Пермякова Марина Юрьевна
канд. пед. наук, доцент
Перфильева Александра Владимировна
студентка
ФГБОУ ВО «Шадринский государственный
педагогический университет»
г. Шадринск, Курганская область

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПИРАМИДОЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Аннотация: *статья посвящена актуальной проблеме подготовки учащихся к ЕГЭ по математике профильного уровня, в частности решению задач по теме «Пирамида» задания №14. Авторы выделяют особенности их решения, что позволит сделать это задание более выполнимым для большего числа учащихся.*

Ключевые слова: *ЕГЭ по математике профильного уровня, стереометрические задачи на пирамиду, положение высоты в пирамиде.*

На сегодняшний день одним из сложных экзаменов по выбору учащихся является ЕГЭ по математике профильного уровня. Его выбирают выпускники школ, планирующие поступать в ВУЗы, где математика является профилирующим предметом.

Экзаменационная работа состоит из девятнадцати заданий. Одним из заданий повышенного уровня сложности, проверяющим умение выпускников выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами, является задание №14. При выполнении таких заданий выпускник должен уметь моделировать и исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем [1].

Более 60% участников экзамена по математике профильного уровня, набирающих от 6 до 11 первичных баллов, практически не справляются с заданием

№14. Только четверть выпускников группы с хорошей подготовкой и около 80% учащихся из группы высокобалльников выполняют задание по стереометрии [2]. Одной из причин затруднений в решении таких задач является отсутствие алгоритмов решения. Однако, можно выделить ряд приёмов, которые позволят сделать задание №14 более выполнимым для выпускников.

Среди заданий под номером 14 экзаменационной работы можно выделить задачи на нахождение объёма пирамиды, площади сечения, углов между секущей плоскостью и гранями, между секущей плоскостью и рёбрами, а также углов между рёбрами пирамиды.

Первым шагом при решении любой из таких задач является построение чертежа по условию задачи. При необходимости можно сделать выносной чертёж фигуры, полученной при сечении плоскостью. Следующим шагом является уточнение данных задачи, их запись и отметка на построенном чертеже. Третий шаг – выделение элемента или элементов, которые по условию задачи необходимо найти. Для нахождения объёма пирамиды необходимо вычислить площадь многоугольника, лежащего в основании пирамиды и высоту, являющуюся перпендикуляром, опущенным из вершины пирамиды к основанию [3].

Площадь основания пирамиды находится с использованием знаний, полученных при изучении раздела «Планиметрия». Наибольшие трудности у учащихся возникают с точным определением положения высоты пирамиды. В ряде случаев могут помочь следующие утверждения.

1. Если две плоскости перпендикулярны, и в одной из них проведена прямая, перпендикулярная к линии пересечения плоскостей, то эта прямая будет перпендикулярна ко второй плоскости.

Например, если одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, то по теореме высота пирамиды будет принадлежать этой грани.

2. Если все боковые грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания, то высота ее проходит через центр окружности, вписанной в основание.

3. Высота пирамиды, все боковые ребра которой равны или равнонаклонены к плоскости основания, проходит через центр описанной около основания окружности.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то их линия пересечения перпендикулярна той же плоскости. Из этой теоремы следует, что если две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, то высота пирамиды принадлежит линии пересечения плоскостей этих граней.

Так как высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный к основанию, то необходимо найти проекцию высоты на основание многоугольника. Соединяя точку проекции высоты с ребром или точкой пересечения рёбер, получают прямоугольный треугольник, из которого можно найти высоту, используя формулы для нахождения сторон в прямоугольном треугольнике.

Для нахождения объёма части пирамиды, отсечённой плоскостью сечения, учитывается, что площадью основания в данном случае является площадь сечения. Объём усечённой пирамиды находится как разность объёмов цельной пирамиды и пирамиды, отсечённой плоскостью.

При решении задачи на нахождение площади сечения пирамиды плоскостью, проходящей через определенные точки, или на нахождение периметра полученного многоугольника, необходимо определить вид полученной в сечении фигуры после выполнения чертежа. Для этого можно построить её отдельно. При необходимости можно выполнить дополнительные построения, достроив чертёж или наоборот разбив полученную фигуру на более мелкие части.

Задача №1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.

Выполним чертёж пирамиды и его обоснование. Отметим точки M и N как середины рёбер SA и SB, соединим точки и получим прямую MN. Построим плоскость SEC, проходящую через высоту пирамиды SO и являющуюся перпендикулярной плоскости ABC. Прямая SE пересекает MN в точке F_1. Из точки F_1 опустим перпендикуляр на прямую EC – точка F. Теперь через точку F проведём прямую KZ, параллельную ребру AB. Плоскость $MNKZ$ будет являться искомой плоскостью α.

Следующий шаг – уточнение данных задачи. $AB = 12$, $SA = 13$, $AM = MS = BN = NS = \frac{1}{2} SA = \frac{1}{2} SB$.

Из условия задачи нам необходимо найти площадь многоугольника $MNKZ$. Т.к. точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно, то MN является средней линией треугольника SAB, отсюда $MN = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

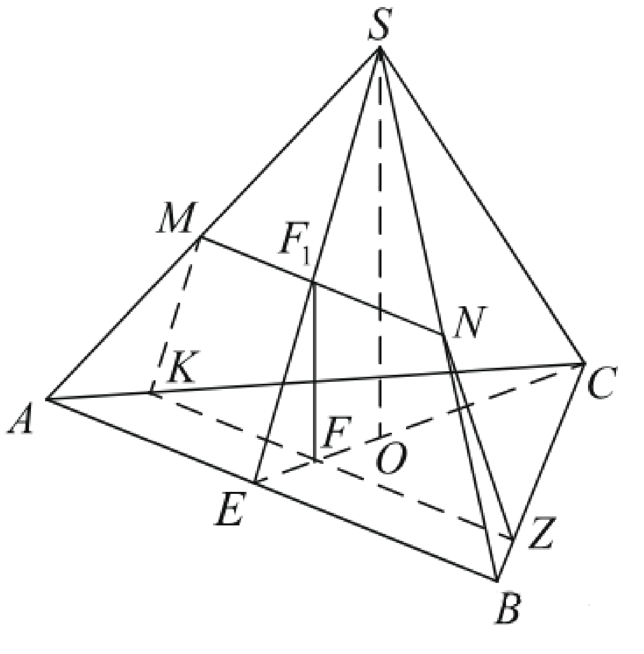

Рис. 1. Пирамида SABC

$MN \parallel (ABC)$, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой $KZ \parallel MN$, значит $MNKZ$ является трапецией. Рассмотрим плоскость SCE: F_1 – точка пересечения этой плоскости с MN, F – точка пересечения этой плоскости с KZ, O – центр основания пирамиды. Плоскости (SCE) и (MNK) перпендикулярны плоскости треугольника ABC, поэтому $F_1F \perp ABC$, $\Rightarrow F_1F \parallel SO$, а т. к. MN – средняя линия треугольника SAB, то точка F_1 – середина ES. Следовательно, F – середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2:1$. Отсюда следует, что $CF : FE = 5:1$.

Из подобия треугольников ABC и CKZ следует, что $CF = \frac{5}{6}CE \Rightarrow KZ = \frac{5}{6}AB.$

$$KZ = \frac{5\cdot 12}{6} = 10, CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

$$CO : OE = 2:1 \Rightarrow OE = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow CO = 2OE = 2\sqrt{3}\cdot 2 = 4\sqrt{3} = \sqrt{48}.$$

$$F_1F = \frac{SO}{2} = \frac{\sqrt{SC^2 - CO^2}}{2} = \frac{\sqrt{13^2 - (\sqrt{48})^2}}{2} = \frac{\sqrt{169-48}}{2} = \frac{\sqrt{121}}{2} = \frac{11}{2}.$$

$$S_{MNKZ} = \frac{MN + KZ}{2}\cdot F_1F = \frac{6+10}{2}\cdot\frac{11}{2} = 44.$$

Ответ: $S_{MNKZ} = 44.$

Наибольшую сложность для учащихся представляют задачи на нахождение углов между секущей плоскостью и элементами пирамиды. При решении таких задач главным является правильное построение необходимого угла между плоскостями или угла между прямой и плоскостью. Для построения линейного угла данного двугранного угла можно пользоваться следующей последовательностью действий: выбрать точку на ребре двугранного угла; провести в гранях угла полупрямые, перпендикулярные ребру; отметить угол, образованный полупрямыми. После этого, выполнив дополнительные построения, найти угол, используя теорему синусов и (или) теорему косинусов, а также известные тригонометрические формулы, исходя из условия задачи.

Процесс выполнения стереометрической задачи достаточно сложен для большинства учащихся. Однако, систематизация необходимых знаний по планиметрии и стереометрии, практическая работа с типовыми заданиями сделает этот процесс более оптимальным. Кроме этого, учащимся необходимо помнить, что геометрическая задача с развернутым ответом состоит из двух пунктов: доказать и вычислить. Можно использовать утверждение без доказательства и выполнить необходимые вычисления, получив при этом дополнительный балл.

Список литературы

1. Кодификатор элементов содержания [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.fipi.ru/ege-igve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения: 05.10.19).

2. Отчеты Федерального Института Педагогических Измерений [Электронный ресурс]. –Режим доступа: http://old.fipi.ru/view/sections/138/docs/ (дата обращения: 05.10.19).

3. Киселёв А.П. Геометрия [Текст] / под ред. Н.А. Глаголева. – М.: Физматлит, 2013. – 328 с.