Сухова Кристина Игоревна
студентка
Педагогический институт им. В.Г. Белинского
ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет»
г. Пенза, Пензенская область
Глебова Мария Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет»
г. Пенза, Пензенская область

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Аннотация*: в статье рассматривается, как использование цепных дробей позволяет привести более быстрое и оригинальное решение олимпиадных задач по математике и помогает повысить познавательный интерес к данной дисциплине.*

Ключевые слова*: цепные дроби, олимпиадная задача по математике, решение задач.*

В последние годы в России большой популярностью пользуется математическое олимпиадное движение. Почти в каждой школе на протяжении всего времени обучения проводятся отборочные туры различных очных и заочных олимпиад по математике, начиная от школьного, городского, всероссийского уровня, заканчивая международным [1, с. 133]. Олимпиадные задачи носят нестандартный характер и требуют от ученика должных знаний по школьной программе, логического мышления и творческого подхода. С каждым годом олимпиадные задачи более разнообразны. Для решения некоторых заданий недостаточно знаний, которые ученик получает во время учебного процесса, необходима и дополнительная информация [2, с. 385].

В данной работе рассмотрим, как использование цепных дробей позволяет привести более быстрое и оригинальное решение олимпиадных задач по математике, а также повысить познавательный интерес к математике.

Действительные числа однозначно отображаются цепными дробями. Основное значение такого изображения заключается в том, что, зная цепную дробь, изображающую действительное число, можно определить это число с достаточной точностью. Цепные дроби имеют преимущество перед систематическими. Систематическая дробь связана с определенной системой счисления и потому отражает в себе в большей степени взаимоотношения изображаемого числа именно с этой выбранной системой счисления. Цепные же дроби не связаны ни с какой системой счисления и в чистом виде воспроизводят свойства изображаемых чисел (например, рациональность или иррациональность числа). Цепные дроби очень удобно применять к решению диофантовых уравнений вида $ax + by = c$. Главная трудность, с которой сталкиваются ученики при решении таких уравнений, состоит в том, чтобы найти какое-нибудь его частное целочисленное решение. С помощью цепных дробей можно легко найти алгоритм для его отыскания. Они дают огромное преимущество в точности при приближённом вычислении логарифмов чисел, нахождении корней квадратных уравнений. Также они помогают выстраивать алгоритмы для вычисления корней алгебраических уравнений произвольной степени. Кроме того, бесконечные цепные дроби можно использовать при решении трансцендентных и алгебраических уравнений, а также для быстрого вычисления значений некоторых функций.

Данная тема не рассматривается в школьном курсе математики в явном виде, но связанные с алгоритмом цепных дробей задания можно встретить, например, в учебнике «Алгебра. 8 класс» Ю.Н. Макарычева и других [3, с. 143], а также в сборниках задач для математических школ, например, в книге А.В. Устинова и Н.Б. Алфутовой «Алгебра и теория чисел: сборник задач для математических школ».

Рассмотрим несколько примеров олимпиадных задач с применением цепных дробей.

Задача 1. (Олимпиада школьников «Ломоносов-2008». Заключительный этап. 10–11 классы). Найти k*, если*

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}\text{-}2k}+4}+4}+4=\sqrt{5}+2$$

Решение. Рассмотрим правую часть данного равенства: $\sqrt{5}+2$. Преобразуем ее так, чтобы это число стало «похожим» на нашу левую часть: $\sqrt{5}+2=\sqrt{5}\text{-}2+4$. Далее заметим, что $\left(\sqrt{5}\right)^2\text{-}2^2=1$, тогда

$$\sqrt{5}\text{-}2=\frac{(\sqrt{5}\text{-}2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+2}=\frac{1}{\sqrt{5}+2}.$$

Итак, получим: $\sqrt{5}+2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}+4$. Далее аналогично получаем:

$$\sqrt{5}+2=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}+2}+4}+4=\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}+2}+4}+4}+4.$$

Тогда заданное равенство будет верно, если $\sqrt{5}\text{-}2k=\sqrt{5}+2$. Значит, k *= – 1.*

Задача 2. (Олимпиадная задача по математике из коллекции задач «Турнира Ломоносова» Г.А. Гальперин). 7, 8, 9 классы.

Решите уравнение в целых положительных числах.

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{10}{7}$$

Решение. Любое число единственным образом можно представить в виде суммы двух чисел, одно из которых – неотрицательное, меньшее единицы, а другое – целое. Для $\frac{10}{7}$ таким представлением будет $\frac{10}{7}=1+\frac{3}{7}$.

Поскольку с левой части равенства также записана сумма целого x и неотрицательного числа, меньшего единицы – $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}$, а такое представление единственно, то значит, что x = 1, а $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{3}{7}$. Отсюда следует, что $y+\frac{1}{z}=\frac{7}{3}$.

Аналогично разложим число $\frac{7}{3}$ в виде суммы целой и дробной части: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$. Тогда получим что y = 2, $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$. Тогда z= 3. Итак, x=1, y=2, z=3.

В некоторых задачах присутствие цепных дробей делает условие задания более «громоздким», чем пугает многих школьников, хотя решение зачастую оказывается довольно простым.

Задача 3 (Международная олимпиада по математике «Турнир городов», Г.А. Гальперин).

Докажите, что

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{1991}}}}} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{1991}}}}}} = 1$$

Решение. Заметим, что в каждом из слагаемых содержится одинаковая часть выражения. Заменим ее на t = $\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{1991}}}}$. Получим выражение $\frac{1}{2+t} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+t}}$.

Преобразуем его: $\frac{1}{2+t} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+t}} = \frac{1}{2+t} + \frac{1}{\frac{1+t+1}{1+t}} = \frac{1}{2+t} + \frac{1+t}{2+t} = \frac{2+t}{2+t} = 1$. Что и требовалось доказать.

Также на олимпиадах встречаются задания с более серьезными условиями и трудоемким решением для 10–11 классов.

Задача 4. («Московские математические олимпиады», Г.А. Гальперин. 10–11 классы).

Прибор для сравнения чисел $\log_a b$ и $\log_c d$ $(a, b, c, d > 1)$ работает по правилам: если $b > a$ и $d > c$, то он переходит к сравнению чисел $\log_a \frac{b}{a}$ и $\log_c \frac{d}{c}$ если $b < a$ и $d < c$, то он переходит к сравнению чисел $\log_d c$ и $\log_b a$; если $(b - a)(d - c) \leq 0$, то он выдаёт ответ.

а) покажите, как прибор сравнит числа $\log_{25} 75$ и $\log_{65} 260$;

б) докажите, что любые два неравных логарифма он сравнит за конечное число шагов.

В таких задачах важно увидеть закономерности и возможность применения именно алгоритма цепных дробей.

Изучение этой темы в школе может оказать большую помощь учителю в преподавании математики как в физико-математических классах, так и в гуманитарных, так как она подчеркивает связь этой науки с такими, казалось бы, неожиданными областями знаний, как музыка, биология, астрономия. Очень важно стараться использовать темы, выходящие за рамки основной школьной программы государственного образования, но в то же время, не требующие серьезных знаний по математике. В частности, это относится и к теории цепных дробей. Этот материал доступен, что очень важно, обучающимся с 5 по 11 класс. В процессе решения с использованием цепных дробей дети учатся видеть сходства и различия, замечать изменения, выявлять причины и характер этих изменений, на этой основе формулировать выводы. Тема «Цепные дроби» позволяет углубить математические знания, повысить мотивацию к изучению математики и расширить кругозор.

Список литературы

1. Глебова М.В. Роль дисциплины «Решение олимпиадных задач» при подготовке будущих учителей математики // Интеллектуальный и научный потенциал XXI века: сборник статей Международной научно-практической конференции (22 мая 2017 г., г. Волгоград): в 4 ч. Ч. 2. – Уфа: МЦИИ Омега сайнс, 2017. – С. 133–135.

2. Глебова М.В. Теория чисел и ее роль в подготовке будущего учителя математики / М.В. Глебова, Е.В. Широкова // Педагогические и социологические аспекты образования: материалы Международной научно-практической конференции, 2018. – С. 384–385.

3. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 2017. – С. 143.