УДК 51
DOI 10.31483/r-22217

С.Ю. Шашкин

ВКЛЮЧЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ТЕМ В ПРОГРАММУ КУРСА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ И МЕНЕДЖЕРОВ

Аннотация: *в работе обобщается понятие «решение системы линейных алгебраических уравнений с целью формулировки единого похода к анализу несовместных, неопределенных и неустойчивых систем». Рассматриваются примеры неустойчивых систем линейных алгебраических уравнений, решения которых очень сильно зависят от небольших изменений числовых коэффициентов в уравнениях. Обсуждаются причины неустойчивости линейных систем и алгоритм регуляризации для нахождения решения любой системы линейных алгебраических уравнений. Как отмечает автор, для решения неустойчивых СЛАУ наиболее популярным и практически удобным является регулирующий алгоритм Тихонова.*

Ключевые слова: *псевдорешение системы линейных алгебраических уравнений, число обусловленности, алгоритм Тихонова.*

S.Yu. Shashkin

THE INCLUSION OF ADDITIONAL TOPICS TO THE PROGRAM OF LINEAR ALGEBRA COURSE FOR ECONOMISTS AND MANAGERS

Abstract: *the paper generalizes the concept of "solving a system of linear algebraic equations in order to formulate a unified approach to the analysis of incompatible, indefinite and unstable systems". Examples of unstable systems of linear algebraic equations are considered, which solutions depend on small changes in the numerical coefficients in the equations. The reasons for the instability of linear systems and the regularization algorithm for finding the solution of any system of linear algebraic equations are discussed. As the author notes, the Tikhonov regulatory algorithm is the most popular and practically convenient for solving unstable SLAES.*

***Keywords**: pseudo solution of a system of linear algebraic equations, condition number, Tikhonov algorithm.*

К важнейшим разделам курса линейной алгебры относятся теория и методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), поскольку многие прикладные задачи при построении их математических моделей сводятся к исследованию СЛАУ. Решение СЛАУ необходимо при анализе различных регрессионных моделей [1]. При построении интерполяционных функций также возникают СЛАУ [2, гл. 4, 9]. Перечень практически важных примеров легко может быть продолжен.

В общем случае рассматривается СЛАУ, состоящая из m линейных уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, ...x_n$:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{123}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (1)$$

В каждом из уравнений СЛАУ (1) коэффициенты перед неизвестными a и свободные члены b считаются известными константами. Объединяя коэффициенты в уравнениях системы в матрицу системы A с элементами

a_{ik} ,$i = 1, 2, 3...m,\ k = 1, 2, 3, ...n$ и вводя вектор неизвестных, принадлежащий линейному евклидову пространству E^n,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и вектор свободных членов } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

получаем компактную матричную запись СЛАУ (1):

$$A\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}} \qquad (2).$$

В программу линейной алгебры традиционно включают анализ условий совместности либо несовместности СЛАУ на основе теоремы Кронекера-Капелли, метод Гаусса решения произвольной СЛАУ и метод Крамера решения СЛАУ с квадратной матрицей.

В данной работе предлагается адаптированный для студентов нематематических специальностей вариант изложения методики рения любых, в том числе и неустойчивых СЛАУ.

При построении математических моделей прикладных задач в экономике и иных сферах исследований используются эмпирические данные, полученные с некоторой точностью в результате наблюдения за реальными объектами и процессами. Таким образом, если математической моделью является СЛАУ, то матрица A этой системы и вектор свободных членов $\vec{b}$ могут быть известны лишь приближенно. Поэтому даже для адекватно поставленной и заведомо имеющей решение прикладной задачи математической моделью может оказаться несовместная или неопределенная СЛАУ.

Если СЛАУ (2) не имеет решения в обычном смысле, т.е. не существует векторов $\vec{x}$, реализующих равенство $A\vec{x} = \vec{b}$, то в качестве решения приминается вектор $\vec{x}$, называемый псевдорешением СЛАУ [3, с. 334] и обеспечивающий минимум на множестве всех векторов E^n функции невязки

$$\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x} - \vec{b})^2, \tag{3}$$

или в явном виде

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{il}x_k x_l - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k b_i + (\vec{b})^2 \tag{4}$$

Необходимые условия минимума невязки (4) выражаются системой уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots n. \tag{5}$$

Дифференцируя (4), нетрудно показать, что совокупность уравнений (5) имеет вид СЛАУ

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}, \tag{6}$$

где через A^T обозначена транспонированная матрица A.

Система (6) называется *нормальной системой* по отношению к СЛАУ (2). Известно [3, с. 334], что задача нахождения минимума невязки (4) для любой

СЛАУ имеет решение, возможно неединственное, и эта задача эквивалентна решению нормальной системы (6).

Если нормальная система (6) оказалась неопределенной, то для выбора единственного решения из множества псевдорешений необходимо привлекать дополнительную информацию о свойствах решения исследуемой СЛАУ (2). Обычно требуют отобрать псевдорешение, наиболее близкое к некоторому заданному вектору $\vec{x}^0$. Такое псевдорешение называют нормальным (по отношению к $\vec{x}^0$). Если СЛАУ (2) имеет единственное решение, то при любом выборе $\vec{x}^0$ нормальное псевдорешение будет с ним совпадать. Таким образом, единый подход к решению любой СЛАУ состоит в поиске ее нормального псевдорешения (НПР), которое обозначим. $\vec{x}_{нпр}$. Рассмотрим теперь пример, который демонстрирует появление неустойчивости НПР СЛАУ, заданной приближенно, т.е. с погрешностями матрицы системы или вектора свободных членов. Заметим, что при использовании вычислительной техники для решения СЛАУ дополнительным, а иногда и единственным источником погрешностей в исходных данных являются особенности их машинного представления и выполнения арифметических операций [2, раздел 2].

Пусть имеется СЛАУ $A\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}$, в которой матрица и свободные члены заданы абсолютно точно:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 0 \\ &\qquad т.е. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &x_1 + x_2 = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

СЛАУ (7) очевидно несовместна, поэтому найдем ее нормальное псевдорешение, полагая $\vec{x}^0 = \vec{0}$. Множество псевдорешений СЛАУ (7) является множеством решений СЛАУ (6), имеющей для рассматриваемой задачи вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Бесконечное множество решений (8) определяется следующим образом: x_1 – любое, $x_2 = (\frac{1}{2} - x_1)$. Нормальное относительно $\vec{x}^0 = \vec{0}$ псевдорешение находится из условия минимума длины псевдорешения, т.е функции $(x_1)^2+(\frac{1}{2}-x_1)^2$. Таким образом получаем, что НПР СЛАУ (7) равно

$$\vec{x}_{нпр}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix} \tag{9}$$

Отметим, что НПР (9) получено с использованием коэффициентов СЛАУ (7), не содержащих погрешностей.

Будем теперь считать, что матрица исходной СЛАУ задана с некоторой погрешностью, т.е. вместо матрицы A из (7) будем использовать матрицу

$$A_h=\begin{pmatrix}1 & 1\\ (1+h) & 1\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $h\neq 0$ – малый параметр, определяющий погрешность матрицы СЛАУ. Поскольку определитель $|A_h|=-h\neq 0$, то СЛАУ

$$A_h\,\vec{\mathrm{x}}=\vec{\mathrm{b}} \tag{11}$$

имеет при любом значении h единственное решение, совпадающее с ее НПР, которое также можно получить из решения нормальной СЛАУ

$$A_h^{\,T}A_h\vec{x}=A_h^{\,T}\vec{b} \tag{12}$$

равное

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{h}\\ \frac{-1}{h}\end{pmatrix} \tag{13}$$

Таким образом НПР СЛАУ с малыми погрешностями элементов ее матрицы (а также и вектора свободных членов) может очень сильно отличаться от истинного и, как правило, неизвестного НПР. Обладающие такими свойствами СЛАУ принято называть неустойчивыми или плохо обусловленными.

Для количественной оценки степени неустойчивости СЛАУ используется число обусловленности матрицы СЛАУ $\mu(A)=\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$, где $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A^TA, рассчитанные, конечно, с использованием фактически доступной приближенной матрицы A. Можно показать [3, с. 333], что при наличии относительных погрешностей у элементов матрицы СЛАУ A порядка $\frac{\Delta a}{a}$ возможная погрешность получаемого решения оценивается неравенством

$$\frac{\Delta x}{x} \leq \mu(A)\frac{\Delta a}{a} \tag{14}$$

Аналогично при погрешностях свободных членов $\frac{\Delta b}{b}$ погрешность решения оценивается неравенством

$$\frac{\Delta x}{x} \leq \mu(A)\frac{\Delta b}{b} \tag{15}$$

Неравенства (14), (15) означают, что при $\mu(A) \gg 1$, даже небольшие погрешности исходных данных могут приводить к большим погрешностям в решении СЛАУ. Следовательно, в случае $\mu(A) \gg 1$ (в обычной вычислительной практике при $\mu(A) \geq 10^3$) СЛАУ считается неустойчивой и для нахождения ее хотя бы приближенного псевдорешения требуется адекватный алгоритм. Такой алгоритм называют регуляризующим алгоритмом (РА). Для решения неустойчивых СЛАУ наиболее популярным и практически удобным является РА Тихонова [3, с. 336].

Нахождение НПР СЛАУ

$$A\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}} \ (2).$$

Относительно вектора $\vec{x}^0$ методом Тихонова реализуется следующим образом.

Сначала ставится задача нахождения минимума функции

$$F(\vec{x}) = (A\vec{x} - \vec{b})^2 + \alpha(\vec{x} - \vec{x}^0)^2, \tag{16}$$

где $\alpha > 0$ произвольный положительный параметр. Эта оптимизационная задача эквивалентна поиску решения СЛАУ

$$(A^T A + \alpha E)\vec{x} = A^T\vec{b} + \alpha\vec{x}^0, \tag{17}$$

где E – единичная матрица n-го порядка. СЛАУ (17) всегда имеет единственное решение, т.к. определитель $|A^T A + \alpha E| > 0$. Вектор решения (17) при фиксированном значении параметра α обозначим $\vec{x}(\alpha)$. Можно доказать [3, с. 337], что

$$\vec{x}_{нпр} = \lim_{\alpha \to 0+0} \vec{x}(\alpha) \tag{18}$$

Семейство векторов $\vec{x}(\alpha)$ не является, вообще говоря, непрерывным по параметру α, поэтому в методе Тихонова вычисляя семейство векторов $\vec{x}(\alpha)$ постепенно уменьшая величину параметра, α находят интервал $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ в пределах которого векторы $\vec{x}(\alpha)$ различаются несущественно. Любой из векторов данного интервала рассматривается как приближенное значение предела (18).

Применим РА Тихонова для нахождения НПР относительно $\vec{x}^0 = \vec{0}$ СЛАУ (7) с искаженной матрицей (10). Для этой системы $\mu(A) = \frac{4}{0} = +\infty$. Рассчитывая необходимые для нахождения семейства векторов $\vec{x}(\alpha)$ данные получаем

$$(A_h^T A_h + \alpha E) = \begin{bmatrix} 1 + (1+h)^2 + \alpha & 2+h \\ 2+h & 2+\alpha \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$A^T \vec{b} + \alpha \vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 1+h \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Подставляя (19) и (20) в СЛАУ (17), находим решение

$$x_1(\alpha) = \frac{h + h\alpha + \alpha}{h^2 + 4\alpha + 2h\alpha + h^2\alpha + \alpha^2} \tag{21}$$

$$x_2(\alpha) = \frac{-h + \alpha}{h^2 + 4\alpha + 2h\alpha + h^2\alpha + \alpha^2} \tag{22}$$

Если погрешность $h \to 0$ быстрее чем параметр α, то из (21) и (22) следует

$$\lim_{\alpha \to 0+0} \vec{x}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Т.о., предел (18) при указанном согласовании величин погрешности и параметра α дает точное значение НПР.

В заключение рассмотрим еще один пример конкретной задачи, в которой требуется получить регуляризованное решение неустойчивой СЛАУ. В книге [2, с. 96] поставлена задача нахождения интерполяционного многочлена шестой степени на интервале $-1 < t < 1$ для функции $y = y(t)$, значения которой известны в семи точках и приведены в табл. 1.

Таблица 1

Известные значения функции $y(t)$

$t =$	-1.000	-0.960	-0.860	-0.790	0.220	0.500	0.930
$y =$	-1.000	-0.151	0.894	0.986	0.895	0.500	-0.306

Искомый многочлен запишем в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^{7} C_k t^{(k-1)} \tag{23}$$

Коэффициенты C_k в (23) определяются единственным образом [2, с. 80] из условий совпадения $f(t_m) = y_m \; 1 \le m \le 7$. В явном виде эти условия образуют СЛАУ относительно вектора коэффициентов $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_7 \end{pmatrix}$:

$$A\vec{C} = \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_7 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Квадратная матрица A которой образована из элементов

$$A_{mk} = t_m^{(k-1)} \tag{25}$$

Предполагая функцию $y = y(t)$ достаточно гладкой, по точкам с координатами из табл. 1, можно провести плавную кривую, представленную на рис. 1. Ожидается, что кривая на рис. 1 близка к графику функции $y = y(t)$.

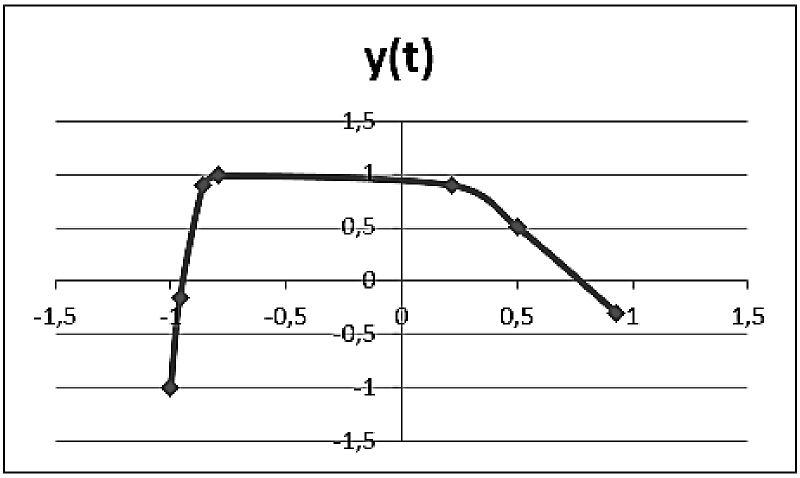

Рис. 1. Кривая, близкая к ожидаемому графику $y = y(t)$

Используя Данные из Табл. 1, рассчитаем матрицу A (25) и решив систему (24) найдем вектор $\vec{C}$, определяющий интерполяционный многочлен (23). График полученного многочлена представлен на рис. 2.

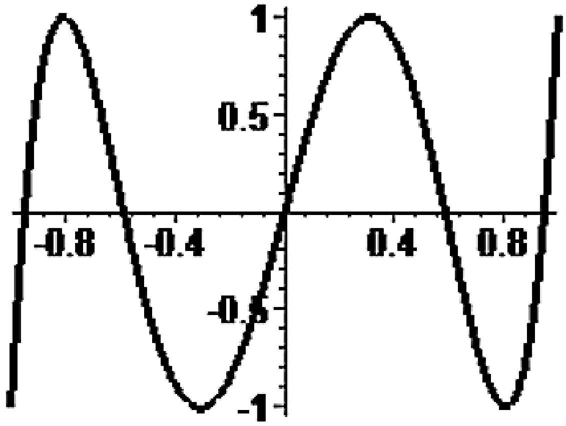

Рис. 2. График многочлена (23), построенного по исходным данным табл. 1

Исследуем чувствительность решения СЛАУ (24) по отношению к малым искажениям ее матрицы A.Для этого изменим случайным образом значения аргументов t_m, приведенных в табл. 1. на величину порядка 1%. На рис. 3 приведены графики интерполяционных многочленов, полученных с исходными данными (сплошная линия) и с искаженной матрицей A (пунктирная линия).

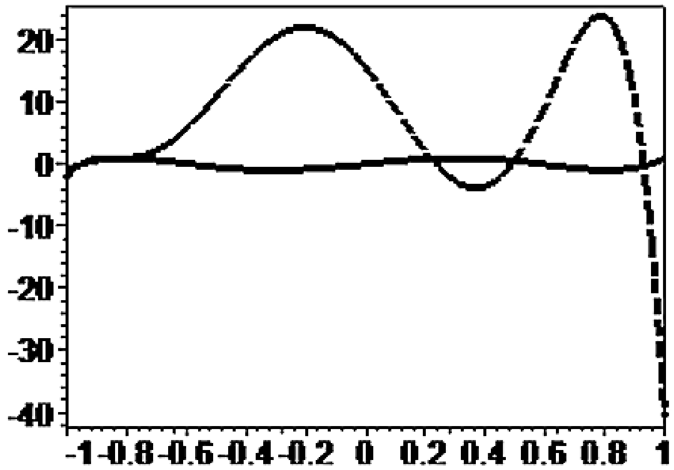

Рис. 3. Графики многочленов, полученных с исходными и искаженными данными

Таким образом, решение СЛАУ (24) сильно меняется при внесении искажений в матрицу системы. Следовательно, СЛАУ (24) является неустойчивой. Регуляризуя решение (24) методом Тихонова, получаем, что при значениях параметра регуляризации в окрестности $\alpha \approx 0.05$ найденные коэффициенты $\vec{C}$ определяют многочлен (23), график которого (рис. 4) существенно ближе к ожидаемому (рис. 1).

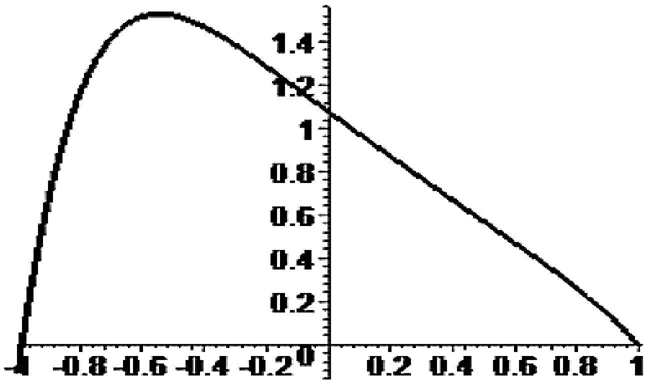

Рис. 4. График интерполяционного многочлена с коэффициентами $\vec{C}$, полученными методом Тихонова

Список литературы

1. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: Инфра-М, 1999. – 402 с.

2. Форсайт Дж.М. Машинные методы математических вычислений / Дж.М. Форсайт, М. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

3. Шолохович Ф.А. Основы высшей математики / Ф.А. Шолохович, В.В. Васин. – Екатеринбург: Уральское изд-во, 2003. – 416 с.

References

1. Dougerti, K. (1999). Vvedenie v ekonometriku., 402. M.: Infra-M.

2. Forsait, D. M., & Mouler, M. (1980). Mashinnye metody matematicheskikh vychislenii., 280. M.: Mir.

3. Sholokhovich, F. A., & Vasin, V. V. (2003). Osnovy vysshei matematiki., 416. Ekaterinburg: Ural'skoe izd-vo.

Шашкин Сергей Юрьевич – д-р физ.-мат. наук, профессор Уральского института управления (филиала) ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ», Россия, Екатеринбург.

Shashkin Sergej Yurevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor at the Ural institute of Management (branch) «Russian Presidental academy of national economy and public administration», Russia, Ekaterinburg.