

**Руденко Виктория Алексеевна**

канд. экон. наук, научный сотрудник

ФГБУН «Центральный экономико-математический институт РАН»

г. Москва

DOI 10.31483/r-33209

## **ПРИМЕНЕНИЕ КОПУЛА-ФУНКЦИЙ ПРИ ОЦЕНКЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕГИОНОВ РФ**

***Аннотация:** в статье речь идет о применении копула-функций при оценке технической эффективности регионов Российской Федерации. Автор подчеркивает, что в классических моделях стохастической производственной функции используется предпосылка о независимости компонент ошибки, и, что с появлением аппарата копула-функций многие исследователи стали применять его для анализа возможной зависимости компонент, не объясняя, действительно ли существенное усложнение модели за счет введения копулы, приводит к значимому улучшению качества оценок. В предыдущих работах мы доказали необходимость учета возможной зависимости случайных составляющих ошибки на примере смоделированных данных в случае высокой степени корреляции компонент. В данном исследовании приведены некоторые результаты анализа реальных данных по регионам РФ и описана целесообразность использования копула-функций для решения различных задач.*

***Ключевые слова:** стохастическая производственная функция, эффективность регионов РФ, копула-функции.*

В работе [2] на примере смоделированных данных была показана необходимость учета возможной зависимости случайных компонент ошибки в модели стохастической производственной функции. Данное наблюдение следует из того, что в проведенных исследованиях оценки технической эффективности, полученные в моделях с учетом зависимости компонент ошибки, были в высокой степени согласованы с истинными значениями. В то же время оценки, полученные при использовании классических моделей, могли быть практически

противоположны истинным значениям, причем степень несогласованности напрямую зависела от коэффициента корреляции случайных составляющих ошибки.

В существующих работах по анализу необходимости учета зависимости компонент ошибки при использовании реальных данных (например, [3; 6]), предпочтение отдается моделям, учитывающим указанную зависимость. Однако это обосновывается лишь тем, что функция правдоподобия моделей «с зависимостью» выше, чем у классических моделей, причем, довольно часто незначительно выше. Для описания взаимосвязи между компонентами большинство иностранных исследователей используют аппарат копула-функций, а в российской литературе этот аппарат редко используется для анализа моделей стохастической границы. При этом в таких моделях в зависимости от выбранной копулы появляется, как минимум, один дополнительный параметр, описывающий уровень взаимосвязи случайных составляющих ошибки и подлежащий оцениванию. Таким образом, для решения некоторых задач не всегда имеет смысл выбирать модели с копулами (в случае несущественного отличия функций правдоподобия), вычисления в которых значительно сложнее, чем в классических моделях.

Приведем результаты, полученные с использованием реальных данных регионов РФ, предварительно разбитых на пять групп в соответствии с [1]. В расширенном классе двухфакторных моделей стохастической границы будем придерживаться обозначений, приведенных ниже.

$R_i = \beta_0 \cdot K_i^{\beta_1} \cdot L_i^{\beta_2} \cdot e^{V_i \cdot U_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $R_i$  – объем ВРП  $i$ -ого региона (в млн. руб.),  $K_i$  – стоимость основных фондов  $i$ -ого региона (на конец года, в млн. руб.),  $L_i$  – численность его экономически активного населения (в тыс. человек),  $n$  – число анализируемых субъектов РФ в группе. Случайные компоненты  $V_i$  и  $U_i$  могут быть зависимы. Для описания зависимости используется нормальная копула.

Для каждой группы регионов по данным с 2013 по 2016 гг. в соответствии с [4; 5] были найдены оценки параметров и значений технической

эффективности. В большинстве случаев в качестве итоговых моделей были выбраны классические модели, предполагающие независимость компонент ошибки. При этом оценки основных параметров ( $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ) в расширенном классе моделей практически не отличались от оценок, полученных в стандартном программном обеспечении, и полученные значения технических эффективностей также были близки. В этих случаях использование аппарата копула-функций позволило лишь незначительно расширить диапазон изменения эффективностей.

Однако для некоторых данных результаты получились иные. В качестве примера приведем группу обрабатывающих регионов, в которую входят Владимирская, Вологодская, Калужская, Липецкая, Нижегородская, Новгородская, Омская, Свердловская, Тульская, Челябинская, Ярославская области и республика Башкортостан. При вычислении оценок в данной группе в классических моделях было отмечено, что в 2016 году вклад трудовых ресурсов в ВРП региона стал расти, хотя до этого имел тенденцию к снижению, а вклад основных фондов, наоборот, сократился. На рис.1 наглядно представлено изменение описанных тенденций, где  $\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}$  – вклад основных фондов,  $\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}$  – вклад трудовых ресурсов.

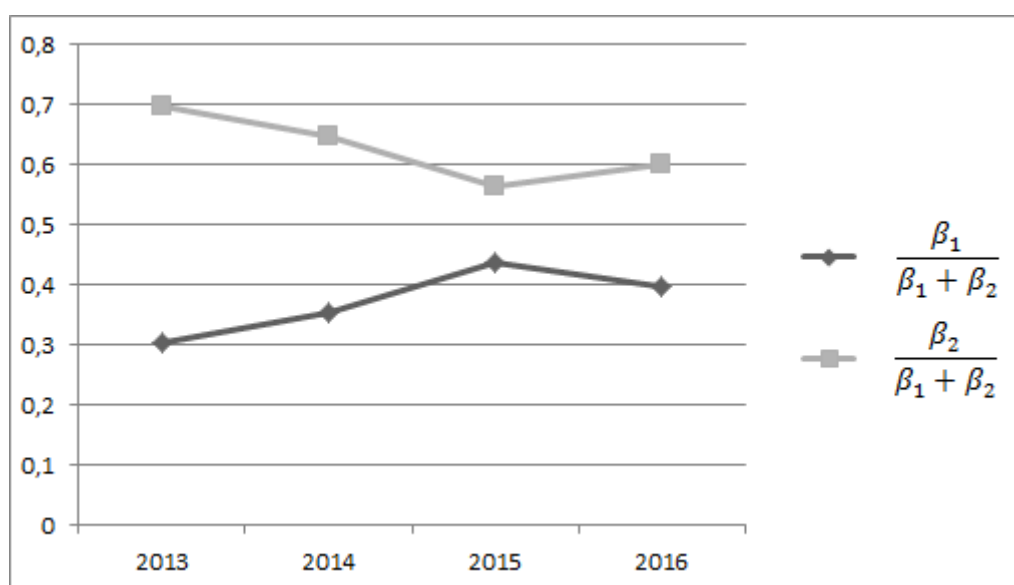


Рис. 1. Вклад основных факторов производства

При этом следует отметить, что в 2013–2015 гг. гипотеза об отсутствии неэффективности не отвергается для данной выборки регионов, а в

2016 г. неэффективность присутствует. В таблице 1 приведены оценки параметров, полученные при построении классической модели  $M_1$  и модели  $M_r$  с использованием нормальной копулы.

Таблица 1

Оценки параметров моделей в 2016 г.

	$M_1$	$M_r$
<i>Оценки коэффициентов при факторах производства</i>		
$\ln K$	0.400	0.402
$\ln L$	0.603	0.601
$const$	36.23	36.20
<i>Оценки параметров компонент ошибки</i>		
$\mu$	0	0.019
$\sigma_v$	0.0001	0.0093
$\sigma_u$	0.073	0.078
гип. об отсутствии неэфф-ти	отвергается	отвергается
Логарифм функции правдоподобия	22.63	24.12

В соответствии с методикой, приведенной в [2; 5], выбор итоговой модели производится на основе статистики разности логарифмов правдоподобий  $Lr = 2(\ln L(H_r^A) - \ln L(H_r)) = 2(24.12 - 22.63) = 2.98$ .

При уровне значимости  $\alpha = 0.05$  критический уровень квантиля  $\chi_{1-2\alpha}^2(1) \approx 2,7$ . Таким образом, гипотеза о некоррелированности компонент ошибки отвергается и итоговой моделью в данном случае является модель  $M_r$  с использованием нормальной копулы. При поиске корректных оценок технической эффективности следует использовать именно эту модель. Тем не менее, из таблицы 1 видно, что значения оценок основных факторов производства в приведенных моделях близки, как и во всех остальных случаях, рассмотренных в процессе исследования. Это наблюдение позволяет использовать классические модели стохастической границы при решении задач, не требующих высокой точности, которые связаны с оценкой и анализом динамики влияния основных факторов.

Таким образом, при анализе региональных данных следует исходить из целей каждого конкретного исследования. Так, для первичной обработки данных,

для оценки и изучения вклада основных факторов в ВРП, для приблизительного ранжирования регионов по уровню технической эффективности можно использовать классические модели стохастической границы. В задачах, требующих нахождения корректных значений технической эффективности, следует учитывать возможную зависимость компонент ошибки. Кроме того, применение аппарата копула-функций позволит точнее описать существующую неэффективность в случаях обнаружения каких-то изменений в динамике того или иного показателя при первичной обработке данных.

### *Список литературы*

1. Айвазян С.А. Модели производственного потенциала и оценки технологической эффективности регионов РФ с учетом структуры производства / С.А. Айвазян, М.Ю. Афанасьев, А.В. Кудров // Экономика и математические методы. – 2016. – №1 (52). – С. 28–44.
2. Айвазян С.А. Исследование зависимости случайных составляющих остатков в модели стохастической границы / С.А. Айвазян, М.Ю. Афанасьев, В.А. Руденко // Прикладная эконометрика. – 2014. – №2(34). – С. 3–18.
3. Poonkham K., Sriboonchitta S. (2013). Efficiency of convention hotels in Thailand: An analysis using stochastic frontier with copula. The Empirical Econometrics and Quantitative Economics Letters, №2 (3), pp. 103–110.
4. Rudenko V.A. Specification scheme of the stochastic production function for assessment of technical efficiency of the regions in the Russian Federation // Russian Journal of Mathematical Research. Series A, 2018, №4(1), с.38–47.
5. Rudenko V.A., Aivazyayn S.A., Afanasyev M. Y. (2017) Specification of a stochastic production function model in the extended class of stochastic frontier models // Modeling of artificial Intelligence, Vol. 4, №1, pp. 21–28.
6. Smith M.D. (2008). Stochastic frontier models with dependent error components. The Econometrics Journal, №11 (1), pp. 172–192.