vec{l}$ . Например, поток вектора магнитной индукции через кольцо, поднятое над поверхностью контура с током равен:

$$\Phi = \frac{\mu \cdot i(t)}{2\pi} \oint (k_F F - k_E E) dl = \frac{\mu \cdot i(t)}{2\pi} (k_F F - k_E E) \cdot 2\pi \cdot r = \mu \cdot r (k_F F - k_E E) \cdot i(t) \quad (6.33)$$

Если ток синусоидальный  $i = I_m \sin \omega t$ , то напряжение между выводами витка будет  $u = \frac{d\Phi}{dt} = \omega \cdot \mu \cdot r \cdot (k_F F - k_E E) \cdot I_m \cos \omega t$ , что соответствует  $U_m = \omega M I_m$ . Похожее решение приведено в [2, с. 359.].



По справочнику: «Расчёт индуктивностей» [13, с. 186.]  $M = \frac{\mu}{4\pi} r F_L$ . То есть  $F_L = 4\pi \cdot (k_F F - k_E E)$ . Сравнение значений  $F_L$ , приведенных в таблице справочника и вычисленных по нашей формуле в широком диапазоне изменений высоты витка (более 10 раз) совпадает с точностью  $\pm 1\%$ .

6.2.3.4. Векторы напряженности электрического поля. Вектор напряженности электрического поля найдём из:  $\vec{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{E}_\rho - \vec{E}_{\text{инд}}$ .

Введенное автором обозначение  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}_{\text{инд}}$ , представляет собой закон Фарадея в дифференциальной форме.

Если статических зарядов нет и ток переменный, то

$$E(t) = \frac{\mu}{2\pi} (k_F F - k_E E) \frac{di}{dt}, \quad (6.34)$$

6.2.3.5. В сферических координатах  $R = r\chi_R = R_{\text{сф}} \sin \theta$ ,  $z = r\chi_Z = R_{\text{сф}} \cos \theta$ .

$$\chi_R = R_{\text{сф}} / r \sin \theta, \quad \chi_Z = R_{\text{сф}} / r \cos \theta, \quad R_{\text{сф}} = r \sqrt{\chi_R^2 + \chi_Z^2}$$

При больших по сравнению с размерами кольца расстояниях  $\chi_R > 1$  главную роль играет относительное удаление точки наблюдения от кольца.

$$\sqrt{\chi_R^2 + \chi_Z^2} = R_{\text{сф}} / r.$$

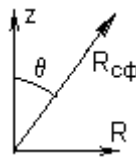


Рис. 23

$$A_\alpha = \frac{\mu I}{2\pi} \left( \frac{((R_{\text{сф}}/r)^2 + 1)}{(R_{\text{сф}}/r) \sin \theta \sqrt{(R_{\text{сф}}/r)^2 + 1 + 2(R_{\text{сф}}/r) \sin \theta}} F - \frac{\sqrt{(R_{\text{сф}}/r)^2 + 1 + 2(R_{\text{сф}}/r) \sin \theta}}{(R_{\text{сф}}/r) \sin \theta} E \right)$$

Параметр  $k^2 = \frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2} = k^2$  при  $\chi_R > 1$   $k^2 = \frac{4\chi_R r^2}{R_{\text{сф}}^2} = \frac{4Rr}{R_{\text{сф}}^2} = \frac{4r \sin \theta}{R_{\text{сф}}}$ .

#### 6.2.4. Векторный потенциал соленоида и тора

Сложенные друг на друга «в стопку» кольца образуют соленоид. Поле соленоида будет равно интегралу от суммы потенциалов колец. На этом пути

возникают серьёзные математические трудности. Воспользуемся готовыми приближёнными решениями поля векторного потенциала  $A = \frac{\mu_0 n I r^2}{2} \frac{1}{R^2}$ . Поле вектора магнитной индукции вне соленоида  $B = \text{rot} A = 0$ . «Итак, магнитное поле вне очень длинного соленоида действительно равно нулю, хотя векторный потенциал нулю не равен» [3, с. 285].

Аналогично, электрическое поле внутри заряженной сферической поверхности равно нулю, хотя электрический потенциал нулю не равен (раздел 6.1.2).

Очень длинный соленоид не совсем реальная конструкция. Такая же картина полей имеется вокруг вполне реальной тороидальной катушки. Вне катушки магнитное поле равно нулю, что легко проверяется применением закона полного тока. Однако электрическое поле не равно нулю, иначе в витках наружной (вторичной) обмотки тороидального трансформатора отсутствовало бы напряжение  $u = \oint \vec{E} d\vec{l}$ .

### 6.3. Общие замечания к разделу примеры потенциалов

6.3.1. В таблицу сведены результаты выводов формул для определения полей потенциалов и векторов электрического и магнитного полей для источников кольцевой формы.

Таблица 3

	Общий коэффициент	Коэффициент перед эллиптическим интегралом F	Коэффициент перед эллиптическим интегралом E
Электрический потенциал заряженного кольца	$\frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}$	1	0
Радиальная составляющая электрического поля	$\frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}$	$\frac{1}{\chi_R}$	$\frac{1}{\chi_R} \frac{(\chi_R^2 - 1 - \chi_Z^2)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2}$
Аксиальная составляющая электрического поля	$\frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}$	$\frac{\chi_Z}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}$	$-\frac{2\chi_Z}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2}$
Магнитный потенциал кольца с током	$\frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}$	$\frac{1}{\chi_R} (\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)$	$-\frac{1}{\chi_R} (\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2$

Радиальная составляющая магнитного поля	$\frac{\mu I}{2\pi \cdot r} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}$	$-\frac{\chi_Z}{\chi_R}$	$\frac{\chi_Z}{\chi_R} \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_Z^2)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2}$
Аксиальная составляющая магнитного поля	$\frac{\mu I}{2\pi \cdot r} \frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}$	1	$-\frac{(\chi_R^2 - 1 + \chi_Z^2)}{(\chi_R - 1)^2 + \chi_Z^2}$

Формулы потенциалов и полей имеют одинаковую структуру: 1) все имеют множитель  $\frac{1}{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_Z^2}}$ , который на расстояниях значительно больших радиуса кольца  $\chi_R \gg 1$ , представляет собой просто обратную величину расстояния от центра кольца до точки наблюдения  $r\sqrt{\chi_R^2 + \chi_Z^2} = R_{cf}$ , 2) содержат эллиптические интегралы первого и второго рода с параметром  $k^2$ , одинаковым для всех скаляров и векторов поля. 3) перед этими интегралами стоит оригинальный множитель из относительных размеров (Таблица 3).

Для учёта соотношения длины волны и размеров источника решения должны производиться с учётом запаздывания.  $\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(t - r_{x\rho}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{x\rho}} dV_\rho$

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \int \frac{\mu_0 \cdot \vec{j}(t - r_{xj}/c)}{4\pi \cdot r_{xj}} dV_j.$$

Изменение потенциала в пространстве ( $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ ) и/или во времени  $\vec{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  является сутью существования электрического и магнитного полей.

В теории поля имеется ничем не подкреплённое предположение, что  $\text{div}\vec{A} = 0$  или  $\text{div}\vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . В действительности это предположение для некоторых источников выполняется только на расстояниях от источника, значительно превышающих размеры источника.

### Список литературы

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 2003.
2. Основы электротехники / Под ред. К.А. Круг. – М.: ГЭИ, 1952.

3. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5 / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1966.
4. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6 / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1966.
5. Черкашин Ю.С. Система согласованных уравнений электродинамики // Наука и образование в жизни современного общества: Сборник научных трудов. Т. 7. – Тамбов: ООО Юком, 30 апр. 2015 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Ucom.ru
6. Черкашин Ю.С. Электрические и магнитные потенциалы и их электрические и магнитные поля // Векторы развития науки: Сборник статей. Ч. 1. – Уфа: НИЦ «Аэтерна», 2015 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Aeterna-ufa.ru
7. Ландау Л.Д. Механика. Электродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1969.
8. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1964.
9. Кузьмич Л.С. Эллиптические функции Эллиптические интегралы. – М. Книжный дом «Либроком», 2013.
10. Губарев Е.А. Электродинамика ориентируемой точки. – М.: Новый центр, 2013.
11. Нейман Л.Р. Теоретические основы электротехники. Т. 2 / Л.Р. Нейман, К.С. Демирчян. – Л.: Энергоиздат, 1981.
12. Черкашин Ю.С. Кольцевая молния // Science Time. – Казань, 2016. – №3 (27).
13. Калантаров П.Л. Расчёт индуктивностей / П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин. – Л.: Энергия, 1970.
14. Черкашин Ю.С. Новая электродинамика на базе уравнений потенциалов. – М.: Ленанд (URSS), 2017.

**Черкашин Юрий Семенович** – канд. техн. наук, старший научный сотрудник АО «Радиотехнический институт им. академика А.Л. Минца», Россия, Москва.

---