Шашкин Сергей Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор
Уральский институт управления (филиал)
ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства
и государственной службы при Президенте РФ»
г. Екатеринбург, Свердловская область

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА ПРОГРАММ MAPLE ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

***Аннотация**: в статье коротко перечисляются основные возможности и преимущества математического пакета программ Maple компании Waterloo, который работает под управлением операционной системы Windows. Основное внимание уделено подробному анализу в системе Maple нескольких математических моделей, хорошо известных специалистам, но не поддающихся аналитическому исследованию элементарными методами, доступными студентам.*

***Ключевые слова**: математические модели, пакет программ.*

Государственные стандарты высшего образования по направлению 38.03.01 «Экономика» и специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность» предусматривают выработку навыков использования основных математических моделей для анализа состояния экономических систем и прогнозирования их развития. Для практического освоения методов математического моделирования необходимо специализированное программное обеспечение. Желательно, чтобы это программное обеспечение было достаточно простым для использования и не требовало бы серьезных навыков программирования. Во многих случаях этим требованиям вполне удовлетворяют электронные таблицы Excel.

Однако анализ наиболее интересных моделей, которые формулируются в виде нелинейных дифференциальных уравнений, встроенными средствами Excel не предусмотрен. Решение дифференциальных уравнений в Excel требует трудоемкого программирования. Кроме того, возможности визуализации различных математических объектов в Excel в известной степени ограничены (3d-графика, анимация и т. д.).

Ниже будет показано, что даже при решении линейных задач, например систем линейных алгебраических уравнений, в Excel могу возникнуть критические ситуации, приводящие к неверным результатам. Круг практически важных задач, приводящих к системам линейных алгебраических уравнений очень широк. Достаточно упомянуть о построении регрессионных моделей и определении коэффициентов временных рядов [1].

Опыт проведения занятий, связанных с математическим моделированием социально-экономических процессов и систем на кафедре информатики и математики Уральского института управления – филиала РаНХиГС (ранее Уральской академии государственной службы) позволяет рекомендовать к использованию в учебном процессе математический пакет Maple компании Waterloo. Полное описание возможностей системы Maple имеется в документации разработчиков, а также в ряде книг, среди которых следует особо отметить замечательное пособие [2]. Пакет Maple начиная с версии IV работает под управлением операционной системы Windows.

В данной статье коротко перечисляются основные возможности и преимущества пакета Maple. Основное же внимание уделено подробному анализу в системе Maple нескольких математических моделей, хорошо известных специалистам, но не поддающихся аналитическому исследованию элементарными методами, доступными студентам.

Система Maple является полноценной системой процедурного программирования, но ее можно эффективно использовать в режиме командной строки. В этом случае пользователь последовательно вводит в командную строку, являющуюся элементом интерфейса системы Maple, команды, состоящие из имени вызываемой процедуры (их около 3000) и списка необходимых фактических параметров. Команды могут, конечно, считываться из предварительно подготовленного системой Maple файла. Результат выполнения очередной команды (число, массив, функция, график) появляется на экране или записывается в файл.

Система Maple позволяет:

1. Выполнять арифметические операции над числами и функциями, причем эти операции выполняются абсолютно точно, если пользователь не установил точность приближенных вычислений.

2. Определять и использовать любые пользовательские функции.

3. Выполнять в символьной форме алгебраические операции над функциями, операции дифференцирования и интегрирования функций.

4. Выполнять построение 2d- и 3d-графиков функций, заданных явно или неявно.

5. Находить решения уравнений, а также любых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

6. Находить решения линейных и нелинейных оптимизационных задач.

7. Находить решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

В системе Maple имеется четко организованная встроенная справочная система, которая позволяет использовать все возможности Maple, не обращаясь к справочной литературе.

К несомненным преимуществам системы Maple следует отнести тот факт, что, при достаточно высокой стоимости коммерческих версий Maple, вариант пакета Maple V R4 свободно распространялся компанией Waterloo через Интернет и, поэтому, может бесплатно и легально использоваться в любом учебном заведении.

Рассмотрим примеры использования Maple.

Пусть требуется решить СЛАУ $A\vec{x}=\vec{b}$, где $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & 8 & 7 \\ 2 & -4 & 8 & 8 \\ 2 & -3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Выполнив команду `x:=linsolve(A,b)`, получаем $x := \begin{bmatrix} 6-8u \\ 1-2u \\ u \\ -1 \end{bmatrix}$,

т.е. СЛАУ имеет бесконечное множество решений, каждое из которых выражается через один свободный параметр u.

Решая ту же самую СЛАУ методом обратной матрицы в Excel, получаем единственное решение

$$x = \boxed{\begin{array}{r} -2{,}5 \\ -1{,}125 \\ 1{,}0625 \\ -1 \end{array}}$$

Причиной ошибочного результата в Excel являются погрешности округления и усечения, свойственные машинной арифметике. Несмотря на то, что определитель матрицы системы $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & 8 & 7 \\ 2 & -4 & 8 & 8 \\ 2 & -3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$ в точности равен нулю, из-за погрешностей арифметики в Excel он получается отличным от нуля. Алгоритмы реализации арифметических операций в Maple лишены этого недостатка.

Для иллюстрации богатейших графических возможностей Maple на рис.1 приведена поверхность, являющаяся графиком функции двух переменных $z = x^2 - 3y + y^3$, построенная по команде

```
plot3d( (x^2-3*y+y^3 , x=-1.5..1.5 , y=-2..2 ).
```

На рис. 2 изображены линии уровня этой функции, построенные по команде

```
contourplot(x^2-3*y+y^3 , x=-1.5..1.5 , y=-2..2 , thickness=3).
```

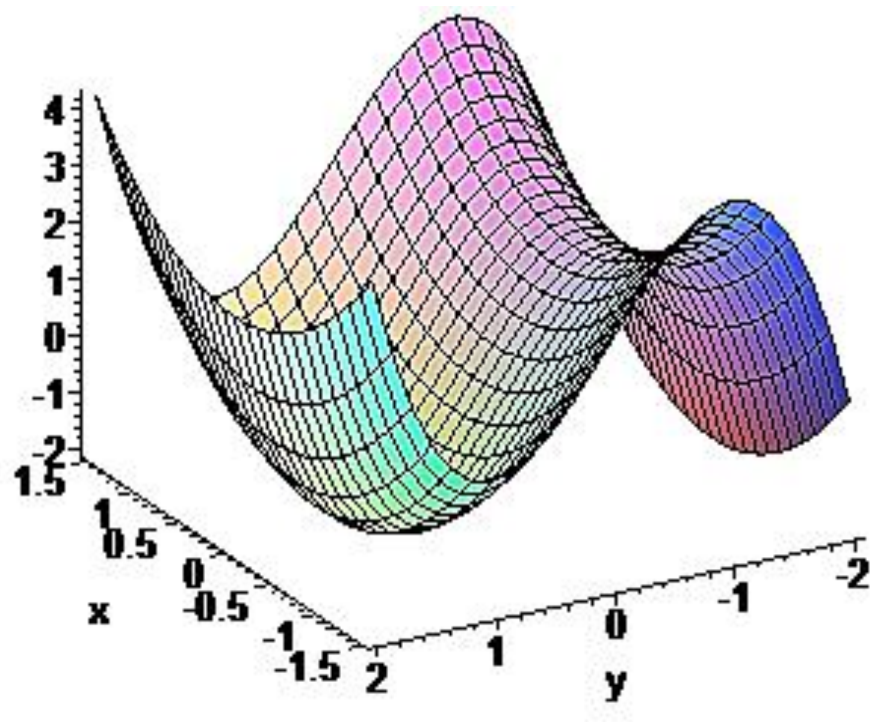

Рис. 1. график функции двух переменных $z = x^2 - 3y + y^3$

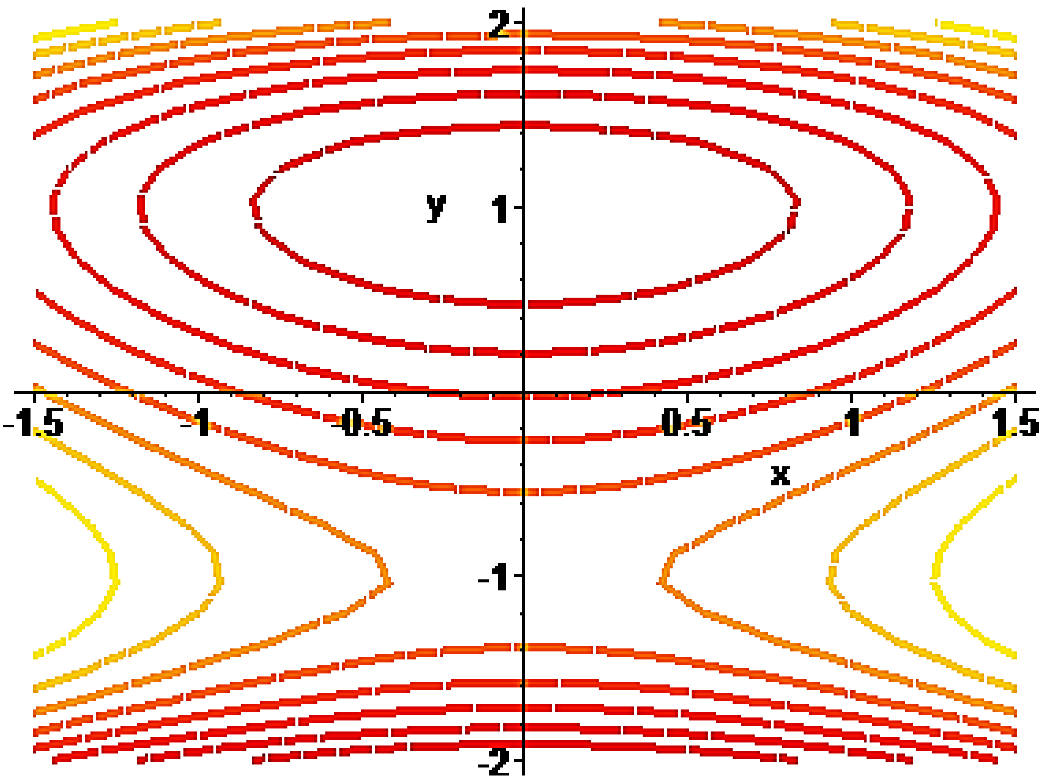

Рис. 2. Линии уровня функции двух переменных $z = x^2 - 3y + y^3$

При моделировании инфляционных процессов [3, с. 262] исследуется динамика величины $p(t) = ln(\frac{P(t)}{\overline{P}}$ – логарифма текущего индекса цен, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка, известным специалистам, как уравнение Ван дер Поля. $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(t)\right) + m\,(p(t)^2 - 1)\left(\frac{\partial}{\partial t} p(t)\right) + p(t) = f$. (1)

Полагая в этом уравнении константы m=1 и f=0.1, находим его решение с начальными условиями при t=0 p=3 и $\frac{\partial}{\partial t} p(t) = -3$, выполняя команду

```
phaseportrait( (diff(p(t),t$2)+m*(p(t)^2-
1)*diff(p(t),t)+p(t)=f,p(t),t=0..24,[[p(0)=3,D(p)(0)=-3]],p=-
4..5,stepsize=.05,linecolor=black)).
```

График полученного решения, описывающего колебания цен, приведен на рис. 3.

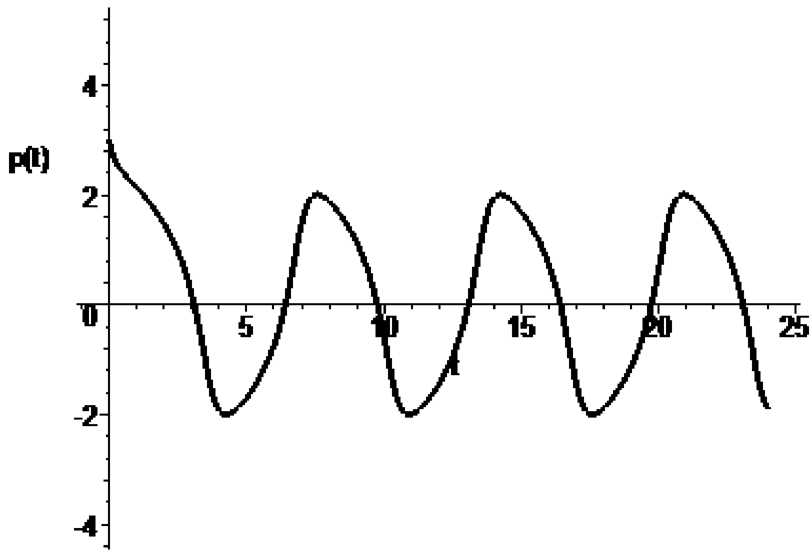

Рис. 3. Колебания логарифма индекса цен в условиях инфляции

В работе [4] предложена модель самоорганизации рынка труда, в которой доля занятых на производстве работников x(t) от полного числа потенциальных работников описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t) = a\,x(t)^2 - b\,x(t) + g \qquad (2)$$

Для исследования решений этого уравнения зафиксируем константы a=-1, b=2. При значении параметра g=3 выполняя команду

```
phaseportrait(diff(x(t),t)=a*x(t)^2-b*x(t)+g,x(t),t=0..2,
[[x(0)=0.5]],
x=0..1, stepsize=.01,arrows=none,linecolor=black),
```

получаем решение, представленное на рис. 4, т.е. модель прогнозирует полную занятость потенциальных работников.

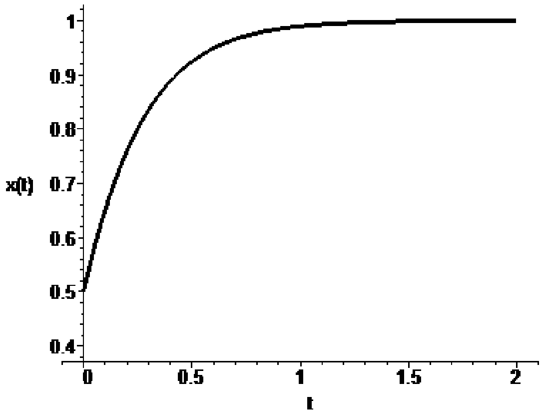

Рис. 4. Динамика занятости при g = 3

На рис 5 представлено решение уравнения (2) с параметром g=1. В этом случае модель прогнозирует длительное сохранение занятости на уровне 0,4.

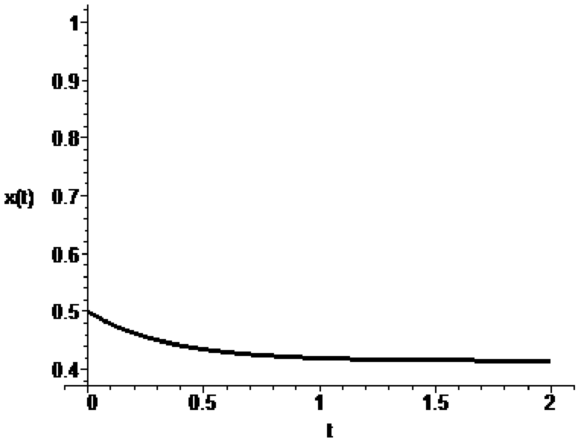

Рис. 5. Динамика занятости при g = 1

В модели экономического роста Солоу [5, с. 192] одной из основных эндогенных переменных, определяющих состояние экономики, является удельная фондовооруженность k(t), эволюция которой определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{k}(t) = -l\,\mathrm{k}(t) + r\,A\,\mathrm{k}(t)^{a} \quad (3)$$

График решения уравнения (3) с типичными значениями параметров ($A = 6.19$, $a = 0.6$, $l = 0.35$, $r = 0.2$) получен в Maple аналогично решениям уравнений (1) и (2) и представлен на рис 6. Таким образом, в модели Солоу рост экономики сопровождается монотонным ростом фондовооруженности.

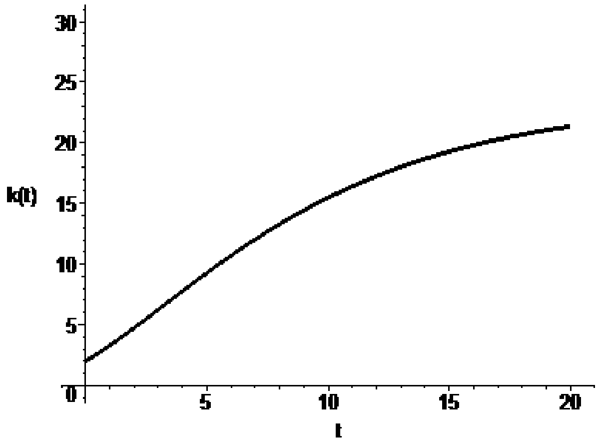

Рис. 6. Динамика фондовооруженности

Список литературы

1. Кобелев Н.Б. Практика применения экономико-математических методов и моделей. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. – 246 с.

2. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE VR3/R4/R5. – М.: Солон, 1998. – 400 с.

3. Смирнов А.Д. Лекции по макроэкономическому моделированию. – М.: ГУВШЭ, 2000. – 351 с.

4. Васильев А.Н. Экономика и математические методы. – 2001. – Т. 37. – №2. – С. 123.

5. Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: Инфра-М, 2001. – 356 с.