Е. Б. Грибанова

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО АППАРАТА ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Е. Б. Грибанова

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО АППАРАТА ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Монография

Чебоксары
Издательский дом «Среда»
2020

УДК 004
ББК 32.973
Г82

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры
«Математическое образование»
ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет»
Глебова Мария Владимировна;
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика»
ФГБОУ ВО «Донской государственный
технический университет»
Попова Инна Григорьевна

Грибанова Е.Б.
Г82 **Методы и алгоритмы решения обратных экономических задач с помощью модифицированного аппарата обратных вычислений:** монография / Е.Б. Грибанова. – Чебоксары: ИД «Среда», 2020. – 132 с.

ISBN 978-5-907313-77-4

В данной работе описаны методы и алгоритмы решения обратных задач экономического анализа, разработанные путем модификации аппарата обратных вычислений. Предложенный инструментарий позволяет выполнять решение задач при меньшем объёме экспертной информации и является простым в компьютерной реализации. Рассмотрено использование методов для решения оптимизационных задач нелинейного программирования более широкого круга. Приведены результаты численных экспериментов и их сравнение с решением задач с помощью классических методов и математического пакета.

DOI 10.31483/a-10224
ISBN 978-5-907313-77-4

Оглавление

Введение

При исследовании экономических объектов используются различные показатели, которые могут быть связаны между собой аддитивной, мультипликативной, кратной, смешанной зависимостью. Причинно-следственная связь величин обуславливает разделение задач на прямые и обратные. Прямая задача заключается в определении результирующего показателя по имеющимся значениям исходных величин и виду зависимости с целью оценки текущего состояния объекта, прогноза его изменения в будущем, исследования влияния входных параметров на выходную величину. В качестве примера можно привести определение выручки предприятия по заданным значениям цены и количества проданного товара.

Обратная задача является более сложной по сравнению с прямой и заключается в таком подборе исходных величин, который обеспечил бы заданное значение результирующей переменной, т.е. дает ответ на вопрос «как сделать так, чтобы?». Появление таких задач произошло достаточно давно, в частности отдельные примеры приводятся со ссылкой на труды античных философов [1]. Сложность решения обратных задач связана с тем, что они не являются корректными. Понятие корректности было определено Ж. Адамаром и означает, что решение задачи существует и единственно на некотором множестве, а также непрерывно зависит от входных данных. Значительный вклад в исследование обратных задач принадлежит Тихонову [2], который показал, что определение дополнительных условий на решение позволяет получить устойчивую задачу. Он предложил способ регуляризации некорректной задачи, т.е. сведение исходной задачи решения некоторого операторного уравнения к проблеме поиска минимума некоторого функционала. Также большая роль в исследовании обратных задач и развитии математического аппарата принадлежит таким ученым как М.М. Лаврентьев, В.К. Иванов, В.Г. Романов. Современное состояние теории некорректных задач отражено в монографиях А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [3], М.М. Лаврентьева и Л.Я. Савельева [4–5], В.К. Иванова, В.В. Васина, В.П. Тананы [6], Р. Латтеса и Ж.Л. Лионса [7], М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шишатского [8], В.А. Морозова [9], О.А. Лисковца [10], В.В. Васина, А.Л. Агеева [11], А.М. Федотова [12], Г.М. Вайникко [13], В.К. Иванова, И.В. Мельниковой и А.И. Филинкова [14], В.П. Тананы и А.И. Сидиковой [15], С.И. Кабанихина [16] и др. Отдельным направлением в решении некорректных задачи является разработка простых в компьютерной реализации итерационных алгоритмов. Результаты исследований в этом направлении приводятся в работах А.А. Самарского и П.Н. Вабищевича [17], А.М. Денисова [18], С.Р. Вогеля [19], И.В. Емелина [20], С.Ф. Гилязова и Н.Л. Гольдмана [21], С.И. Кабанихина [22], О.В. Матысик [23], В.Н. Страхова [24], М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкого, В.Я. Стеценко [25] и др.

На рис. 1 представлена графическая иллюстрация прямой и обратной задачи в случае кратной зависимости для функции двух аргументов: рентабельность (r) равна отношению прибыли (p) к затратам (c) [26].

$$r = p / c. \tag{1}$$

Рассмотрим решение обратной задачи. Исходные данные: r = 0,2, p = 10 (д. е.), c = 50 (д. е.). Необходимо определить значения прибыли и затрат, которые обеспечат величину рентабельности, равную 0,3. Без дополнительной информации данная задача может иметь множество решений, поэтому необходимо привлечение опыта специалиста и экспертных оценок, регуляризации, что определяет многообразие подходов к решению такого рода задач, разработке которых посвящены в том числе современные исследования.

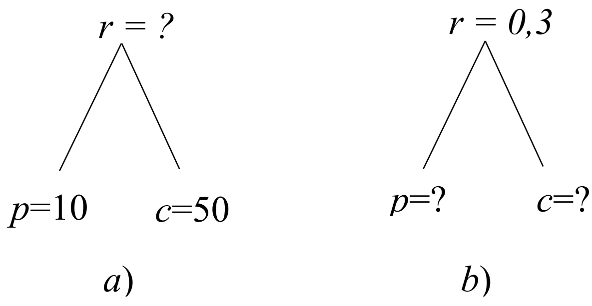


Рис. 1. Графическое представление задачи: а) прямой; b) обратной

Наиболее распространенными видами регуляризации, основанными на отклонении полученного решения от исходного, являются регуляризация Тихонова [27–29] и регуляризация через манхэттенское расстояние [30, 31].

В работе [22] в качестве дополнительных условий при решении задач экономического анализа используется экспертная информация: коэффициенты относительной приоритетности показателей, направления изменений показателей. Предложенный аппарат обратных вычислений позволяет выполнять решение обратных задач в области экономики в такой постановке: определение приращений аргументов функции на основе их исходных значений, заданного значения функции, экспертной информации, в качестве которой выступают направления изменения аргументов, коэффициенты относительной приоритетности. В результате решение задачи с водится к решению системы уравнений, которая отражает необходимость соответствия результирующего показателя заданному значению и соответствия изменений аргументов коэффициентам относительной важности.

Существуют работы, направленные на модификацию данного аппарата и его применение для ряда частных случаев.

Так, в работах [33, 34] рассмотрено существование ограничения на значения аргументов, что может быть вызвано, например, ограниченностью ресурсов предприятия. В работе [33] для учета ограничений при использовании обратных вычислений предполагается корректировка коэффициентов относительной важности, в статье [34] описана итерационная процедура оптимизации, которая заключается в последовательном изменении результирующего показателя до достижения заданного значения и определении величин изменений аргументов, что позволяет получить результат с учетом заданных ограничений. До полного исчерпания ресурсов либо достижения заданного значения целевой функции, повторяются следующие шаги: нахождение решения с помощью обратных вычислений; проверка соответствия полученного решения заданным ограничениям и перерасчет приростов в случае обнаружения дефицита в некотором ресурсе.

В статье [35] рассмотрен случай, когда один и тот же показатель используется в двух разных обратных задачах. Рассмотрен поиск компромиссного варианта такого аргумента с помощью указания коэффициентов распределения приростов.

В работе [36] приводится использование аппарата обратных вычислений для приведения предприятия в равновесное состояние, характеризующееся равенством целевых индикаторов, формирующихся из внешних и внутренних факторов предприятия.

Статья [37] посвящена нахождению решения обратной задачи с учетом «золотых пропорций» показателей предприятия (отношение частей к целому равно 1,618). Для этого осуществляется последовательная корректировка решений с заданными целевыми установками и с учетом «золотых пропорций» в зависимости от приоритетности способов достижения цели.

Ряд исследований посвящено применению обратных вычислений для решения социально-экономических задач. Так в статье [38] рассмотрено формирование интегрального показателя качества дополнительного образования в вузе, определяемого набором групп показателей более низкого уровня иерархической структуры: показатели конечных результатов образовательного процесса; показатели качества реализации образовательного процесса; показатели качества управления деятельностью подразделения; показатели ресурсного обеспечения. В свою очередь каждая из перечисленных групп показателей также определяется показателями более низкого уровня иерархии. Таким образом, решение задачи осуществляется сверху вниз иерархичной структуры, представленной в виде дерева. В работе [39] формирование интегрального показателя качества работы коммерческой организации также осуществляется с помощью иерархичной структуры, представлены методики определения интегрированных показателей качества и множества измеряемых показателей качества на основе когнитивного моделирования. Механизм обратных вычислений использован для решения задачи формирования рекомендаций по способам повышения качества работы организации.

В статье [40] рассматривается применение обратных вычислений для поиска значений показателей результативности деятельности сотрудников кафедры высшего учебного заведения для достижения желаемого значения рейтинга кафедры. Последующий анализ конечных изменений позволил определить сотрудников, способных внести наибольших вклад в формирование рейтинга кафедры.

Методика совместного использования системы сбалансированных показателей и метода обратных вычислений рассмотрена авторами Силкина, Переверзева [41]. Решение задачи включает прямой ход и обратный. Прямой ход состоит в построении системы сбалансированных показателей, определении связей между ними, вычислении обобщающего показателя. Структура показателей, таким образом, представляется в виде многоуровневого дерева. В случае, если вычисленные значения свидетельствуют о необходимости корректировки, осуществляется последовательный расчет показателей каждого уровня, обеспечивающих заданное значение обобщающей величины, расположенной уровнем выше.

Таким образом, существующие работы направлены на исследование применения аппарата обратных вычислений для решения отдельных задач с учётом их особенностей и его использование совместно с другими методами. Монография посвящена разработке методов и алгоритмов на основе обратных вычислений, не требующих использование экспертной информации либо требующих меньшего её объема. Привязка к мнению эксперта имеет свои положительные стороны: может быть рассмотрено несколько возможных вариантов решения задачи, коэффициенты могут быть установлены с учётом реальной возможности направления изменения аргументов, вычислены на основе данных за предыдущие периоды. Однако использование экспертной информации требует привлечения специалиста, что приводит к дополнительным затратам временных и финансовых ресурсов, кроме того, полученное решение будет являться субъективным и определяться степенью профессионализма эксперта. Также постановка задачи может подразумевать минимизацию изменения аргументов относительно исходного решения вместо использования экспертной информации либо использование существующей зависимости между показателями.

Цель работы заключается в разработке методов и алгоритмов, основанных на аппарате обратных вычислений и требующих меньшего объема экспертной информации (либо не требующих её применение) и их использование в решении задач прикладной экономики.

Актуальность данного направления исследования связана с широким распространением обратных задач в разных областях (экономика [42], физика, астрономия и т. д.), а также их высокой прикладной значимостью. Так, в области экономики решение обратных задач позволяет определить управляющие воздействия для достижения заданного состояния объекта экономики, и таким образом формировать оптимальные управленческие решения.

ГЛАВА 1. РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭКОНОМИКИ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Взаимосвязь показателей может быть представлена в виде дерева, на первом уровне которого расположен результирующий показатель, на втором – показатели, его формирующие и т. д. Рассмотрим случай мультипликативной зависимости для функции двух аргументов (рис. 2): выручка (r) равна произведению цены (p) и количества товара (c):

$$r = p \cdot c \,. \tag{1.1}$$

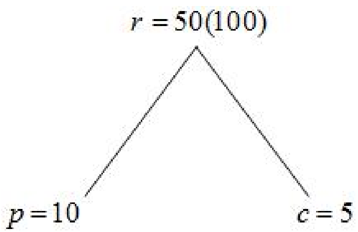


Рис. 2. Зависимость показателей

Исходные данные: r = 50 усл. ден.ед., p = 10 усл. ден. ед., c = 5 усл. ед. Необходимо определить значения цены и количества, которые обеспечат величину выручки, равную 100 (1.1). Без дополнительных ограничений данная задача может иметь множество решений. На рис. 3 изображена изокванта – линия, в которой функция постоянна и равна заданному числу (в данном случае 100). Любая точка графика позволит получить решение задачи.

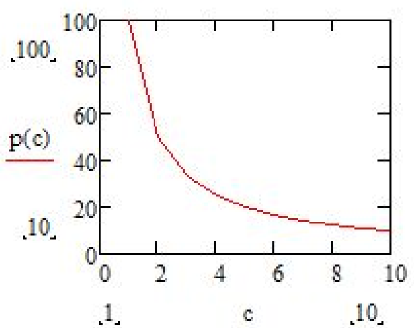


Рис. 3. Кривая заданного уровня

Решение обратных задач с помощью обратных вычислений – это получение точечных значений приростов аргументов функции на основании ее задаваемого значения и дополнительной информации, поступающей от лица, формирующего решение. В частности, в качестве такой информации могут быть указаны коэффициенты относительной важности целей, индивидуальные коэффициенты прироста аргументов, единый коэффициент прироста аргументов.

Так в случае использования коэффициентов относительной важности для решения задачи определяется следующая информация:

– начальные значения аргументов (x_1, x_2) и функции (y);

– новое значение функции ($y \pm \Delta y$);

– коэффициенты относительной важности аргументов (β_1, β_2);

– направление изменений аргументов (+, –).

Таким образом, может быть сформирована система уравнений:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f(x_1 \pm \Delta x_1(\beta_1), x_2 \pm \Delta x_2(\beta_2)); \\ \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}; \\ \beta_1 + \beta_2 = 1. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Решением системы будут величины Δx_1 и Δx_2, обеспечивающее значение результирующего показателя, равное $y \pm \Delta y$.

Так, решение задачи (1.1) может быть получено путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} r \pm \Delta r = f(p \pm \Delta p(\beta_1), c \pm \Delta c(\beta_2)); \\ \dfrac{\Delta p}{\Delta c} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}; \\ \beta_1 + \beta_2 = 1, \end{cases} \qquad (1.2)$$

где Δp, Δc – приращение аргументов;

β_1, β_2 – коэффициенты относительной важности приращений Δp, Δc соответственно;

$r, \Delta r$ – исходное значение и приращение результирующей функции.

Определение цены и количества товара может быть выполнено тремя способами в зависимости от соотношения величин прироста аргументов (табл. 1). В табл. 2 представлены варианты достижения цели для других видов моделей.

Таблица 1

Варианты достижения цели

Вид зависимости	Прирост результата					
	+			–		
Мультипликативная $p(\beta_1) \cdot c(\beta_2)$	p^+, c^+	p^+, c^-, $\beta_1 > \beta_2$	p^-, c^+, $\beta_1 < \beta_2$	p^-, c^-	p^+, c^-, $\beta_1 < \beta_2$	p^-, c^+, $\beta_1 > \beta_2$

Таблица 2

Варианты достижения целей для различных моделей

Вид зависимости	Условия	Прирост результата			
		+		–	
Мультипликативная	$A(\beta_1) \cdot B(\beta_2)$, $\beta_1 > \beta_2$	A^+, B^+	A^+, B^-	A^-, B^-	A^-, B^+
	$A(\beta_1) \cdot B(\beta_2)$, $\beta_1 < \beta_2$	A^+, B^+	A^-, B^+	A^-, B^-	A^+, B^-
Аддитивная	$A(\beta_1) + B(\beta_2)$, $\beta_1 > \beta_2$	A^+, B^+	A^+, B^-	A^-, B^-	A^-, B^+
	$A(\beta_1) + B(\beta_2)$, $\beta_1 < \beta_2$	A^+, B^+	A^-, B^+	A^-, B^-	A^+, B^-

Окончание таблицы 2

Вид зависимости	Условия	Прирост результата			
		+		–	
Кратная	$\frac{A(\beta_1)}{B(\beta_2)}$, $\beta_1 > \beta_2$	A^+, B^+	A^+, B^-	A^-, B^-	A^-, B^+
	$\frac{A(\beta_1)}{B(\beta_2)}$, $\beta_1 < \beta_2$	A^-, B^-	A^+, B^-	A^+, B^+	A^-, B^+

Установим значения коэффициентов важности приращений аргументов функции: $\beta_1 = 0{,}75$ и $\beta_2 = 0{,}25$.

Тогда решение задачи (рис. 1) может быть получено с помощью решения следующей системы уравнений (1.2):

$$\begin{cases} r + \Delta r = (p + \Delta p)(c + \Delta c); \\ \dfrac{\Delta p}{\Delta c} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Решая систему (1.3), получим:

$$\frac{\Delta p}{\Delta c} = 3$$

$$\Delta p = 3\Delta c$$

$$(c + \Delta c)(p + 3\Delta c) = 100$$

$$(5 + \Delta c)(10 + 3\Delta c) = 100$$

$$3\Delta c^2 + 25\Delta c - 50 = 0$$

$$\Delta c = 1{,}67$$

$$\Delta p = 3 \cdot 1{,}67 = 5.$$

Значения количества проданного товара и цены равны: $c = 6{,}67$, $p = 15$.

Также рассмотрим задачу формирования стоимости закупки. Исходные данные:

– объем закупки продукции первого вида (x_1) равен 11 кг.;

– объем закупки продукции второго вида (x_2) равен 16 кг;

– цена закупки продукции первого вида равна 125 д.е.;

– цена закупки продукции второго вида равна 105 д.е.

Стоимость закупки составит:

$$125 \cdot 11 + 105 \cdot 16 = 3055 \text{ д.е.}$$

Необходимо снизить количество закупаемой продукции первого и второго вида таким образом, чтобы цена закупки составила 2500. На рис. 4 (линия заданного уровня стоимости закупки) представлена точка Q, соответствующая исходным значениям переменных, и график, показывающий значения переменных x_1 и x_2, при которых стоимость закупки составит 2500. Можно увидеть, что достижение заданного результата может быть достигнуто множеством комбинаций значений x_1 и x_2. Поэтому для решения задачи укажем коэффициенты относительной приоритетности. Пусть коэффициент относительной приоритетности для первой продукции равен 0,4, для второй – 0,6. При этом заданное значение результирующего показателя должно быть достигнуто за счёт уменьшения объема закупки каждого вида продукции. Т.е. изменение объема закупки должно произойти в большей степени за счёт снижения объема закупки продукции второго вида.

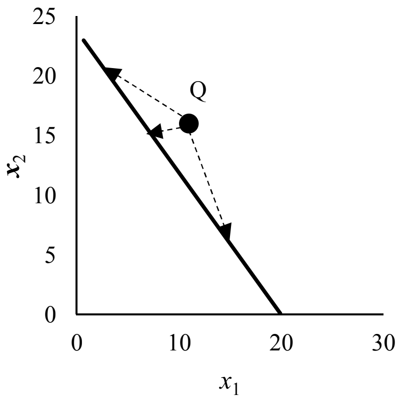


Рис. 4. Линия заданного уровня стоимости закупки

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \dfrac{0,4}{0,6}; \\ 125(11 - \Delta x_1) + 105(16 - \Delta x_2) = 2500. \end{cases}$$

Решение системы: Δx_1=2,743, Δx_2=2,02.

§1.1. Решение обратной задачи при числе аргументов больше двух

В случае, если число переменных больше 2, может быть выполнена свёртка показателей [22]. Рассмотрим случай зависимости результирующего показателя от трех аргументов. Общие затраты (*З*) включают материальные затраты (*М*), затраты на оплату труда (*Т*) и затраты на аренду помещения (*А*): $З = М + Т + А$.

Допустим необходимо снизить уровень затраты за счет снижения всех элементов. Тогда целевая установка будет иметь следующий вид:

$$З^{-} = M^{-}(\beta_1) + T^{-}(\beta_2) + A^{-}(\beta_3).$$

Свернем эту формулу. Введем величину, которая будет равна сумме двух последних затрат: $T^{-}(\beta_2) + A^{-}(\beta_3) = O^{-}(\gamma),\ \ \gamma = \beta_2 + \beta_3$. Тогда $З^{-} = M^{-}(\beta_1) + O^{-}(\beta_4)$. Далее последовательно решается две задачи с двумя аргументами, при этом значения коэффициентов относительной важности нормируются. Рассмотрим эту задачу для следующих исходных данных (рис. 5): β_1 = 0,5; β_2= 0,3; β_3= 0,2; *З* = 15; *М* =7; *Т* = 5; *А*=3; Δ*З* = 8.

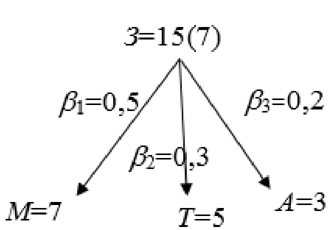


Рис. 5. Задача с тремя аргументами

Тогда новые значения будут равны:

$$O = T + A = 8$$

$$\gamma = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5.$$

Далее необходимо решить систему:

$$\begin{cases} З - \Delta З = M - \Delta M + O - \Delta O \\ \dfrac{\Delta M}{\Delta O} = \dfrac{\beta_1}{\gamma} \end{cases}$$

$$\Delta M = \Delta O \frac{\beta_1}{\gamma}$$

Подставляем выражение в первое уравнение, получим:

$$\Delta O = \frac{\Delta З}{1 + \dfrac{\beta_1}{\gamma}} = \frac{8}{1 + \dfrac{0{,}5}{0{,}5}} = 4$$

$$\Delta M = \Delta O \frac{\beta_1}{\gamma} = 4 \frac{0{,}5}{0{,}5} = 4 \cdot$$

Теперь нужно рассмотреть вторую модель $T^{-}(\beta_2) + A^{-}(\beta_3) = O^{-}(\gamma), \quad \gamma = \beta_2 + \beta_3$ и найти значения T и A (рис. 6).

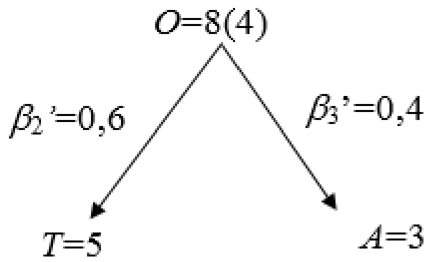


Рис. 6. Решение подзадачи

Выполним нормирование коэффициентов относительной важности (т.к. их сумма должна быть равна 1):

$$\beta_2' = \frac{\beta_2}{\beta_2 + \beta_3} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

$$\beta_3' = \frac{\beta_3}{\beta_2 + \beta_3} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} O - \Delta O = T - \Delta T + A - \Delta A \\ \dfrac{\Delta T}{\Delta A} = \dfrac{\beta_2'}{\beta_3'} \end{cases}$$

Решение системы:

$$\Delta T = \Delta A \frac{\beta_2'}{\beta_3'};$$

$$\Delta A = \frac{\Delta O}{1 + \dfrac{\beta_2'}{\beta_3'}} = \frac{4}{1 + \dfrac{0,6}{0,4}} = 1,6;$$

$$\Delta T = 1,6 \cdot \frac{0,6}{0,4} = 2,4.$$

Таким образом, новые значения величин будут равны:

$T^* = 5 – 2,4 = 2,6$;

$A^* = 3 – 1,6 = 1,4$;

$M^* = 7 – 4 = 3$.

Сумма затрат составит: 2,6 + 1,4 + 3 = 7, что соответствует искомому значению общих затрат.

Метод сверки является трудоемким из-за необходимости определения новых переменных. Для решения обратной задачи может быть рассмотрен такой вариант как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f(x_1 \pm \Delta x_1(\beta_1), x_2 \pm \Delta x_2(\beta_2), \ldots, x_n \pm \Delta x_n(\beta_n)); \\ \dfrac{\pm \Delta x_1}{\pm \Delta x_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}; \\ \dfrac{\pm \Delta x_1}{\pm \Delta x_3} = \dfrac{\beta_1}{\beta_3}; \\ \ldots \\ \dfrac{\pm \Delta x_1}{\pm \Delta x_n} = \dfrac{\beta_1}{\beta_n}; \\ \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 1. \end{cases}$$

На рис. 7 представлено решение задачи (рис. 5) в MathCad.

$$A := 3 \qquad T := 5 \qquad M := 7$$

$$\Delta A := 0 \qquad \Delta M := 0 \qquad \Delta T := 0$$

Given

$$\frac{\Delta M}{\Delta A} = \frac{0.5}{0.2}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{0.3}{0.2}$$

$$A + \Delta A + M + \Delta M + T + \Delta T = 7$$

$$\mathrm{Find}(\Delta M, \Delta T, \Delta A) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2.4 \\ -1.6 \end{pmatrix}$$

Рис. 7. Решение задачи в MathCad

Значения соответствуют полученным выше.

Данный метод является более простым для реализации в математических пакетах, однако при реализации алгоритмов при разработке программных систем требуется использование сложных вычислительных методов, в частности для решения систем уравнений.

Для компьютерной реализации может быть использован алгоритм решения задачи с помощью пошагового изменения начальных значений аргументов с заданными коэффициентами относительной приоритетности [22].

Исходные данные: точность ε, значения коэффициентов относительной приоритетности β, направление изменение показателя *t* (принимает два возможных значения: –1, +1), заданное значение функции y^* ($y^* = y \pm \Delta y$), начальное значение функции y ($y_0 = y$), величина разницы между заданным значением результирующего показателя и его начальным значением: $\delta_0 = \left| y^* - y_0 \right|$, исходные значения аргументов X, начальное значение приращения *s* (малое число), изменение приращения Δs, номер шага *k* (*k*=1).

Шаг 1. Определение результирующего показателя:

$$y_k = f(x_1 + s \cdot t_1 \cdot \beta_1, x_2 + s \cdot t_2 \cdot \beta_2, ..., x_n + s \cdot t_n \cdot \beta_n);$$

Шаг 2. Расчёт разницы между заданным значением результирующего показателя и его текущим значением:

$$\delta_k = \left| y^* - y_k \right|$$

Шаг 3. Проверка условия окончания алгоритма:

Если $\delta_k > \delta_{k-1}$ или $\left| y^* - y_k \right| < \varepsilon$, то работа алгоритма завершается.

Иначе – изменение приращения: $s = s + \Delta s$, переход на шаг 1.

На рис. 8 представлено решение задачи (рис.1.4) с помощью реализованного итерационного алгоритма на языке VBA (ε =0,01, *t*= –1, *s*=0,001, Δs =0,001). Можно увидеть, что величины изменений аргументов соответствуют с заданной точностью значениям, полученным с помощью предыдущих двух способов (свёртка, решение системы уравнений).

M	T	A	З	
7	5	3	15	
		Заданное значение З		
			7	
Коэффициенты важности				
β_1	β_2	β_3		
0.5	0.3	0.2		
Решение				
ΔM	ΔT	ΔA		
-3.995	-2.397	-1.598		
M+ΔM	T+ΔT	A+ΔA	З+ΔЗ	
3.005	2.603	1.402	7.01	
		Решить		

Рис. 8. Решение задачи с помощью итерационного алгоритма

ГЛАВА 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ АРГУМЕНТАМИ ФУНКЦИИ

Из табл. 2 можно увидеть, что достижение результата (увеличение или уменьшение результирующего показателя) без учета соотношений коэффициентов относительной важности может быть выполнено тремя различными способами. Если принять во внимание соотношение между коэффициентами относительной приоритетности, то число вариантов уменьшается до двух. Следовательно, при решении задачи необходимо выполнять проверку возможности достижения результата с использованием установленных специалистом направлений изменений показателей и значений коэффициентов относительной приоритетности. В модифицированном методе рассматривается возможность получения решения только двумя способами: изменение аргументов осуществляется в одном направлении, изменение аргументов осуществляется в разных направлениях [43–44]. В отличие от классического метода обратных вычислений он позволяет избежать проверок согласованности дополнительной информации, поступающей от человека: соответствия поставленной цели коэффициентам относительной важности.

Так, рассмотрим мультипликативую модель (табл. 1) в случае увеличения результирующего показателя и $\beta_1 > \beta_2$. Если при постановке задачи указано, что достижение цели должно быть выполнено путем изменения аргументов в одном направлении, то оба аргумента будут увеличены. Если при постановке задачи указано, что достижение цели должно быть выполнено путем изменения аргументов в разных направлениях, то аргумент с большим значением коэффициента важности будет увеличен, а аргумент с меньшим значением коэффициента важности будет уменьшен. Таким образом можно исключить ситуацию, когда специалист укажет, например, способ достижения цели путем увеличения аргумента с меньшим значением коэффициента важности и уменьшения аргумента с большим значением коэффициента важности, т. е. входные данные будут определены неверно.

Модифицированный метод обратных вычислений заключается в определении аргументов функции на основании её указанного значения, начальных значений аргументов, коэффициентов относительной важности и виду зависимости между аргументами [43]. Он предполагает построение линейного уравнения связи между аргументами вида $x_1 = a \pm b x_2$ и подстановку полученного уравнения в исходное соотношение. Для создания уравнения связи используется минимаксный метод. Суть его заключается в построении уравнения диагонали прямоугольника, образованного минимальными и максимальными значениями величин (рис. 8), при этом в качестве углового коэффициента используется отношение сторон:

$$Lx_1 = X_1 \max - X_1 \min$$

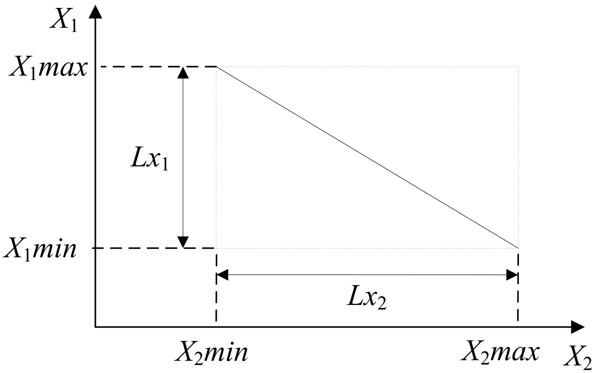
$$Lx_2 = X_2 \max - X_2 \min.$$

Так для построения функции обратной зависимости (рис. 9а) используются формулы:

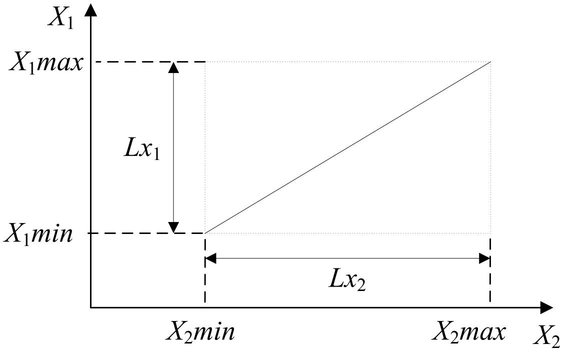
$$b = \frac{Lx_1}{Lx_2}, \quad a = X_1 \min + b \cdot X_2 \min.$$

В случае прямой зависимости (рис. 9б) формулы расчёта параметров имеют вид:

$$b = \frac{Lx_1}{Lx_2}, \quad a = X_1 \min - b \cdot X_2 \min.$$



а)



б)

Рис. 9. Зависимость между аргументами: а) обратная; б) прямая

В модифицированном методе обратных вычислений используется отношение коэффициентов относительной приоритетности в качестве углового коэффициента и исходные данные вместо минимальных значений.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f(a + b \cdot x_2^*, x_2^*); \\ b = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}; \\ a = x_1 \pm b \cdot x_2 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1. \end{cases}$$

где x_2^* – искомое значение второго аргумента ($x_2^* = x_2 + \Delta x_2$).

Искомое значение первого аргумента:

$$x_1^* = x_1 + \Delta x_1 = a + b \cdot x_2^*.$$

Таким образом, систему можно представить в виде:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f(x_1^*, x_2^*); \\ x_1^* = a + bx_2^*. \end{cases}$$

Так, рассмотрим задачу формирования выручки:

$$r = p \cdot c,$$

где r – выручка;
p – количество;
c – цена.

Исходные данные: r = 50 усл. ден. ед., p = 10 усл. ед., c = 5 усл. ед, β_1=0,75 (коэффициент относительной важности количества), β_2 =0,25 (коэффициент относительной важности цены). Необходимо определить значения цены и количества, которые обеспечат величину выручки, равную 100.

На рис. 10 показаны линии уровня 50 и 100. Это означает, что любая точка данного графика, формируемая значениями количества и цены, обеспечит соответствующее значение выручки (50 или 100). Исходные значения цены и количества соответствуют точке А. Для решения задачи может быть рассмотрены две зависимости.

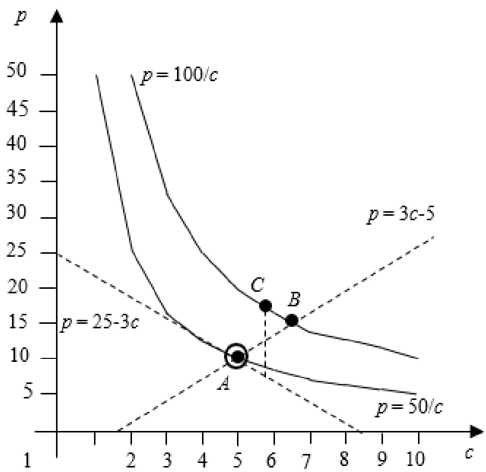


Рис. 10. Прямая и обратная зависимость между аргументами

Параметры уравнения при прямой зависимости:

$$b = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{0,75}{0,25} = 3,$$

$$a=p-b\cdot c=10-3\cdot 5=-5.$$

Уравнение имеет вид: $p = -5 + 3c$.

Параметры уравнения при обратной зависимости:

$$b = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{0,75}{0,25} = 3,$$

$$a = p + b \cdot c = 10 + 3 \cdot 5 = 25.$$

Уравнение имеет вид: $p = 25 - 3c$.

Точка B (пересечение прямой $p = -5 + 3c$ с линией уровня $p = 100/c$ является решением задачи). В случае обратной зависимости решение задачи отсутствует.

Таким образом, решение обратной задачи с помощью модифицированного метода обратных вычислений сводится к построению уравнения связи между аргументами и нахождению точки пересечения с линией заданного уровня.

Рассмотрим также пример зависимости функции от трех аргументов. Прибыль (m) организации равна разности выручки (r) и постоянных (f) и переменных (v) затрат:

$$m = r - f - v.$$

Исходные данные (усл. ден. ед.): $m = 200, r = 400, f = 50, v = 150$. Ставится задача определения уровня выручки, переменных и постоянных затрат для увеличения прибыли на 150 д.е. При этом коэффициенты относительной приоритетности равны: $\beta_1 = 0,8, \beta_2 = 0,1, \beta_3 = 0,1$ (рис. 11).

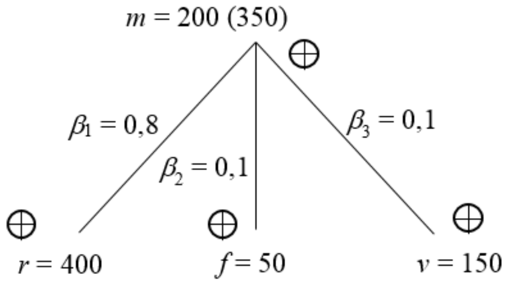


Рис. 11. Трехфакторная модель

Задача (рис. 11) может быть решена и с помощью процедуры свертки. Нужно определить дополнительную переменную S, характеризующую общие затраты. Тогда задача разбивается на две подзадачи (рис. 12). Сначала необходимо определить прирост выручки и общих затрат, а затем изменение постоянных и переменных затрат. Значения коэффициентов относительной приоритетности нормируются таким образом, чтобы их сумма была равна единице:

$$\beta_2' = \beta_2 + \beta_3 = 0,1 + 0,1 = 0,2\,;$$

$$\beta_1'' = \beta_2'' = \frac{0,1}{0,1+0,1} = 0,5\,.$$

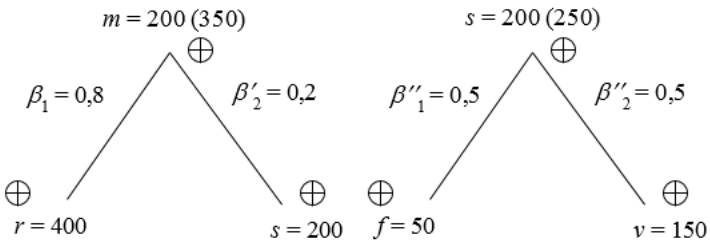


Рис. 12. Разбиение на подзадачи

Решение первой подзадачи:

$$b = \frac{0,8}{0,2} = 4;$$

$$a = 400 - 4 \cdot 200 = -400;$$

$$r = -400 + 4 \cdot s$$

Подставляем полученное уравнение в формулу расчета результирующего показателя:

$$-400 + 4 \cdot s - s = 350$$

$$s = 250$$

$$r = 600.$$

Решение второй подзадачи:

$$b = \frac{0,5}{0,5} = 1;$$

$$a = 50 - 150 = -100;$$

Уравнение зависимости между аргументами:

$$f = -100 + v$$

Подставляем полученное уравнение в формулу расчета результирующего показателя:

$$-100 + v + v = 250$$

$$2 \cdot v = 350$$

$$v = 175$$

$$f = 75.$$

Таким образом, искомые значения аргументов: r=600 д.е., f=75 д.е., v=175 д.е.

ГЛАВА 3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

При большом числе аргументов и наличии ограничений решение обратной задачи с помощью обратных вычислений усложняется из-за необходимости многократного выполнения проверок полученного решения на соответствие ограничениям и корректировок аргументов и коэффициентов относительной важности [34]. Использование стохастических методов при решении задач подобного рода позволяет избежать сложных вычислений и найти приближенное решение с учетом коэффициентов важности, ограничений аргументов, в том числе, рассматривать ситуации, когда переменные могут принимать только целые значения либо значения из заданного набора.

Поскольку обратная задача может быть представлена в виде задачи глобальной оптимизации [45–46], в которой нужно минимизировать разницу между заданным значением целевой функции и полученным решением, рассмотрим существующие работы, посвящённые минимизации функции.

§3.1. Методы случайного поиска

Появление идеи использования случайных величин при поиске решения связывают с именем У. Р. Эшби. В нашей стране исследования алгоритмов случайного поиска берут начало в работах Л.А. Растригина [47–48]. Алгоритмы поиска подразделяют на ненаправленные (все случайные испытания строят независимо друг от друга) и направленные (испытания связаны между собой).

Наиболее простым методом решения задач глобальной оптимизации является метод ненаправленного случайного поиска. Он заключается в получении случайных значений аргументов из заданного интервала, расчете целевой функции и сравнении её величины с наилучшим из вычисленных. Если новое рассчитанное значение результата оказалось меньше, то осуществляется запоминание полученного решения. Таким образом, для функции одного аргумента последовательность шагов будет следующая:

Шаг 1. Генерирование на интервале $[r; R]$ равномерно распределенной случайной величины x.

Шаг 2. Если $f(x)<f_{\min}$ ($f_{\min}$ – минимальное найденное значение функции), то происходит запоминание новой точки в качестве текущего решения $f_{\min}=f(x)$, $x_{\min}=x$.

Шаги повторяются в течение заданного числа реализаций либо до получения решения с указанной точностью. Такой способ нахождения решения является реализацией метода проб и ошибок.

Данный алгоритм может быть совмещен с локальным поиском, когда из случайно выбранных точек осуществляется локальный спуск в ближайший минимум. Из найденных локальных минимумов выбирается точка с наименьшим значением [47].

Благодаря своей простоте и гибкости данный метод получил широкое распространение при решении различных задач. Например, в статье [49] рассматривается использование метода ненаправленного случайного поиска для решения комбинаторной задачи выбора оптимального портфеля биржевых опционов, что позволило получить целочисленные значения искомых величин.

К алгоритмам направленного поиска относят алгоритм парной пробы, с возвратом при неудачном шаге, наилучшей пробы и т. д. [48].

В алгоритме парной пробы по обе стороны от исходной точки делаются два поисковых шага случайной величины. После этого осуществляется переход в новую точку в направлении наилучшего значения функции. В алгоритме с возвратом при неудачном шаге задается начальная точка x и случайным образом осуществляется моделирование приращения dx. Если значение функции в новой точке $x + dx$ лучше, чем в точке x, то осуществляется переход в эту точку. В некоторых работах предлагается исключать то направление, которое не приводит к улучшению значения функции. В статье [50] описывается простой алгоритм оптимизации (SOPT) в котором случайная величина приращения имеет не равномерное распределение, а распределение Гаусса. Также предлагается многократно вызывать алгоритм для выбора наилучшего решения из полученных.

Недостатком приведенных алгоритмов направленного поиска является то, что они в качестве решения могут определить локальный минимум, а не глобальный. В связи с этим разрабатываются различные модификации. К ним, в частности, можно отнести адаптивные алгоритмы. Например, таким алгоритмом является случайный поиск ARSET (Adaptive Random Search Technique) [51] и динамический случайный поиск DRASET (Dynamic Random Search Technique) [52]. В адаптивном случайном поиске в зависимости от значения целевой функции пространство поиска сужается (когда происходит поиск наилучшего значения) или расширяется (когда найдено решение с приемлемой точностью), таким образом, уменьшается вероятность нахождения локального минимума вместо глобального из-за недостаточного исследования отдельных участков. В алгоритме DRASET после нахождения решения дополнительно осуществляется локальный поиск вокруг найденной точки для получения более точного значения.

Также существуют алгоритмы поиска глобального минимума, которые используют процедуру случайного блуждания [47], например, метод «зашумления» градиента, и метод сглаживания, который может быть использован в случае, если минимизируемая функция образована путем наложения на унимодальную функцию мелких отклонений; воспроизводят поведение живой и неживой природы [53–54]; основаны на интервальных подходах [55–56].

К недостаткам метода случайного поиска относят необходимость выполнение большого числа итераций для получения решения с заданной точностью, что требует затрат вычислительных ресурсов, а также существующую погрешность вычислений.

§3.2. Стохастические алгоритмы решения обратной задачи

Взаимосвязь показателей может быть представлена в виде дерева, где на нулевом уровне расположено значение результирующей функции, а на нижних – аргументы. В свою очередь каждый лист этого дерева может быть результирующим показателем (рис. 13).

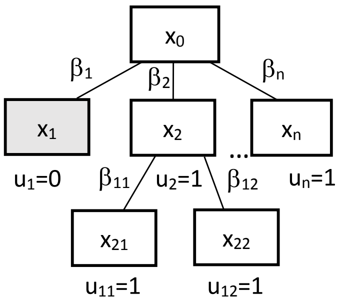


Рис. 13. Представление задачи в виде дерева

Узлы дерева имеют следующие характеристики:

– начальное значение x;

– коэффициент относительной важности β (сумма коэффициентов относительной важности аргументов одного уровня и относящихся к одному результирующему показателю должна быть равна единице);

– минимальное l и максимальное h значения, которые может принимать данный показатель;

– индикатор u, характеризующий возможность использования данного элемента, и принимающий два значения: 1 (использование возможно) и 0 (использованием невозможно).

Коэффициент относительной важности β указывает степень изменения результирующего показателя за счет данного аргумента.

Значение индикатора u становится равным нулю в случае, если изменение аргумента не может быть выполнено из-за существующего ограничения или отсутствия положительного изменения целевой функции. Также данный индикатор устанавливается равным нулю для величин – констант.

Общая задача может включать несколько подзадач, решение которых осуществляется последовательно путем обхода вершин дерева сверху-вниз. Так, для задачи на рис. 13 сначала будут вычислены значения x_1, x_2, x_n, обеспечивающие заданную величину результата x_0, далее – x_{21}, x_{22} для получения значения x_2. Ниже будут описаны процедуры для решения одной подзадачи. При этом начальное значения корня рассматриваемого поддерева будем обозначать $y = f(x)$, а его значение, которое необходимо получить – y^*.

Для решения обратной задачи были разработаны два алгоритма. Первый представляет собой модификацию случайного поиска, второй – итерационной процедуры, основанной на приращении функции.

Чтобы случайный поиск можно было использовать для решения обратной задачи необходимо: представить обратную задачу в виде задачи глобальной оптимизации, где нужно минимизировать разницу между полученным решением и искомым y^*, а также максимизировать соответствие изменений аргументов установленным коэффициентам важности.

Для этого был использован интегральный показатель, который отражает степень достижения глобального минимума и соответствие приростов аргументов коэффициентам важности. Таким образом, алгоритм может быть представлен в виде следующих шагов (*s* – номер итерации, *y* – начальное значение результирующего показателя):

Шаг 1. Генерирование на интервалах $[l_i, h_i]$ равномерно распределенных случайных величин x_{si}, ($i = 1..n$, *n* – количество аргументов). Расчет значения функции $y_s = f(x_s)$.

Шаг 2. Вычисление интегрального показателя:

$$c = \frac{\left|y_s - y^*\right|}{\left|y - y^*\right|} + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\left|\Delta x_i\right|}{\sum_{i=1}^{n} \left|\Delta x_i\right|} - \alpha_i \right|,$$

где $\Delta x_i = x_{si} - x_i$.

Первая часть слагаемого принимает минимальное значение, близкое к нулю, когда величина результирующего показателя будет близка заданному y^*, вторая часть – при соответствии приростов коэффициентам важности.

Шаг 3. Сравнение с наилучшим значением интегрального показателя: если $c < c_{\min}$, то новое решение запоминается в качестве текущего $y_{\min} = f(x_s)$, $x_{\min i} = x_{si}$.

Критерием останова является выполнение заданного числа итераций либо получение решения с указанной точностью.

Рассмотрим теперь алгоритм, основанный на моделировании приращения функции.

Устанавливается шаг, приращения аргументов Δy (*s* – номер итерации, *y* – начальное значение результирующего показателя).

Шаг 1. Установить новое значение результирующего показателя $y_s = y_s + \Delta y$.

Шаг 2. С помощью алгоритма моделирования полной группы несовместных событий выбрать узел из вершин-потомков, для которых значения индикатора равно 1, в соответствии с коэффициентами важности $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$. Для этого выполняется расчет нормированных значений вероятностей по формуле:

$$p_i^* = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j},$$

где j – номер вершины, для которой значения индикатора равно 1.

Если узел не найден, то осуществляется завершение работы алгоритма.

Шаг 3. Определяется значение x^*_{sk} выбранной на предыдущем шаге вершины *k*, при фиксированных значениях остальных величин для получения заданного y_s.

Проверка соответствия ограничению $l_k \leq x^*_{sk} \leq h_k$. Если условие выполняется, то $x_{sk} = x^*_{sk}$, и всем вершинам, не являющимся константой, присваивается индикатор, равный единице, а иначе – $f_k = 0$. Переход к шагу 1.

Шаг 3. Проверка условия: $y^* = y_s$. Если условие выполняется, происходит завершение работы алгоритма, иначе – переход к шагу 1.

Полученные значения x_s будут решением задачи.

В качестве примера рассмотрим модель формирования прибыли, приведенную в [5]:

$$profit = revenue - const \;\; costs - variable \;\; costs,$$

где *profit* – прибыль;
revenue – выручка
const costs – постоянные затраты;
variable costs – переменные затраты.

Исходные данные (тыс. руб.): *profit* = 200, *revenue* = 400, *const costs* = 50, *variable costs* = 150. Ставится задача определения уровня выручки, переменных и постоянных затрат для увеличения прибыли на 150 тыс. руб. При этом коэффициенты относительной значимости равны: β_1=0,8; β_2 =0,1; β_3=0,1.

Данная задача может иметь более одного решения в зависимости от направления изменения величин. Например, увеличение прибыли может произойти за счет увеличения выручки, увеличения постоянных и переменных затрат, а также за счет увеличения выручки и уменьшения затрат. В табл. 3 представлены результаты для случая, когда увеличение выручки сопровождается снижением затрат.

В модифицированном методе обратных вычислений направление изменения аргументов указывается с помощью вида зависимости: прямая или обратная. Так, результаты таблицы 3 получены для случая, когда между выручкой и затратами обратная зависимость, а между постоянными и переменными – прямая. В методе случайного поиска направление изменения можно получить путем установления соответствующих нижних и верхних границ (иначе решения в разных реализациях могут значительно отличаться). Для задачи были использованы следующие ограничения:

$$400 \le revenue \le 800$$

$$10 \le const \quad costs \le 50$$

$$120 \le variable \quad costs \le 150.$$

Таблица 3

Результаты решения задачи

Метод поиска решения	Значение функции	Значения аргументов		
		Выручка	Постоянные затраты	Переменные затраты
Модифицированный метод обратных вычислений	350	520	35	135
Случайный поиск (1 млн точек)	350,04	519,94	34,97	134,93
Приращение функции (шаг = 1)	350	521	36	135

При использовании алгоритма на основе приращения функции возможно нахождение решения, только для случая, когда сумма абсолютных изменений аргументов минимальна. Например, в табл. 4 представлены варианты увеличения результата в случае аддитивной зависимости между двумя аргументами. Для суммы двух аргументов увеличение результирующего показателя можно получить двумя способами: увеличив оба аргумента и увеличив более значительно аргумент с наибольшим значением коэффициента важности, уменьшив при этом аргумент с меньшим значением коэффициента относительной значимости. Метод приращения функции позволяет найти решение только для первого случая. Аналогично для второго варианта модели (разность аргументов) метод приращения функции выполнит поиск решения только в случае увеличения аргумента с наибольшим значением коэффициента важности при уменьшении значения аргумента с наименьшим значением коэффициента значимости.

Таблица 4

Варианты достижения цели

Модель	Прирост результата	
$A(\beta_1)+B(\beta_2), \beta_1>\beta_2$	A^+, B^+	A^+, B^-
$A(\beta_1)-B(\beta_2), \beta_1>\beta_2$	A^+, B^+	A^+, B^-

Таким образом, на основе простого случайного поиска и итерационной процедуры приращения функции разработаны алгоритмы решения обратной задачи при наличии ограничений. Их преимуществом является простота компьютерной реализации, в случае их использования отсутствует необходимость решения системы уравнений, применения процедуры свертки и многократного решения задачи с помощью обратных вычислений в случае, когда число аргументов больше двух. Кроме того, алгоритм на основе приращений не требует указания направления изменения аргументов (т. е. требует меньшего объема экспертной информации), решение определяется для варианта, при котором достижение результата достигается при меньшем суммарном абсолютном изменении аргументов. К недостаткам можно отнести существующую погрешность вычислений из-за использования стохастических методов.

ГЛАВА 4. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ РАССТОЯНИЯ ОТ ИСХОДНОЙ ТОЧКИ

Полученное с использованием коэффициентов относительной приоритетности аргументов решение является субъективным и основано на мнении специалиста, определение которого может быть затруднено. К задачам, решение которых может быть найдено без привлечения экспертной информации, в частности, можно отнести задачи поиска максимально близкого к исходному решения, т.е. при минимальном изменении аргументов. Здесь исходные значения характеризуют текущее состояние объекта, следовательно, меньшее их изменение требует меньше усилий для достижения поставленной цели.

В качестве меры удаленности полученного решения от исходного могут быть рассмотрены классические метрики: эвклидова метрика (регуляризация Тихонова), квадрат эвклидовой метрики, манхэттенское расстояние.

Пусть x_i – i-й показатель деятельности экономического объекта, y – результирующий показатель деятельности объекта, $f\ (x_i)$ – функция зависимости между показателями x_i и результирующим показателем y ($y = f\ (x)$). Задача заключается в определении изменений исходных характеристик Δx_i для достижения заданного значения результирующего показателя $y + \Delta y$.

При применении регуляризации по Тихонову задача может быть представлена в следующем виде (μ – параметр регуляризации):

$$Q(\Delta x) = (f(x + \Delta x) - y - \Delta y)^2 + \mu \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 \to \min. \quad (4.1)$$

В случае регуляризации через манхэттенское расстояние вместо суммы квадратов изменений аргументов в формуле (4.1) используется сумма модулей изменений аргументов.

Решение задачи (4.1) требует нахождение параметра регуляризации μ, что является отдельной задачей, требующей выбора способа поиска μ [57], определяющего полученный результат. В связи с этим может быть рассмотрен вариант представления в виде оптимизационной задачи с ограничением. При этом могут быть рассмотрены варианты целевой функции:

минимизация суммы модулей изменений аргументов, минимизация суммы квадратов изменений аргументов.

В случае минимизации суммы модулей изменений аргументов задача имеет вид:

$$g(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta x_i\right| \to \min,$$

$$f(x + \Delta x) = y + \Delta y.$$

В результате решения такой задачи значения некоторых изменений аргументов получаются равными нулю, таким образом, может быть осуществлен отбор наилучших для изменения признаков.

При минимизации суммы квадратов изменений аргументов задача имеет вид:

$$g(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 \to \min,$$

$$f(x + \Delta x) = y + \Delta y.$$

Представление задачи в таком виде может быть определено необходимостью достижения заданного значения результирующего показателя таким образом, чтобы изменения входных параметров были как можно ближе к нулю. Данный способ решения отражает стремление минимизировать корректировку входных управляемых показателей [58], а, следовательно, и снизить затраты ресурсов на мероприятия, сопряженные с изменением показателей по сравнению с их текущим состоянием.

§4.1. Минимизация суммы квадратов изменений аргументов

В случае использования квадрата эвклидовой метрики задача определения изменений аргументов может быть представлена в виде [59]:

$$\begin{aligned} &g(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2 \to \min \\ &f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) = y + \Delta y \end{aligned} \qquad (4.2)$$

где x_1, x_2, …, x_n – исходные значения аргументов;

$y + \Delta y$ – заданное значение функции;

n – число аргументов;

$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ – искомые приращения аргументов;

f – функция зависимости между аргументами и результирующим показателем.

Решение такой задачи может быть выполнено с применением методов нелинейной оптимизации.

§4.2. Методы нелинейной оптимизации

Классическими методами решения задачи нелинейной оптимизации (4.2) являются метод штрафов и множителей Лагранжа. В методе множителей Лагранжа модифицированная функция включает неизвестные параметры – множители Лагранжа λ [60–61]:

$$Z(\Delta x, \lambda) = \lambda(f(x + \Delta x) - y - \Delta y) + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 \to \min. \quad (4.3)$$

Для оптимизации функции (4.3) происходит формирование системы уравнений, в которой частные производные приравниваются к нулю, а также включаются условия дополняющей нежесткости. Из-за определения дополнительных переменных λ происходит увеличение размерности задачи, что является недостатком этого метода.

В методе штрафов осуществляется многократная оптимизация модифицированной функции при последовательном изменении штрафного параметра R:

$$L(\Delta x) = R(f(x + \Delta x) - y - \Delta y)^2 + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 \to \min. \quad (4.4)$$

Данная классическая схема решения может быть модифицирована с учётом специфики решаемой задачи. Так, в работе [62] рассматривается решение задачи многокритериальной оптимизации. Авторами [63] представлено решение задачи двухуровневой оптимизации с помощью метода штрафов.

Основным недостатком метода штрафов является необходимость выполнения многократной безусловной оптимизации функции. В силу того, что модифицированная функция (4.4) включает две составляющие (сумму квадратов приращений и соответствие функции f заданному значению результирующего показателя), её оптимизация может занять продолжительное время, а градиентные методы оказаться неэффективными.

В качестве способа преодоления данной трудности авторами предлагаются алгоритмы решения задачи без применения штрафного параметра, основанные на условиях Куна-Таккера. В результате решение задачи сводится к решению систем уравнений. Так, в работе [64] на каждой итерации осуществляется решение трех систем линейных уравнений для поиска направления изменений аргументов, после чего выполняется линейный поиск в заданном направлении. В статье [65] решение задачи нелинейного программирования сводится к решению задачи линейного программирования симплекс-методом, однако предложенный метод может быть использован только при линейном ограничении. Также для решения задач нелинейной оптимизации с ограничениями-неравенствами применяется метод Зойтендейка [66], который включает решение задачи линейного программирования для определения направления для поиска с последующей и оптимизацией функции путем движения вдоль выбранного направления.

Ещё одним направлением исследований в области решения задач нелинейного программирования является использование методов, основанных на прямом случайном поиске [67], применении эволюционных механизмов [68] и т. д. Такие методы позволяют получить некоторое решение за заданное пользователем время, что делает возможным их применение в задачах большой размерности, когда использование классических методов может привести к недопустимо большому времени решения задачи. Однако полученное решение будет субоптимальным и изменяться в различных запусках программной реализации. Кроме того, реализация самих алгоритмов может представлять сложность в связи с множеством правил корректировки решений, полученных на каждой итерации. Так, эволюционные алгоритмы требуют генерации большого числа агентов популяций, выполнения многократных операций по их отбору и формированию новых индивидуумов. В работе [69] рассматривается применение рекуррентных нейронных сетей для решения задачи нелинейной оптимизации. Применение нейронных сетей требует реализации алгоритмов обучения сети. В силу этого разработка алгоритма, реализация многократной оптимизаций функции также может занять значительной количество временных и вычислительных ресурсов.

Некоторыми авторами также рассматривается использование комбинации двух методов, например, в работе [70] метод Зодендейка был использован совместно с эвристическим методом.

Выявленные недостатки существующих методов свидетельствуют о целесообразности проведения исследования, посвященного разработке эффективного алгоритма решения представленной оптимизационной задачи, лишенного перечисленных недостатков, связанных с формированием модифицированной функции, требованиями к виду ограничения. Для его разработки рассмотрено использование аппарата обратных вычислений.

Модификация классической схемы решения при этом выражается в изменении величины соотношения значений приращений аргументов, которая будет определяться теперь угловым коэффициентом линии уровня, определяемого новым значением функции. Далее будет рассмотрено решение задачи в случае аддитивной, кратной и мультипликативной зависимости.

§4.3. Метод решения обратной задачи при минимизации суммы изменений аргументов на основе обратных вычислений

Аддитивная модель

Рассмотрим задачу с аддитивной зависимостью (например, суммарные затраты равны постоянным и переменным затратам [59]):

$$y = x_1 + x_2 .$$

Пусть начальные условия задачи: $y = 5$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Необходимо определить такие значения x_1^*, x_2^*, при которых y^* равно 10. Построим две линии уровня 5 и 10 соответственно (рис. 14), представляющие собой параллельные прямые. Точка А соответствует начальному условию задачи. Точки линии $x_2 = 10 - x_1$ обеспечат значение результирующей величины, равное 10. Точки B и C соответствуют случаям, когда искомое значение функции будет получено только за счет изменения x_2 и x_1 соответственно. Точки линии $x_2 = 10 - x_1$, принадлежащие отрезку BC, будут получены при увеличении аргументов функции (x_1^+, x_2^+), расположенные левее точки B – уменьшении аргумента x_1 и увеличения x_2 (x_1^-, x_2^+), а точки правее C – увеличении x_1 и уменьшения x_2 (x_1^+, x_2^-).

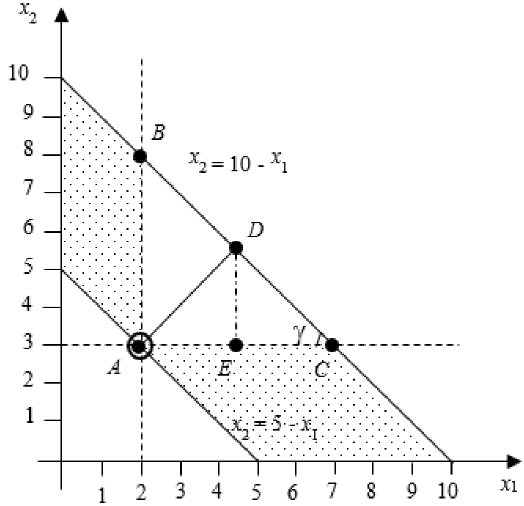


Рис. 14. Линии уровня 5 и 10

Кратчайшее расстояние из точки A до прямой $x_2 = 10 - x_1$ представляет собой длину перпендикуляра AD. Таким образом, при переходе из точки A в точку D изменение аргументов будет наименьшим. Изменение первого аргумента (Δx_1) равно длине отрезка AE, изменение второго аргумента (Δx_2) – отрезка DE ($AD^2 = AE^2 + DE^2$).

Задача оптимизации при этом может быть представлена в виде задачи квадратичного программирования [59, 71]:

$$g(\Delta x_1, \Delta x_2) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 \rightarrow \min$$
$$2 + \Delta x_1 + 3 + \Delta x_2 = 10$$

В результате решения задачи будут получены следующие значения приращений: Δx_1=2,5, Δx_2=2,5. Таким образом, новые величины аргументов:

$$x_1^* = 2 + 2,5 = 4,5\,;$$
$$x_2^* = 3 + 2,5 = 5,5\,.$$

Из рис. 14 можно увидеть, что угол ADE равен углу ECD. Поскольку тангенс угла равен угловому коэффициенту, то

$$\frac{AE}{DE} = -\rho$$

где ρ – коэффициент угла наклона прямой.

Для рассматриваемого примера ρ = – 1. Следовательно, для определения значений приращений с наименьшим изменением необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = 1; \\ 2 + \Delta x_1 + 3 + \Delta x_2 = 10. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение $\Delta x_1 = \Delta x_2$, получим:

$$2 + \Delta x_2 + 3 + \Delta x_2 = 10;$$
$$\Delta x_2 = 2,5;$$
$$\Delta x_1 = 2,5.$$

Рассмотрим случай при большем числе аргументов. Пусть уравнение зависимости имеет вид:

$$y = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... c_n x_n\,,$$

где c– числовые значения.

Тогда определение аргументов с наименьшим приращением будет выполнено путем решения системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_i}{\Delta x_k} = \dfrac{c_i}{c_k}, i = 1..n, i \neq k \\ c_1(x_1 + \Delta x_1) + c_2(x_2 + \Delta x_2) + ...c_n(x_n + \Delta x_n) = y^* \end{cases}$$

где k – номер аргумента, который принимается за базовый.

Выразив приращения аргументов, получим формулы расчета:

$$\Delta x_i = \frac{-\left(c_0 + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n - y^*\right)}{\sum_{t=1}^{n} c_t^2} \cdot c_i .$$

Тогда новые значения входных переменных:

$$x_i^* = x_i + \Delta x_i .$$

В качестве примера рассмотрим также задачу формирования рейтинга группы онлайновой социальной сети. Интегральная оценка вычисляется по формуле:

$$R_j = 0{,}701 x_{1j} + 0{,}24 x_{2j} + 0{,}059 x_{3j}$$

где x_{1j} – нормированное значение числа подписчиков j-той группы;

x_{2j} – нормированное значение показателя популярности j-той группы;

x_{3j} – нормированное значение показателя активности j-той группы.

Для выбранной группы значения нормированных величин равны: x_1 =0,313, x_2 =0,004, x_3 =0,029. Тогда интегральная оценка составит:

$$R = 0{,}701 \cdot 0{,}313 + 0{,}24 \cdot 0{,}004 + 0{,}059 \cdot 0{,}029 = 0{,}222$$

Пусть необходимо определить такие новые значения x, которые обеспечат значение рейтинговой оценки, равное 0,3, при минимальном изменении аргументов.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{0,701}{0,24} \\ \dfrac{\Delta x_3}{\Delta x_2} = \dfrac{c_3}{c_2} = \dfrac{0,059}{0,24} \\ 0,701(0,313 + \Delta x_1) + 0,24(0,004 + \Delta x_2) + 0,059(0,029 + \Delta x_3) = 0,3 \end{cases}$$

Решение системы: Δx_1=0,099, Δx_2=0,034, Δx_3=0,008. Таким образом,

$$x_1 = 0,313 + 0,099 = 0,412$$

$$x_2 = 0,004 + 0,034 = 0,038$$

$$x_3 = 0,029 + 0,008 = 0,037\,.$$

Кратная модель

При кратной зависимости модель имеет следующий вид (например, рентабельность определяется как отношение прибыли к затратам):

$$y = \frac{x_2}{x_1}\,.$$

Пусть начальные значения равны: y =2, x_1 =5, x_2 =10. Необходимо определить значения x_1^*, x_2^*, при которых значение функции равно 4.

Задача квадратичного программирования имеет вид:

$$g(\Delta x_1, \Delta x_2) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 \to \min$$

$$\frac{(10 + \Delta x_2)}{(5 + \Delta x_1)} = 4$$

Решение задачи: Δx_1= – 2,353, Δx_2 = 0,588, x_1^*=2,647, x_2^*=10,588.

На рис. 15 представлены линии уровня 2 и 4. Начальные значения аргументов образуют точку А. Наименьшее расстояние из этой точки до прямой $x_2 = 4x_1$ – это длина перпендикуляра АВ. Высота

ВС образует два подобных треугольника. Следовательно, справедливо соотношение:

$$\frac{AC}{BC} = -4 \cdot$$

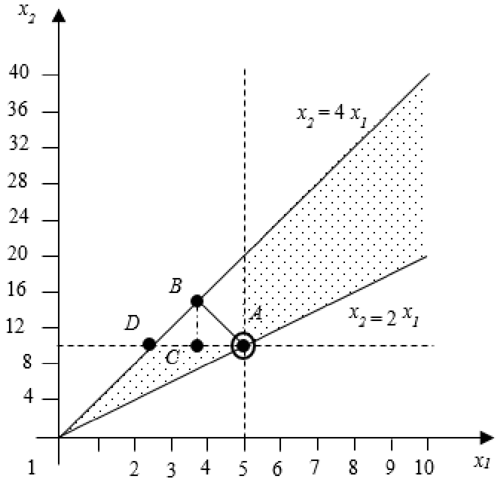


Рис. 15. Линии уровня 2 и 4

Тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = -4; \\ \dfrac{10 + \Delta x_2}{5 + \Delta x_1} = 4. \end{cases}$$

Решение системы: $\Delta x_1 = -2{,}353$, $\Delta x_2 = 0{,}588$.

Мультипликативная модель

Наконец, рассмотрим мультипликативную зависимость (например, выручка от продажи товара равна произведению цены и количества):

$$y = x_1 \cdot x_2 .$$

Примем начальные условия задачи: y =10, x_1 =5, x_2 =2. Необходимо определить значения x_1^*, x_2^*, при которых y^* равно 20.

Задача квадратичного программирования:

$$g(\Delta x_1, \Delta x_2) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 \rightarrow \min$$

$$\left(5 + \Delta x_1\right)\left(2 + \Delta x_2\right) = 20$$

Решение задачи: Δx_1=0,837, Δx_2=1,426, x_1^*=5,837, x_2^*=3,426.

Рассмотрим линии уровня 10 и 20 (рис.4.3). Точка А соответствует начальным значениям аргументов. Определение точки графика $x_2 = 20 / x_1$ таким образом, чтобы изменения аргументов были минимальны может быть выполнено с использованием уравнения касательной:

$$k = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

где x_0 – точка функции $f(x)$, к которой строится касательная.

Уравнение касательной к точке В будет иметь вид:

$$x_2 = \frac{-20}{5^2}(x_1 - 5) + \frac{20}{5} = -0,8x_1 + 8 \cdot$$

Поиск наименьших изменений аргументов для перехода в точку на прямой может быть выполнен с помощью решения системы уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \dfrac{y^*}{\left(x_1\right)^2} = 0,8; \\ 0,8\left(5 + \Delta x_1\right) + \left(2 + \Delta x_2\right) = 8. \end{cases}$$

Отношение приращений аргументов будет равно угловому коэффициенту в уравнении касательной (со знаком «минус»). Решение системы: Δx_1=0,976, Δx_2=1,22, x_1^*=5,976, x_2^*=3,22.

Далее необходимо построить уравнение касательной к новой точке (x_1^*=5,976, x_2^*=3,22) и выполнить поиск новой точки с минимальным изменением аргументов.

Таким образом, алгоритм нахождения решения в случае мультипликативной модели включает следующие шаги:

1. Установка начальных значений: номер итерации s = 0, $x_1(s) = x_1$, $x_2(s) = x_2$.

2. Построение уравнения касательной к точке $x_1(s)$ функции $x_2 = \frac{y^*}{x_1}$.

3. Поиск точки $x_1(s+1)$, $x_2(s+1)$ на касательной, до которой расстояние от исходной точки x_1 , x_2 будет минимальным.

4. Проверка выполнения условия останова: если изменение положения точки меньше заданной точности ε ($\delta = \sqrt{\left(x_1(s+1) - x_1(s)\right)^2 + \left(x_2(s+1) - x_2(s)\right)^2} < \varepsilon$), то алгоритм завершается, иначе осуществляется переход на шаг 2 ($s = s + 1$).

В таблице 4 представлены результаты выполнения итераций для рассматриваемого примера (ε = 0,003).

Таблица 4

Результаты выполнения итераций

i	$x_1(s)$	$x_2(s)$	$-f'(x_1(s))$	δ
0	5	2	0,8	–
1	5,976	3,22	0,56	1
2	5,807	3,441	0,593	0,278
3	5,844	3,423	0,586	0,041

Окончание таблицы 4

i	$x_1(s)$	$x_2(s)$	$-f'(x_1(s))$	δ
4	5,835	3,425	0,587	0,009
5	5,838	3,428	0,587	0,004
6	5,837	3,426	–	0,002

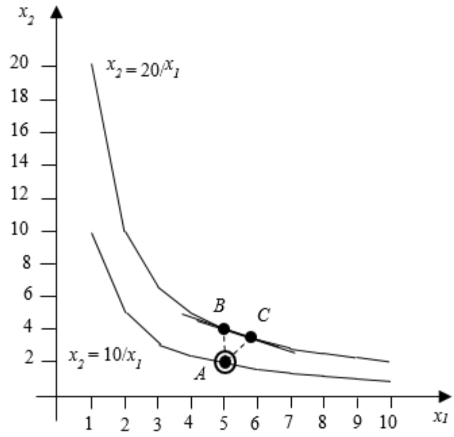


Рис. 16. Кривые уровня 10 и 20

§4.4. Обобщенный алгоритм решения обратной задачи при минимизации изменений аргументов на основе обратных вычислений

Рассмотрим общий алгоритм для решения обратных задач, который, как и в рассмотренных примерах, основан на выражении одного из аргумента и определении частных производных полученной функции. Значения частных производных в полученных на каждой из итераций точках используются в качестве отношений приращений аргументов. Графически такая операция заключается в определении кратчайшего расстояния до кривой заданного уровня. Так, на рис. 17 точка А соответствует исходным значениям прибыли (равна 2 д.е.) и затрат (равны 15 д.е.) (выходная величина – рентабельность). На рис. 17 также представлена линия заданного уровня рентабельности (0,2). На рис. 18 приведены варианты изменений аргументов, обеспечивающих значение рентабельности, равное 0,2. Точки, образующие эффективное по Парето множество, соединены линией. Решением задачи будет элемент, обеспечивающий минимальную сумму двух критериев. Решение задачи представлено точкой B, полученной путем пересечения линии заданного уровня рентабельности и перпендикуляра, опущенного из точки A на данную линию.

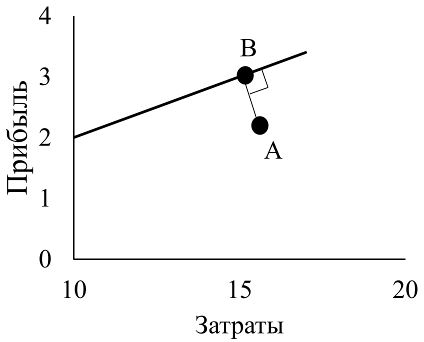


Рис. 17. Решение задачи путем пересечения перпендикуляра и линии уровня

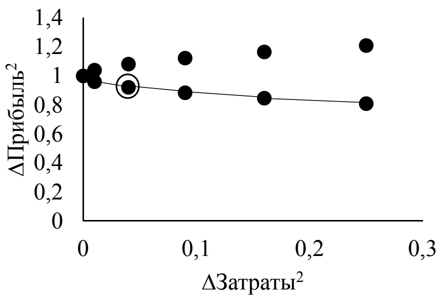


Рис. 18. Варианты изменений аргументов

Шаги алгоритма следующие (исходное значение переменных $\hat{x}=x$, номер итерации s = 1):

Шаг 1. Выражение k -го аргумента x_k через остальные аргументы

$$x_k(x) = \varphi_k(y^*; x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n)$$

Шаг 2. Вычисление частных производных по каждому из аргументов функции φ_k.

Шаг 3. Решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_i}{\Delta x_k} = -\dfrac{d\varphi_k(\hat{x})}{dx_i}, \ i = 1,\ldots,n; \ i \neq k \\ f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) = y^*. \end{cases} \quad (4.5)$$

Шаг 4. Проверка окончания работы алгоритма: если $s \geq 2$ и абсолютное изменение нормы приращений аргументов меньше заданной точности ε :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta x_{is} - \Delta x_{is-1}\right)^2} \leq \varepsilon ,$$

либо квадрат эвклидовой метрики (значение целевой функции) увеличился по сравнению с предыдущим шагом:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{is}{}^2 > \sum_{i=1}^{n} \Delta x_{is-1}{}^2$$

то алгоритм завершается. Иначе $\hat{x}_i = x_i + \Delta x_i$, $s = s + 1$, переход на шаг 1.

Следует отметить, что для разных значений k ($k = 1, \ldots n$) будут получены разные системы вида (4.5), а значит и разные решения, т. е. всего получим n решений $\Delta x^j = (\Delta x_1^j, \Delta x_2^j, \ldots, \Delta x_n^j), \ j = 1,\ldots,n$. В качестве оптимального можно принять решение с минимальной нормой $\Delta x_{opt} = \min\limits_{1 \le j \le n} \left\| \Delta x^j \right\|$.

Для решения рассмотренной задачи может быть также использован градиентный метод. Градиент представляет собой вектор частных производных, который показывает направление наибольшего возрастания функции. Соответственно антиградиент показывает направление наибольшего убывания функции. Основная идея заключается в изменении аргументов функции в соответствии со значениями элементов вектора градиента функции ограничения до достижения заданного значения (рис. 19).

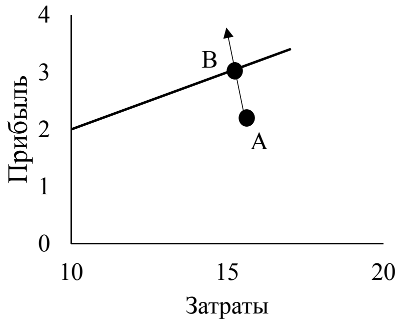


Рис. 19. Решение задачи путем движения вдоль градиента

Данный метод в отличие от рассмотренного выше не требует формирования функции зависимости между аргументами и, следовательно, может быть использован в тех случаях, когда выражение аргумента представляет сложность.

Решение обратной задачи при использовании вектора-градиента включает следующие шаги:

Шаг 1. Определение направления изменения параметров. Если результирующий показатель необходимо увеличить ($y^* > y_0$), то используются элементы вектора-градиента ($t = 1$), если уменьшить ($y^* < y_0$) – антиградиента ($t = -1$).

Шаг 2. Определить необходимые приращения аргументов Δx_i для достижения заданного значения функции y^* путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_\eta}{\Delta x_i} = \dfrac{t \cdot \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_\eta}}{t \cdot \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}; i = 1..n, i \neq \eta \\ f(x + \Delta x) = y^*. \end{cases}$$

Шаг 3. Определить новые значения аргументов функции:

$$x_i^* = x_i + \Delta x_i .$$

Движение к заданному значению функции также может выполняться пошагово. В этом случае алгоритм будет включать следующие шаги.

Шаг 1. Определение направления изменения параметров. Если результирующий показатель необходимо увеличить ($y^* > y$), то используются элементы вектора-градиента ($t = 1$), если уменьшить ($y^* < y$) – антиградиента ($t = -1$).

Шаг 2. Определить шаг изменения ограничения υ на основе заданного числа итераций ρ:

$$\upsilon = целое\left[\frac{(y - y^*)}{\rho}\right]$$, номер текущей итерации α=1.

Шаг 4. Изменить значение результирующего показателя на величину заданного шага:

$$y = y + \upsilon .$$

Шаг 5. Определить необходимые приращения аргументов Δx_i для достижения заданного значения ограничения y путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_\eta}{\Delta x_i} = \dfrac{t \cdot \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_\eta}}{t \cdot \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}; i = 1..n, i \neq \eta \\ f(x + \Delta x) = y. \end{cases}$$

В результате решения системы получим значения приращений аргументов Δx_i.

Шаг 6. Изменить значения аргументов функции:

$$x_i = x_i + \Delta x_i.$$

Шаг 7. Проверка окончания работы алгоритма: если $\alpha = \rho$, то работа алгоритма завершается, иначе $\alpha = \alpha + 1$, переход на шаг 4.

По сравнению с решением оптимизационных задач нелинейного программирования представленный подход является более простым в компьютерной реализации: решение задачи сводится к решению системы уравнений.

§4.5. Примеры решения обратных задач с помощью алгоритма на основе обратных вычислений

Рассмотрим использование представленных алгоритмов для формирования прибыли организации. Для решения обратной задачи были использованы данные ресторана быстрого питания о продукте «пшеничная лапша»: себестоимость, цена, общее значение спроса за неделю.

Прибыль (M) предприятия определяется как разница между доходом и затратами [72–74]:

$$M = Num\left(Price - C_{unit}\right), \tag{4.6}$$

где $Price$ – цена единицы продукта;
Num – количество проданного продукта;
C_{unit} – себестоимость единицы продукта.

Исходное значение прибыли от продажи товара рассматриваемого вида равно 4018 руб., цена 60 руб., количество – 98 шт., себестоимость равна 19 руб. Необходимо при минимальном изменении аргументов определить величину цены, себестоимости и количества таким образом, чтобы прибыль была равна 4100 руб.:

$$g(\Delta Num, \Delta Price, \Delta C_{unit}) = \Delta Num^2 + \Delta Price^2 + \Delta C_{unit}{}^2 \to \min \qquad (4.7)$$

$$M(\Delta Num, \Delta Price, \Delta C_{unit}) = (98 + \Delta Num) \cdot \left(60 + \Delta Price - 19 - \Delta C_{unit}\right) = 4100$$

Рассмотрим использованием градиентного метода для решения задачи. Элементы вектора-градиента (необходимо увеличить значение функции *M*) вычисляются по формуле:

$$\frac{dM}{dNum} = \left(Price - C_{unit}\right),$$

$$\frac{dM}{dPrice} = Num,$$

$$\frac{dM}{dC_{unit}} = -Num.$$

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta Price}{\Delta Num} = \dfrac{98}{(60-19)}; \\ \dfrac{\Delta Price}{\Delta C_{unit}} = \dfrac{98}{(-98)}; \\ \left(Num + \Delta Num\right) \cdot \left(Price + \Delta Price - C_{unit} - \Delta C_{unit}\right) = 4100. \end{cases}$$

Решение системы: ΔNum=0,160704, $\Delta Price =$ 0,384121, ΔC_{unit} = –0,384121.

Квадрат эвклидовой метрики (значение целевой функции $g(x)$) равен 0,320924.

На рис. 20 представлено решение оптимизационной задачи (4.7) с помощью пакета MathCad.

$$\Delta Num := 0 \qquad \Delta Price := 0 \qquad \Delta Cunit := 0$$

$$g(\Delta Num, \Delta Price, \Delta Cunit) := \Delta Num^2 + \Delta Price^2 + \Delta Cunit^2$$

Given

$$(98 + \Delta Num)\cdot(60 + \Delta Price - 19 - \Delta Cunit) = 4100$$

$$des := \mathrm{Minimize}(g, \Delta Num, \Delta Price, \Delta Cunit)$$

$$des = \begin{pmatrix} 0.163214 \\ 0.383586 \\ -0.383587 \end{pmatrix}$$

$$g\left(des_0, des_1, des_2\right) = 0.320917$$

Рис. 20. Решение задачи формирования прибыли с помощью пакета MathCad

Для использования алгоритма на основе построения кривой заданного уровня выразим из формулы (4.6) объем продаж с учетом заданного значения прибыли:

$$Num = \frac{4100}{\left(Price - C_{unit}\right)}.$$

Частные производные равны:

$$\frac{dNum}{dPrice} = -\frac{4100}{\left(Price - C_{unit}\right)^2} = -2,439$$

$$\frac{dNum}{dC_{unit}} = \frac{4100}{\left(Price - C_{unit}\right)^2} = 2,439$$

Тогда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta Price}{\Delta Num} = 2,439; \\ \dfrac{\Delta C_{unit}}{\Delta Num} = -2,439; \\ \left(Num + \Delta Num\right) \cdot \left(Price + \Delta Price - C_{unit} - \Delta C_{unit}\right) = 4100. \end{cases}$$

Решение системы: ΔNum=0,1577, $\Delta Price$=0,3847, ΔC_{unit}=–0,3847.

В табл. 5 представлены полученные значения с точностью $\varepsilon = 10^{-16}$ для последующих итераций при реализации алгоритма на языке VBA (для решения системы уравнения использован метод Ньютона с погрешностью 10^{-14}).

Таблица 5

Результаты выполнения итераций

r	ΔNum	$\Delta Price$	ΔC_{unit}	g	δ
1	0,157747	0,38475	–0,38475	0,32095	–
2	0,160479	0,384169	–0,384169	0,320925	$2,16 \cdot 10^{-5}$
3	0,160475	0,38417	–0,38417	0,320925	$2,18 \cdot 10^{-8}$

Рассмотрим теперь случай мультипликативной зависимости между аргументами. Валовая продукция (G) определяется как произведение численности работников (N), числа отработанных дней (D), часовой выработки (Pd) и числа отработанных часов (H) [75]:

$$G = N \cdot D \cdot Pd \cdot H.$$

Исходные данные: $N = 10$, $D = 26$, $Pd = 10$, $H = 8$. Валовая продукция равна 20800 д.е. Необходимо изменить значения Pd и H для достижения валовой продукции значения 25000 д.е. Задача оптимизации имеет вид:

$$\Delta Pd^2 + \Delta H^2 \to \min$$

$$10 \cdot 26 \cdot (Pd + \Delta Pd)(H + \Delta H) = 25000.$$

На рис. 21 представлено решение задачи в MathCad.

$$Pd := 10 \qquad H := 8$$

$$\Delta Pd := 0 \qquad \Delta H := 0$$

$$g(\Delta Pd, \Delta H) := \Delta Pd^2 + \Delta H^2$$

Given

$$(Pd + \Delta Pd)\cdot(H + \Delta H)\cdot 10\cdot 26 = 25000$$

$$des := \mathrm{Minimize}(g, \Delta Pd, \Delta H) = \begin{pmatrix} 0.769575 \\ 0.928286 \end{pmatrix}$$

$$g\left(des_0, des_1\right) = 1.453961$$

Рис. 21. Решение задачи формирования валовой продукции в MathCad

Рассмотрим использование градиентного подхода. Значения частной производной по первому и второму приращению аргумента:

$$\frac{\partial G}{\partial Pd} = 2080$$

$$\frac{\partial G}{\partial H} = 2600\cdot$$

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta Pd}{\Delta H} = \dfrac{2080}{2600}; \\ 10\cdot 26\cdot\left(Pd + \Delta Pd\right)\left(H + \Delta H\right) = 25000. \end{cases}$$

Решение системы: ΔPd =0,753, ΔH= 0,942.

Квадрат эвклидовой метрики (значение целевой функции g) равен 1,453961.

Рассмотрим решение задачи с использованием подхода на основе выражения переменных.

Выразим переменную *Pd*:

$$Pd = \frac{G}{N \cdot D \cdot H} = \frac{25000}{260 \cdot H}.$$

Частная производная равна:

$$\frac{\partial Pd}{\partial H} = \frac{1250}{13 \cdot H^2}$$

Система уравнений на первом шаге будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta H}{\Delta Pd} = \dfrac{1250}{13 \cdot 8^2}; \\ 10 \cdot 26 \cdot \left(Pd + \Delta Pd\right)\left(H + \Delta H\right) = 25000. \end{cases}$$

Решение системы: ΔPd =0,672, ΔH= 1,01.

В табл. 6 представлены полученные значения с точностью ε = 10^{-6} для последующих итераций.

Таблица 6

Результаты выполнения итераций для решения задачи формирования валовой продукции при выражении часовой выработки (метод на основе формирования линии уровня)

s	ΔPd	ΔH	δ
1	0,672129	1,009809	–
2	0,777883	0,921404	0,138
3	0,768872	0,928869	0,012
4	0,769635	0,928236	$9{,}9 \cdot 10^{-4}$
5	0,769571	0,92829	$8{,}4 \cdot 10^{-5}$
6	0,769576	0,928285	$7{,}1 \cdot 10^{-6}$
7	0,769576	0,928286	$6 \cdot 10^{-7}$

Квадрат эвклидовой метрики равен 1,453961.

В табл. 7 представлены полученные значения с точностью ε = 10^{-6} для последующих итераций в случае выражения величины *H* из уравнения.

Таблица 7

Результаты выполнения итераций для решения задачи формирования валовой продукции при выражении числа отработанных часов (метод на основе формирования линии уровня)

s	ΔPd	ΔH	δ
1	0,838214	0,871742	–
2	0,763788	0,933086	0,096
3	0,770066	0,927879	$8 \cdot 10^{-3}$
4	0,769534	0,92832	$6{,}9 \cdot 10^{-4}$
5	0,769579	0,928283	$5{,}8 \cdot 10^{-5}$
6	0,769575	0,928286	$4{,}9 \cdot 10^{-6}$
7	0,769575	0,928286	$4{,}2 \cdot 10^{-7}$

Квадрат эвклидовой метрики равен 1,453961.

§4.6. Минимизация суммы модулей аргументов

Сумма абсолютных значений приращений аргументов может быть рассмотрена как альтернатива евклидового расстояния и предполагает уменьшение влияния больших отклонений.

В случае использования суммы модулей аргументов задача определения приращений аргументов может быть представлена в виде [76]:

$$g(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + ... + |\Delta x_n| \to \min \quad (4.8)$$
$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) = y + \Delta y$$

где x_1, x_2, …, x_n – исходные значения аргументов;

$y + \Delta y$ – заданное значение функции;

n – число аргументов;

Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ – искомые приращения аргументов;

f – функция зависимости между аргументами и результирующим показателем.

Для решения данной задачи рассмотрим подход, который заключается в решении задачи линейного программирования при одном ограничении ($f(x + \Delta x) = y$).

В зависимости от вида модели и прироста результата у аргументов целевой функции (4.8) при раскрытии модуля будет либо положительный, либо отрицательный знак. Так, например, в случае аддитивной модели ($f(x) = x_1 + x_2$) прирост результата при меньшей суммы абсолютных изменений аргументов будет достигнут при положительных изменениях аргументов.

После раскрытия модуля в случае линейного ограничения ($f(x+\Delta x)=c_1(x_1+\Delta x_1)+c_2(x_2+\Delta x_2)+...+c_n(x_n+\Delta x_n)$) ($c$ – числовые значения при аргументах в ограничении) задача (4.8) представляет собой задачу линейного программирования [77]. Классическим методом её решения является симплекс-метод. Однако при единственном ограничении и равенстве числовых значений при аргументах в целевой функции единице задача может быть решена более простым методом. Её решение сводится к нахождению элемента с большим абсолютным числовым значением c при приросте аргумента в ограничении и решения уравнения относительно этого аргумента [78].

В случае, если таких максимальных значений несколько, то при решении задачи может быть выполнено либо равномерное изменение этих аргументов для достижение заданного значения результата, либо их изменение в соответствии с коэффициентами относительной важности, заданных экспертом, либо изменение одного из аргументов, выбранного случайным образом. При реализации программных систем решение уравнения выполняется с помощью классических методов нахождения корней (например, методом Ньютона), далее будет рассмотрено аналитическое решения таких задач.

В случае если ограничение имеет нелинейный вид, рассматриваемая задача относится к задачам нелинейного программирования. Для преобразования ограничения в линейный может быть использовано разложение в ряд Тейлора ($f(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \Delta x_i} \Delta x_i$).

Следовательно, в качестве числовых значений при приращения аргументах рассматривается значение частных производных ($c_i = \dfrac{df}{d\Delta x_i}$) в нулевой точке.

§4.7. Примеры решения обратных задач при минимизации суммы абсолютных изменений аргументов

Рассмотрим примеры решения задач при минимизации суммы модулей.

Объем доставки Q продукции в торговую точку складывается из объема доставки первого, второго и третьего вида продукции:

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3,$$

где Q_1, Q_2, Q_3 – объем доставки продукции первого, второго и третьего вида соответственно.

Начальные значения аргументов равны: Q_1=15 кг., Q_2=17 кг., Q_3=20 кг. Начальное значение результирующего показателя Q составляет 52 кг. Необходимо определить объем доставки продукции первого, второго и третьего вида таким образом, чтобы суммарный объем составил 60 кг. продукции.

Выполним решение обратной задачи с помощью обратных вычислений. Задача имеет вид:

$$\left|\Delta Q_1\right| + \left|\Delta Q_2\right| + \left|\Delta Q_3\right| \to \min$$

$$(Q_1 + \Delta Q_1) + \left(Q_2 + \Delta Q_2\right) + (Q_3 + \Delta Q_3) = 60$$

Числовые значения при ΔQ_1, ΔQ_2 и ΔQ_3 равны между собой. Рассмотрим случай, когда изменение приростов аргументов происходит равномерно.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = 1 \\ \dfrac{\Delta Q_1}{\Delta Q_3} = 1 \\ (15 + \Delta Q_1) + \left(17 + \Delta Q_2\right) + (20 + \Delta Q_3) = 60. \end{cases}$$

Решение системы: $\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \Delta Q_3 = 2{,}667$. Следовательно, $Q_1 = 15 + 2{,}667 = 17{,}667$, $Q_2 = 19{,}667$, $Q_3 = 22{,}667$.

На рис. 22 представлено решение задачи оптимизационной задачи в MathCad, которое соответствует представленному выше.

$$\Delta Q1 := 0 \quad \Delta Q2 := 0 \quad \Delta Q3 := 0 \quad Q1 := 15 \quad Q2 := 17 \quad Q3 := 20$$

$$f(\Delta Q1, \Delta Q2, \Delta Q3) := |\Delta Q1| + |\Delta Q2| + |\Delta Q3|$$

Given

$$(Q1 + \Delta Q1) + (Q2 + \Delta Q2) + (Q3 + \Delta Q3) = 60$$

$$\Delta Q := \mathrm{Minimize}(f, \Delta Q1, \Delta Q2, \Delta Q3)$$

$$Q1 := Q1 + \Delta Q_0 = 17.667$$

$$Q2 := Q2 + \Delta Q_1 = 19.667$$

$$Q3 := Q3 + \Delta Q_2 = 22.667$$

Рис. 22. Решение задачи при минимизации суммы абсолютных значений аргументов (аддитивная модель)

Рассмотрим случай мультипликативной зависимости между аргументами. Валовая продукция (G) определяется как произведение численности работников (N), числа отработанных дней (D), часовой выработки (Pr) и числа отработанных часов (H):

$$G = N \cdot D \cdot Pd \cdot H.$$

Исходные данные: $N = 10$, $D = 26$, $Pd = 10$, $H = 8$. Валовая продукция равна 20800 д.е. Необходимо изменить значения Pd и H для достижения валовой продукции значения 25000 д.е. При этом необходимо найти значения при минимальном суммарном абсолютном изменении аргументов. Задача оптимизации имеет вид:

$$|\Delta Pd| + |\Delta H| \to \min$$

$$10 \cdot 26 \cdot (Pd + \Delta Pd)(H + \Delta H) = 25000.$$

Значения частной производной по первому и второму приращению аргумента:

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta Pd} = 2080$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta H} = 2600.$$

Поскольку полученное значение больше для приращения второго аргумента, то осуществляется решение уравнения относительно этого аргумента:

$$\Delta H = 25000 / (10 \cdot 26 \cdot 10) - 8 = 1{,}615.$$

Тогда $H = 8 + 1{,}615 = 9{,}615$.

На рис. 23 представлено решение оптимизационной задачи в MathCad, которое соответствует полученному.

$$\Delta Pd := 0 \quad \Delta H := 0 \quad Pd := 10 \quad H := 8$$

$$f(\Delta Pd, \Delta H) := |\Delta Pd| + |\Delta H|$$

Given

$$10 \cdot 26 (Pd + \Delta Pd) \cdot (H + \Delta H) = 25000$$

$$\Delta Q := \mathrm{Minimize}(f, \Delta Pd, \Delta H)$$

$$Q1 := Pd + \Delta Q_0 = 10$$

$$Q2 := H + \Delta Q_1 = 9.615$$

Рис. 23. Решение задачи при минимизации суммы абсолютных значений аргументов (мультипликативная модель)

Представленный метод не требует использования симплекс-метода или методов нелинейной оптимизации и может быть использован при решении задач линейного программирования рассмотренного вида в других областях исследования. К недостаткам предложенного метода можно отнести необходимость вычисления частных производных функции в случае нелинейной зависимости между аргументами функции.

§4.8. Решение задач с учетом ограничений на величины аргументов

При решении задач могут быть наложены ограничения на значения аргументов. Ограничения на значения показателей могут быть определены областью их допустимых значений, особенностями ведения деятельности (например, количество используемых ресурсов предприятия не может быть больше наличного запаса), прогнозными значениями показателей, установленными экспертом и т. д.

Так, в случае минимизации суммы абсолютных значений аргументов задача оптимизации с учетом ограничений будет иметь вид:

$$\left|\Delta x_1\right| + \left|\Delta x_2\right| + \ldots \to \min$$

$$f(x + \Delta x) = y$$

$$l_i \le x_i + \Delta x_i \le h_i$$

где i – номер аргумента, на значение которого наложены ограничения ($i = 1..m$, m – число аргументов, на значения которых наложены ограничения);

l_i и h_i – нижняя и верхняя граница интервала, которому должны принадлежать значения i-го аргумента.

Для решения данной задачи рассмотрим алгоритм, который заключается в решении задачи линейного программирования и последующей корректировке решения в соответствии с установленными границами l_i и h_i.

Шаг 1. Решение задачи определения приращений Δx_i изменяемых аргументов таким образом, чтобы сумма их абсолютных значений была минимальна:

$$\left|\Delta x_1\right| + \left|\Delta x_2\right| + \ldots \to \min, \qquad (4.9)$$

$$f(x + \Delta x) = y.$$

Изменить значения аргументов на полученную величину приращений: $x_i = x_i + \Delta x_i$.

Шаг 2. Проверка соответствия изменяемых аргументов заданным ограничениям. Если все значения удовлетворяют ограничениям, то работа алгоритма останавливается. Если есть хотя бы один аргумент, не удовлетворяющий ограничениям, то ему присваивается значение ближайшей границы, и такой аргумент исключается из списка изменяемых аргументов. Если список изменяемых аргументов пуст, то работа алгоритма завершается.

В представленном алгоритме на шаге 1 происходит решение задачи (4.9), однако может быть рассмотрена минимизация суммы квадратов приращений и изменение приращений аргументов в соответствии с элементами вектора-градиента. Данный алгоритм позволит найти решение таких задач при наличии ограничений.

§4.9. Примеры решения обратных задач при наличии ограничений на значения аргументов функции

Рассмотрим решение задачи определения объема доставки (рис. 22). При этом для значений аргументов установлены следующие ограничения:

$$0 \le Q_1 \le 25$$
$$0 \le Q_2 \le 17{,}5$$
$$0 \le Q_3 \le 25.$$

Решение, полученное на рис. 21: $Q_1 = 15 + 2{,}667 = 17.667$, $Q_2 = 19.667$, $Q_3 = 22.667$.

Аргумент Q_2 не удовлетворяет ограничениям, присваиваем данному аргументу значение границы 17,5 (Q_2=17,5). В списке изменяемых аргументов остались Q_1 и Q_3.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta Q_1}{\Delta Q_3} = 1 \\ (17{,}667 + \Delta Q_1) + 17{,}5 + (22{,}667 + \Delta Q_3) = 60. \end{cases}$$

Решение системы: $\Delta Q_1 = \Delta Q_3 = 1{,}083$. Следовательно, $Q_1 = 17{,}667 + 1{,}083 = 18{,}75$, $Q_2 = 17{,}5$, $Q_3 = 22{,}667 + 1{,}083 = 23{,}75$. Решение соответствует решению, полученному с использованием программы MathCad (рис. 24).

$$\Delta Q1 := 0 \quad \Delta Q2 := 0 \quad \Delta Q3 := 0 \quad Q1 := 15 \quad Q2 := 17 \quad Q3 := 20$$

$$f(\Delta Q1, \Delta Q2, \Delta Q3) := |\Delta Q1| + |\Delta Q2| + |\Delta Q3|$$

Given

$$14 \le Q1 + \Delta Q1 \le 25 \quad 16 \le Q2 + \Delta Q2 \le 17.5 \quad 18 \le Q3 + \Delta Q3 \le 25$$

$$(Q1 + \Delta Q1) + (Q2 + \Delta Q2) + (Q3 + \Delta Q3) = 60$$

$$\Delta Q := \mathrm{Minimize}(f, \Delta Q1, \Delta Q2, \Delta Q3)$$

$$Q1 := Q1 + \Delta Q_0 = 18.75$$

$$Q2 := Q2 + \Delta Q_1 = 17.5$$

$$Q3 := Q3 + \Delta Q_2 = 23.75$$

Рис. 24. Решение задачи в MathCad

На рис. 25 представлено изменение значений аргументов в течение десяти итераций при решении задачи с использованием итерационной процедуры, представленной в статье [15]. Полученный результат соответствует решению на рис. 24.

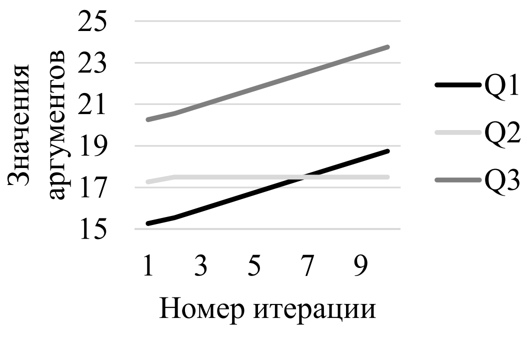


Рис. 25. Изменение значений аргументов
в течение десяти итераций

Рассмотрим теперь смешанную зависимость между аргументами функции. Прибыль (M) предприятия определяется как разница между доходом и затратами [20, 21]:

$$M = Num\,(Price - Cu),$$

где *Price* – цена единицы продукта;
Num – количество проданного продукта;
Cu– себестоимость единицы продукта.

Исходное значение прибыли от продажи продукции рассматриваемого вида равно 4018 д.е., цена единицы продукции 60 д.е., количество – 98 шт., себестоимость единицы продукции равна 19 д.е. Необходимо определить величину цены, себестоимости и количества таким образом, чтобы прибыль была равна 4500 д.е.

Ограничения для переменных:

$$80 \le Num \le 130,$$
$$50 \le Price \le 62{,}5,$$
$$18{,}5 \le Cu \le 25.$$

Вычислим значения частных производных функции-ограничения $f(\Delta Num, \Delta Price, \Delta Cu) = (98 + \Delta Num)\cdot(60 + \Delta Price - 19 - \Delta Cu) - 4500$:

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta Num} = 41,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \Delta Price} = 98,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \Delta Cu} = -98$$

Абсолютное значение частной производной больше для приращения цены и себестоимости, рассмотрим равномерное изменение этих показателей:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta Price}{\Delta Cu} = -1; \\ 98 \cdot \left(60 + \Delta Price - 19 - \Delta Cu\right) = 4500. \end{cases}$$

Решение системы: $\Delta Price$ = 2,459, ΔCu = – 2,459, *Price* = 62,459, *Cu* = 16,54. Значение себестоимости не удовлетворяет ограничению. Следовательно, *Cu* = 18,5,

$$\Delta Price = 4500 / 98 - 62{,}459 + 18{,}5 = 1{,}959.$$

Значение цены не удовлетворяет ограничению, следовательно,
Price = 62,5,
Num = 4500 / (62,5 – 18,5) = 102,273.

Полученное значение удовлетворяет ограничению, вычисления завершаются.

Решение также совпало с решением задачи в программе MathCad.

В табл. 8 представлены результаты, полученные при использовании рассмотренного алгоритма в случае минимизации суммы квадратов изменений аргументов.

Таблица 8

Значения аргументов при минимизации суммы квадратов изменений аргументов

Номер итерации	*Num*	*Price*	*Cu*
	98	60	19
1	99,02	62,223	16,777
2	99,667	63,65	18,5
3	102,273	62,5	18,5

Преимуществом предложенного алгоритма является то, что он не требует в отличие от подходов, рассмотренных в работах [34, 46], многократного проведения итераций, в ходе которых осуществляется последовательное изменение результирующего показателя до достижения заданного значения. В предложенном алгоритме число итераций определяется числом аргументов, не удовлетворяющих ограничениям.

ГЛАВА 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотренная в §4.1 задача по минимизации суммы квадратов изменений аргументов относится к задачам нелинейной оптимизации:

$$g(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2 \to \min$$
$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) = y + \Delta y$$

Следовательно, можно сделать вывод, что представленный в §4.1 алгоритм может быть использован для решения более широкого круга оптимизационных задач.

По виду целевой функции разделим задачи на две группы [79]:

1. Изменение аргумента функции на величину ϕ (относительно точки минимума) приведет к такому же изменению целевой функции, как и при изменении другого аргумента на величину ϕ. Это означает выполнение следующего соотношения:

$$g(x_1^* + \phi, x_2^*, ..., x_n^*) = g(x_1^*, x_2^* + \phi, ..., x_n^*) = g(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* + \phi), \quad (5.1)$$

где $(x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_n{}^*)$ – точка минимума; ϕ – некоторое число.

В этом случае вторые частные производные функции будут постоянны и равны между собой.

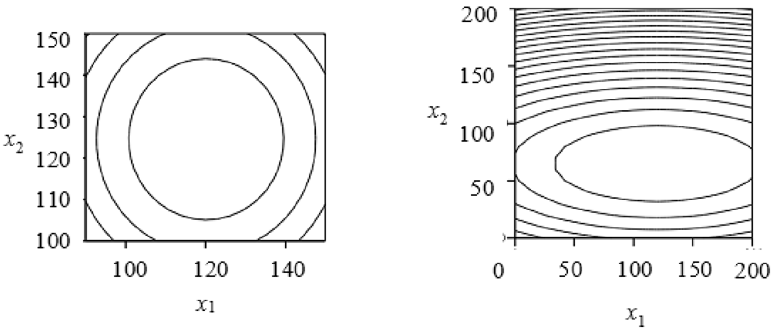
2. Условие для целевой функции (5.1) не выполняется. Частные производные функции – линейные одномерные функции (вторые частные производные постоянны).

На рис. 26 представлены линии уровня для первого и второго случая соответственно (a, b – параметры, a = 148,2, b = – 1,15, a_1 = 148,2, b_1 = –1,15, a_2 = 200, b_2 = –3).

По виду ограничения задачи также разделим на две группы:

1. Ограничение имеет вид линейного равенства.

2. Ограничение имеет нелинейный вид. Частные производные функции ограничения – одномерные линейные функции (вторые частные производные постоянны).



а б

Рис. 26. Контурный график: *а* – функция

$$f(x) = (a + b \cdot x_1 - 10)^2 + (a + b \cdot x_2 - 5)^2;$$

б – функция $f(x) = (a_1 + b_1 \cdot x_1 - 10)^2 + (a_2 + b_2 \cdot x_2 - 5)^2$

Рассмотрим применение подхода на основе обратных вычислений для решения представленных задач. Решение задачи будет включать два основных этапа: решение задачи безусловной оптимизации и последующая корректировка полученного решения x^* на величину Δx с учетом ограничения. Величина Δx определяется разностью $\Delta x = x - x^*$, где x – значение аргумента, являющееся решением задачи квадратичного программирования. При этом необходимо учесть влияние отдельных аргументов на изменение целевой функции.

Рассмотрим вариант, когда целевая функция удовлетворяет условию (5.1). В случае нелинейного ограничения не может быть выполнено выражение аргумента, а, следовательно, и использование метода, основанного на построении кривой заданной уровня, представленного в §4.1, поэтому предлагается использование градиентного метода решения задачи корректировки значений аргументов x^*.

Градиент представляет собой вектор частных производных, который показывает направление наибольшего возрастания функции. Соответственно антиградиент показывает направление наибольшего убывания функции. Суть предложенного метода заключается в том, чтобы отношение величин приращений аргументов соответствовало отношению элементов вектора-градиента, т. е. изменение аргументов происходило в направлении наибольшего возрастания / убывания функции-ограничения. Поскольку при движении в направлении градиента / антиградиента наблюдается наибольшее возрастание / убывание функции, то это говорит о том, что можно достигнуть её заданного значения при меньших изменениях аргументов. В свою очередь меньшее изменение аргументов приведет к меньшему отклонению значения целевой функции от величины, полученной путем решения задачи безусловной оптимизации. Так, например, для функции (5.1) в случае двух аргументов и их положительных приростов будет справедливо следующее соотношение: $g(x_1^*+\Delta x_1^{(1)},\ x_2^*+\Delta x_2^{(1)}) < g(x_1^*+\Delta x_1^{(2)},\ x_2^*+\Delta x_2^{(2)})$ при $\Delta x_1^{(1)}+\Delta x_2^{(1)} < \Delta x_1^{(2)}+\Delta x_2^{(2)}$.

На рис. 27 представлен пример решения задачи для функции с двумя аргументами. Начальная точка А получена путем решения задачи безусловной оптимизации, В – точка, полученная при движении в направлении антиградиента функции $f(x)$ до пересечения с кривой заданного уровня $\left(x_1 = \sqrt{\dfrac{3-0,5x_2^2}{2}} \right)$. Элементы вектора антиградиента функции $f(x)$ в точке А равны $(–4; –2)^{\mathrm{T}}$). Использование вектора антиградиента обусловлено тем фактом, что значение ограничения в точке А равно 4, что превышает заданное – 3, следовательно, значение функции необходимо уменьшить.

Однако направление градиента может изменяться при движении к заданному значению функции ограничения, поэтому использование значений элементов вектора, вычисленных в начальной точке, может привести к получению решения, значительно отличающемуся от оптимального. В этом случае движение к заданному значению ограничения может выполняться пошагово.

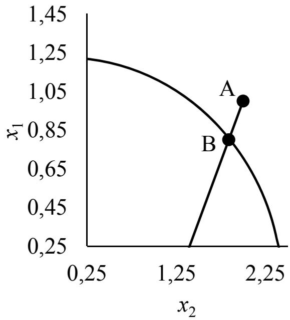


Рис. 27. Градиентный метод решения задачи

$$g(x) = \left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 2\right)^2$$

$$f(x) = 2x_1^2 + 0{,}5x_2^2 = 3$$

Таким образом, решение задачи при использовании вектора-градиента включает следующие шаги:

Шаг 1. Решение задачи безусловной оптимизации целевой функции $g\ (x)$. Полученное решение включает набор значений x^*. Подстановка полученных величин x^* в ограничение и проверка условия: если неравенство выполняется, то работа алгоритма завершается, иначе – переход на следующий шаг.

Шаг 2. Подстановка полученных значений x^* в ограничение $U^* = f\,(p^*)$. Проверка направления изменения аргументов: если $U^* > U$, то значение функции ограничения необходимо уменьшить (используются элементы вектора антиградиента) и $t = -1$, в противном случае – увеличить (используются элементы вектора градиента) и $t = 1$.

Шаг 3. Определить шаг изменения ограничения υ на основе заданного числа итераций ρ:

$$\upsilon = целое\left[\frac{(U - U^*)}{\rho}\right],$$ номер текущей итерации $\alpha = 1$.

Шаг 4. Изменить значение результирующего показателя на величину заданного шага:

$$U^* = U^* + \upsilon.$$

Шаг 5. Определить необходимые приращения аргументов Δx_i

для достижения заданного значения ограничения U^* путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_\eta}{\Delta x_i} = \dfrac{t \cdot \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_\eta}}{t \cdot \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}}; i = 1..n, i \neq \eta \\ f(x^* + \Delta x) = U^*. \end{cases}$$

В результате решения системы получим значения изменений аргументов Δx_i. В случае линейного ограничения полученное соотношение эквивалентно системе, представленной в работе [59], где приращения аргументов определялось исходя из критерия минимизации их суммы квадратов:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_\eta}{\Delta x_i} = \dfrac{k_\eta}{k_i}; i = 1..l, i \neq \eta \\ f(x^* + \Delta x) = U. \end{cases}$$

где k_i – коэффициенты при p_i в линейном уравнении ограничении.

Шаг 6. Изменить значения аргументов функции:

$$x_i^* = x_i^* + \Delta x_i.$$

Шаг 7. Проверка окончания работы алгоритма: если $\alpha = \rho$, то работа алгоритма завершается, иначе $\alpha = \alpha + 1$, переход на шаг 4.

Рассмотрим теперь случай, когда условие (5.1) для целевой функции не выполняется. Это означает, что изменение аргументов оказывает различное влияние на изменение целевой функции. Рассмотрен случай, когда частные производные целевой функции представляют собой линейные одномерные функции, чтобы учесть влияние аргументов на изменение целевой функции относительно точки минимума буду использованы значения вторых частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_\eta}{\Delta x_i} \dfrac{\dfrac{\partial^2 g(x)}{\partial x_\eta^2}}{\dfrac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2}} = \dfrac{t \cdot \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_\eta}}{t \cdot \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}}; i = 1..l, i \neq \eta \\ f(x^* + \Delta x) = U. \end{cases}$$

Решение задачи также может осуществляться итерационно в соответствии с представленным выше алгоритмом.

Так, рассмотрим использование данного алгоритма для решения следующей задачи квадратичного программирования:

$$g(x) = 4x_1^2 + x_2^2 \to \min$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

На рис. 28 показана контурная диаграмма и линия $x_1 = 3 - 2x_2$. Целевая функция $g(x)$достигает минимума в точке A (0;0).

Задача заключается в том, чтобы перейти из точки минимума A в точку на линии ограничения при минимальном изменении аргументов x_1 и x_2 и (рис. 27). Кратчайшее расстояние из точки A до прямой $x_2 = 10 - x_1$ представляет собой длину перпендикуляра AD.

Отношение приращений равно коэффициенту при переменной x_2 со знаком минус, а система для определения величин приращений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 2; \\ 0 + \Delta x_1 + 2\left(0 + \Delta x_2\right) = 3. \end{cases}$$

Решение системы: Δx_1=0,6, Δx_2=1,2.

Однако необходимо учесть отличие во влияниях аргументов на изменение функции $g(x)$. Для этого вычислим частные производные второго порядка (частные производные первого порядка будут представлять собой линейные функции, скорость их изменения и необходимо вычислить):

$$\frac{\partial^2 g(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = 8;$$

$$\frac{\partial^2 g(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 2.$$

Отношение частных производных равно 4. Выполним корректировку системы уравнений с учетом полученного значения отношения частных производных второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \cdot \dfrac{2}{8} = 2; \\ 0 + \Delta x_1 + 2\left(0 + \Delta x_2\right) = 3. \end{cases}$$

Решение системы: Δx_1=0,176, Δx_2=1,412 (точка С).

Полученные решения совпали с решением задачи квадратичного программирования с помощью пакета Mathcad.

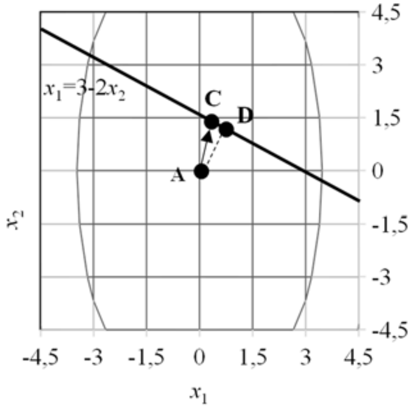


Рис. 28. Графическое представление задачи при различном влиянии аргументов

§5.1. Решение задачи оптимизации цены

Задаче оптимизации цены посвящено множество работ [80–86], поскольку данная характеристика является одной из определяющих для максимизации прибыли. В них приводятся оптимизационные модели с учетом специфики объекта исследования. Так, в статье [82] рассматривается задача максимизации выручки путем определения набора цен для конкурирующих товаров при условии равенства суммы цен группы товаров заданному значению. В статье [83] доход от продажи одежды класса «быстрая мода» складывается из выручки до последней недели продаж и выручки в последнюю неделю продаж, когда выполняется ликвидация коллекции по самой низкой цене. В работе [80] при максимизации прибыли учитываются цены производителей продукции. Также авторами рассматривается решение задачи оптимизации цены путем моделирования выбора пользователем товаров с учетом их взаимозаменяемости [81], установка отдельных цен в каждом канале продаж (веб-сайт, мобильное приложение, социальные сети) [84]. В статье [85] выполнен учет затрат на закупку и хранение товаров, в работе [86] исследованы клиенты двух типов: лояльные и нелояльные, а полочное пространство в магазине считается ограниченным.

Из представленных в литературе [81, 83–86, 87–88] исследований следует, что задача оптимизации цены часто представляется в виде задачи нелинейного программирования. Рассмотрим задачу оптимизации с одним ограничением в виде равенства [79, 89]. Предполагается линейная зависимость спроса от цены, параметры линейной регрессии для определения прогнозного значения еженедельного спроса определяются на основе имеющихся статистических данных о значениях цен и спроса за предыдущие периоды. Классическим методом оценки параметров регрессии является метод наименьших квадратов.

Определим следующие обозначения:

p_j – искомая цена на изделие в j-м периоде (j =1..n, n– число периодов);

p_i – искомая цена на изделие i-го вида (i=1..m, m – число видов изделий);

q_i – текущая цена на изделие i-го вида;

a_i и b_i – параметры линейной регрессии, используемые для определения спроса v_i на изделие i-го вида:

$$v_i = a_i + b_i \cdot p_i.$$

При этом предполагается отрицательная эластичность спроса, т.е. его уменьшение при росте цен, следовательно, на знак параметров накладываются следующие ограничения: $a_i \geq 0$ и $b_i \leq 0$.

Если рассматривается изделие одного вида, то параметры указываются без индексов: a и b.

c_j – планируемый объем выпуска изделия в j-м периоде;

P_1, P_2 – значение выручки, которое необходимо получить;
r – затраты ресурса на изготовление единицы изделия;
R – величина имеющегося запаса материального у предприятия;
h_i – объем единицы изделия i-го вида;
S – объем доставки.

Можно определить следующие варианты задач оптимизации цены p (в качестве финансового показателя деятельности предприятия используется выручка):

Вариант 1: Минимизация отклонения прогнозируемого спроса в j-м периоде от планируемого объема производства при наличии ограничения на объем используемого ресурса: объем используемого ресурса для производства изделия равен имеющемуся запасу [90]:

$$g(p)=\sum_{j=1}^{n}\left(a+b\cdot p_j-c_j\right)^2\to\min,$$

$$f(p)=\sum_{j=1}^{n}rv_j=\sum_{j=1}^{n}r\left(a+b\cdot p_j\right)\le R,\quad p_j\ge 0. \tag{5.2}$$

Вариант 2: Максимизация суммарной выручки (минимизация величины, полученной путем умножения выручки на –1), полученной в результате суммирования выручки от продажи i-го вида изделия, при наличии ограничения на объем доставки всех видов изделий:

$$g(p)=-\sum_{i=1}^{m}\left(a_i+b_i\cdot p_i\right)p_i\to\min,$$

$$f(p)=\sum_{i=1}^{m}h_iv_i=\sum_{i=1}^{m}h_i\left(a_i+b_ip_i\right)\le S,\quad p_i\ge 0. \tag{5.3}$$

Решение такой задачи при максимизации прибыли рассмотрено в работе [89].

Вариант 3: Минимизация отклонения прогнозируемого спроса в j-м периоде от планируемого объема производства изделия при наличии ограничения на значение суммарной выручки за n периодов, величина которой должна быть равна установленной:

$$g(p)=\sum_{j=1}^{n}\left(a+b\cdot p_j-c_j\right)^2\to\min,$$

$$f(p)=\sum_{j=1}^{n} p_j v_j=\sum_{j=1}^{n} p_j\left(a+b\cdot p_j\right)\geq P_1,\ \ p_j\geq 0. \qquad (5.4)$$

Вариант 4: Минимизация отклонения прогнозируемого спроса на изделие i-го вида от планируемого объема производства изделия данного вида при наличии ограничения на значение суммарной выручки по всем видам изделий, величина которой должна быть равна установленной:

$$g(p)=\sum_{i=1}^{m}\left(a_i+b_i\cdot p_i-c_i\right)^2\rightarrow \min,$$

$$f(p)=\sum_{i=1}^{m} p_i v_i=\sum_{i=1}^{m} p_i\left(a_i+b_i\cdot p_i\right)\geq P_1,\ \ p_i\geq 0. \qquad (5.5)$$

Вариант 5: Минимизация отклонения искомой цены от текущей (найти значение наиболее близкое к искомому) при наличии ограничения на суммарную выручку по всем видам изделий, величина которой должна быть равна заданному значению:

$$g(p)=\sum_{i=1}^{m}\left(p_i-q_i\right)^2\rightarrow \min,$$

$$f(p)=\sum_{i=1}^{m} p_i v_i=\sum_{i=1}^{m} p_i\left(a_i+b_i\cdot p_i\right)\geq P_2,\ \ p_i\geq 0. \qquad (5.6)$$

Рассмотрим решение представленных задач с помощью классических методов нелинейного программирования: штрафов и множителей Лагранжа, которые основаны на сведении задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации.

В методе штрафов формируется функция, включающая целевую функцию и штраф-функцию от ограничения и штрафного параметра. Так, для третьего варианта штрафная функция V будет иметь вид:

$$V(p,W)=\sum_{j=1}^{n}\left(a+b\cdot p_j-c_j\right)^2-W\cdot\ln\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\left(a+b\cdot p_j\right)-P_1\right).$$

Примем следующие значения исходных данных: $n = 3$, $a = 148{,}2$, $b = –1{,}15$, $c_1 = 10$, $c_2 = 5$, $c_3 = 11$, $P_1 = 3400$ руб. В табл. 9 представлены результаты, полученные с помощью метода штрафов (начальные значения аргументов равны 300).

Таблица 9

Результаты, полученные с помощью метода штрафов

Штрафной параметр W	Аргументы функции			Целевая функция $g(p)$
	p_1	p_2	p_3	
100	116,4	120,46	115,59	58,84
10	118,70	122,93	117,85	8,988
1	119,36	123,65	118,51	2,71
0,1	119,5	123,79	118,64	1,9
0,01	119,51	123,81	118,65	1,813
0,001	119,51	123,81	118,65	1,804

В методе множителей Лагранжа формируется функция L, включающая неизвестный параметр – множитель Лагранжа: определяется сумма целевой функции и ограничения, умноженного на множитель Лагранжа λ. Так, для варианта задачи (5.2) (r=30, R=600 функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L(p,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\left(a+b\cdot p_j-c_j\right)^2+\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}r\left(a+b\cdot p_j\right)-R\right).$$

Для решения задачи необходимо вычислить частные производные функции по переменным p, приравнять их нулю и решить систему уравнений:

$$\begin{cases}2{,}645p_1-34{,}5\lambda-317{,}86=0\\ 2{,}645p_2-34{,}5\lambda-329{,}36=0\\ 2{,}645p_3-34{,}5\lambda-315{,}56=0\\ \lambda\left(\left(148{,}2-1{,}15\cdot p_1\right)\cdot 30+\left(148{,}2-1{,}15\cdot p_2\right)\cdot 30+\left(148{,}2-1{,}15\cdot p_3\right)\cdot 30-600\right)=0\end{cases}$$

Для представленных задач (5.2)–(5.6) полученные системы для определения приращений аргументов с помощью обратных вычислений будут соответственно выглядеть следующим образом.

Определение приращений аргументов для решения задачи (5.2) выполняется с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta p_\eta}{\Delta p_j} = \dfrac{b \cdot r}{b \cdot r} = 1; j = 1..n, \eta \neq j \\ f(p^* + \Delta p) = \sum\limits_{j=1}^{n} r\left(a + b \cdot \left(p_j^* + \Delta p_j\right)\right) = R. \end{cases}$$

Выполнив решение системы, получим следующее выражение для расчета приростов аргументов функции:

$$\Delta p_j = \frac{\dfrac{\frac{R}{r} - n \cdot a}{b} - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^*}{n}, j = 1...n.$$

Система уравнений для решения задачи (5.3) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta p_\eta}{\Delta p_i} = \dfrac{h_\eta}{h_i}; i = 1..m, i \neq \eta \\ f(p^* + \Delta p) = \sum\limits_{i=1}^{m} h_i\left(a_i + b_i\left(p_i^* + \Delta p_i\right)\right) = S. \end{cases}$$

Решая систему, получим выражения для расчета аргументов:

$$\Delta p_\eta = \frac{S - \sum\limits_{j=1}^{n}\left(h_j\left(a_j + b_j p_j^*\right)\right),}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\dfrac{h_j^2 \cdot b_j}{h_\eta}\right)}$$

$$\Delta p_i = \frac{h_i}{h_\eta} \cdot \Delta p_\eta, i = 1..m, i \neq \eta.$$

Вычисление приращений аргументов для решения задачи (5.4) осуществляется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta p_\eta}{\Delta p_j} = \dfrac{\left(a+2bp_\eta^*\right)}{\left(a+2bp_j^*\right)}; j=1..n, j \neq \eta \\ f(p^*+\Delta p) = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(p_j+\Delta p_j\right)\left(a+b\cdot\left(p_j+\Delta p_j\right)\right) = P_1. \end{cases}$$

В данном и последующих вариантах ограничение имеет нелинейный вид, поэтому определение приращения базового аргумента может быть выполнено с помощью стандартных способов решения квадратного уравнения. Так, для текущего варианта уравнение будет иметь вид:

$$\Delta p_\eta^2\left(b\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a+2bp_i^*}{a+2bp_\eta^*}\right)^2\right)+\Delta p_\eta\left(a\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a+2bp_i^*}{a+2bp_\eta^*}\right)+2b\sum_{i=1}^{n}\left(p_2^*\frac{a+2bp_i^*}{a+2bp_\eta^*}\right)\right)+$$

$$+a\sum_{i=1}^{n}p_i^*+b\sum_{i=1}^{n}\left(p_i^*\right)^2-P_1=0.$$

Система уравнений для решения задачи (5.5) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta p_\eta \dfrac{b_\eta^2}{b_i^2}}{\Delta p_i} = \dfrac{\left(a_\eta+2b_\eta p_\eta^*\right)}{\left(a_i+2b_i p_i^*\right)}; i=1..m, i \neq \eta \\ f(p^*+\Delta p) = \sum\limits_{i=1}^{m}\left(p_i^*+\Delta p_i\right)\left(a_i+b_i\cdot\left(p_i^*+\Delta p_i\right)\right) = P_1. \end{cases}$$

Наконец, определение приращений аргументов функции для решения задачи (5.6) осуществляется путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta p_\eta}{\Delta p_i} = \dfrac{\left(a_\eta + 2b_\eta q_\eta\right)}{\left(a_i + 2b_i q_i\right)}; i = 1..m, i \neq \eta \\ f(p^* + \Delta p) = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(p_i^* + \Delta p_i\right)\left(a_i + b_i \cdot \left(p_i^* + \Delta p_i\right)\right) = P_2. \end{cases}$$

Можно сделать вывод, что в случае линейного ограничения могут быть получены аналитические формулы расчета приращений. При нелинейном виде ограничения (задачи (5.4) –(5.6)) для определения приращений аргументов возникает необходимость решения квадратного уравнения. В этом случае могут быть использованы классические методы нахождения корней (методы Ньютона, дихотомии, использование дискриминанта, и т.д.).

Для решения оптимизационной задачи были использованы данные, представленные в табл. 10.

Таблица 10

Исходные данные задачи

Показатель	Номер продукции i /номер периода j		
	1	2	3
Параметр линейной регрессии a	148,2	152,1	130,5
Параметр линейной регрессии b	–1,15	–1,21	–1,1
Затраты ресурса на единицу продукции r, г.	30	–	–
Планируемый объем производства, c, кг.	10	5	11
Объем единицы изделия, h, куб. м	0,2	0,4	0,5
Текущая цена продукции, q, руб.	80	75	83

Значения ограничений: R=600 г., S=60 куб. м, P_1= 3400 руб., P_2=12700 руб.

В табл. 11 представлено решение задач оптимизации (5.2) – (5.6) (число итераций ρ равно 1). В последнем столбце представлена разница полученного решения, с решением задачи с помощью математического пакета:

$$u = g(x) - g^*(x),$$

где g (x) – значение целевой функции, полученное путем решения

задачи с помощью обратных вычислений;
$g^*(x)$ – значение целевой функции, полученное путем решения задачи с использованием встроенной функции MathCad «Minimize».

Таблица 11

Решение задач оптимизации

Номер варианта	Значение целевой функции, $g(x)$	Цена продукции			Разница u
		p_1	p_2	p_3	
1	12	121,91	126,26	121,04	$-7 \cdot 10^{-12}$
2	–12800	71,38	76,74	76,68	$-5 \cdot 10^{-6}$
3	1,803	119,51	123,81	118,65	$-1 \cdot 10^{-5}$
4	4,434	119,1	120,49	107,64	$6 \cdot 10^{-6}$
5	30,245	77,18	72,68	78,89	$2 \cdot 10^{-3}$

Из табл. 11 можно увидеть, что решение третьей задачи также согласуется с решениями, полученными с помощью метода штрафов (табл. 9) и множителей Лагранжа. Решение для пятого варианта с помощью метода обратных вычислений имеет наименьшую точность. На рис. 29 представлен график изменения целевой функции данной задачи в зависимости от числа итераций ρ. Можно увидеть, что с увеличением числа итераций значение целевой функции уменьшается.

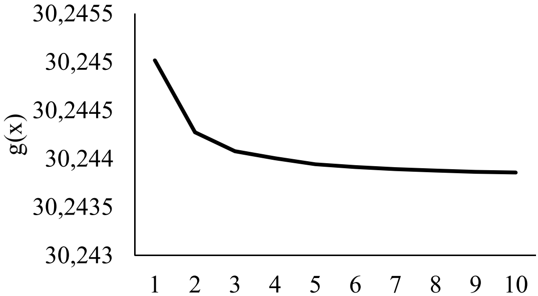


Рис. 29. Зависимость целевой функции от числа итераций

В качестве примера рассмотрим вариант (5.4). Подставив исходные числовые значения, получим следующую задачу:

$$g(p) = (148,2 - 1,15 \cdot p_1 - 10)^2 + (148,2 - 1,15 \cdot p_2 - 5)^2 + (148,2 - 1,15 \cdot p_3 - 11)^2 \to \min \qquad (5.7)$$

$$p_1(148,2 - 1,15 \cdot p_1) + p_2(148,2 - 1,15 \cdot p_2) + p_3(148,2 - 1,15 \cdot p_3) = 3400.$$

Решение задачи безусловной оптимизации: p^*_1=120,17 руб., p^*_2=124,52, p^*_3=119,3 (руб.). Подставляя значения в ограничение, получим:

$$f(p) = (148,2 - 1,15 \cdot 120,17) + (148,2 - 1,15 \cdot 124,52) + (148,2 - 1,15 \cdot 119,3) = 3137.$$

Поскольку значения необходимо увеличить, то используются величины градиента. Таким образом, система уравнений имеет вид (с шагом ρ, равным единице):

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \dfrac{-128,2}{-138,2}; \\ \dfrac{\Delta p_1}{\Delta p_3} = \dfrac{-128,2}{-126,2}; \\ (120,174 + \Delta p_1)(148,2 - 1,15 \cdot (120,174 + \Delta p_1)) + (124,52 + \Delta p_2) \times \\ \times (148,2 - 1,15 \cdot (124,52 + \Delta p_2)) + (119,3 + \Delta p_3)(148,2 - 1,15 \cdot (119,3 + \Delta p_3)) = 3400. \end{cases}$$

Решением системы уравнений будут значения приращений аргументов: $\Delta p_1 = -0,66$, $\Delta p_2 = -0,71$, $\Delta p_3 = -0,65$. Тогда решением задачи будут следующие значения аргументов: $p_i = p^*_i + \Delta p_i$: p_1 = 119,51, p_2 = 123,81, p_3 = 118,65.

На рис. 30 представлено решение задачи оптимизации (5.7) в MathCad.

$$ORIGIN := 1$$

$$p_3 := 0$$

$$g(p) := \left(148.2 - 1.15 \cdot p_1 - 10\right)^2 + \left(148.2 - 1.15 \cdot p_2 - 5\right)^2 + \left(148.2 - 1.15 \cdot p_3 - 11\right)^2$$

Given

$$p_1 \cdot \left(148.2 - 1.15 \cdot p_1\right) + p_2 \cdot \left(148.2 - 1.15 \cdot p_2\right) + p_3 \cdot \left(148.2 - 1.15 \cdot p_3\right) = 3400$$

$$des := \text{Minimize}(g, p)$$

$$des = \begin{pmatrix} 119.514224 \\ 123.810323 \\ 118.65472 \end{pmatrix}$$

$$g(p) = 5.842932 \times 10^4$$

Рис. 30. Решение задачи оптимизации цены в MathCad

§5.2 Решение задачи оптимизации закупок

В процессе своей деятельности предприятие сталкивается с необходимостью использования различных ресурсов, поэтому организация закупок оказывает значительное влияние на эффективность его работы. В условиях конкуренции и возможности выбора из множества предложений возникает необходимость в принятии решения относительно таких характеристик закупок как формируемый ассортимент продукции, перечень поставщиков и т. д. При этом финансовые ресурсы предприятия ограничены, в связи с чем возникает необходимость их рационального использования. Таким образом возникает задача оптимизации закупок, т. е. выбора среди существующих вариантов наилучшего, который бы максимизировал полезность закупок при имеющихся ресурсах. Для решения такого рода задач существует ряд моделей и методов, рассмотрим некоторые работы в области управления ресурсами предприятия.

Большое количество работ посвящено исследованию задач управления запасами, в которых в качестве целевой функции выступают издержки компании, связанные с доставкой, хранением и дефицитом. При постоянном спросе и интервале поставок может быть использована классическая модель Уилсона. В литературе также встречаются её модификации, учитывающие более сложные условия, например, наличие нескольких номенклатур [91–92], в статье [91] рассмотрен случай, когда спрос является случайным, в модели С. Чанга [93] поставщик предоставляет покупателю отсрочку платежа при большом объеме заказа. В работе [94] целевая функция включает семь видов затрат, связанных с закупкой, заказом, хранением, задержкой поставки, штрафами, эксплуатационными затратами. Для решения задач управления запасами используются классические оптимизационные методы (штрафов, множителей Лагранжа), теория нечетких множеств [95], теория массового обслуживания, преобразования на основе неравенства Коши [96] и т.д. Авторы [97] используют теорию игр для поиска форм кооперации в закупках между розничными торговцами с одним поставщиком, который предоставляет скидки в зависимости от объема заказа и предоставляет отсрочку платежей. Для более сложных задач, например, оптимизации многоуровневых систем управления запасами, применяется метод имитационного моделирования [98, 99], наиболее распространенными эвристическими методами оптимизации являются генетический алгоритм, симуляции отжига [100], муравьиной колонии [101]. Также существуют работы [102], в которых решение задачи происходит на основе гибридного алгоритма, сочетающего в себе имитационное моделирование и математическое программирование.

В задачах оптимизации ассортимента продукции осуществляется определение набора товаров исходя из их индивидуальных характеристик (маржинальная прибыль, цена, удельные издержки и т. д.). Так может быть рассмотрено определение количества выпускаемой продукции каждого вида таким образом, чтобы максимизировать суммарную прибыль при заданном спросе и времени работы оборудования. Также может учитывается специфика деятельности предприятия, например, в статье В.В. Манахова [103] продажа товаров осуществляется в кредит.

Рассмотрим применение рассмотренного алгоритма для решения задачи оптимизации закупок на основе данных кондитерской фирмы [104]. Организация формирует прогнозное значение ежедневного спроса на основе имеющихся статистических данных за предыдущие периоды. Необходимо осуществить закупку товаров таким образом, чтобы максимально удовлетворить спрос при ограниченном количестве денежных ресурсов. Исходными данными модели являются:

b_i – прогнозное значение среднего спроса на товар i ($i = 1,\ldots,n$, n – число наименований товаров);

a_i – цена закупки i-го товара;

A – величина бюджета закупок.

Полученная задача представляет собой задачу квадратичного программирования с линейным ограничением в виде равенства:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - b_i\right)^2 \to \min,$$

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A,$$

$$x_i \geq 0$$

В этой задаче может быть также учтена маржинальная прибыль от продажи продукции и добавлено ограничение достижения заданного её значения:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - b_i\right)^2 \to \min,$$

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A,$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = C.$$

Информация о трех кондитерских изделиях представлена в табл. 12. Бюджет закупок равен 3000 руб., заданное значение суммарной маржинальной прибыли – 1150 руб.

Таблица 12

Исходные данные

Показатель	**Номер изделия, *i***			
	1	**2**	**3**	**4**
Прогнозный спрос, кг	11	16	8	5
Цена закупки, руб. за кг	125	105	170	160
Маржинальная прибыль, руб.	50	40	40	55

Задачу квадратичного программирования с одним ограничением можно представить в следующем виде:

$$\left(x_1 - 11\right)^2 + \left(x_2 - 16\right)^2 + \left(x_3 - 8\right)^2 + \left(x_4 - 5\right)^2 \to \min$$

$$125x_1 + 105x_2 + 170x_3 + 160x_4 = 3000.$$

Минимумом целевой функции:

$$g(x) = \left(x_1 - 11\right)^2 + \left(x_2 - 16\right)^2 + \left(x_3 - 8\right)^2 + \left(x_4 - 5\right)^2$$

будут значения прогнозного спроса b: $x_1^* = 11$, $x_2^* = 16$, $x_3^* = 8$, $x_4^* = 5$. Таким образом, при решении задачи оптимизации закупок в качестве решения, полученного на первом шаге рассмотренного алгоритма, принимаются значения прогнозного спроса, т.е. отсутствует необходимость решения задачи безусловной оптимизации.

Поскольку в данном случае влияния аргументов на изменение функции одинаковы, то отношения вторых частных производных целевой функции будут равны 1.

С помощью обратных вычислений определим изменения значений объема заказа путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 125(11 + \Delta x_1) + 105(16 + \Delta x_2) + 170(8 + \Delta x_3) + 160(5 + \Delta x_4) = 3000; \\ \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_4} = \dfrac{a_1}{a_4} = 0,781; \\ \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_4} = \dfrac{a_{21}}{a_4} = 0,656; \\ \dfrac{\Delta x_3}{\Delta x_4} = \dfrac{a_3}{a_4} = 1,063. \end{cases}$$

Полученные значения приростов равны: $\Delta x_1 = -3,412$, $\Delta x_2 = -2,866$, $\Delta x_3 = -4,64$, $\Delta x_4 = -4,367$. Следовательно, решением задачи будут следующие величины (в кг.):

$$x_1 = 11 - 3,412 = 7,588;$$

$$x_2 = 16 - 2,866 = 13,134;$$

$$x_3 = 8 - 4,64 = 3,36;$$

$$x_4 = 5 - 4,367 = 0,633.$$

На рис. 31 представлено решение задачи в MathCad.

$$ORIGIN := 1$$

$$x_4 := 0$$

$$g(x) := (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 + (x_4 - 5)^2$$

Given

$$x_1 \cdot 125 + x_2 \cdot 105 + x_3 \cdot 170 + x_4 \cdot 160 = 3000$$

$$des := \mathrm{Minimize}(g, x)$$

$$des = \begin{pmatrix} 7.58811 \\ 13.134015 \\ 3.359825 \\ 0.632778 \end{pmatrix}$$

$$g(des) = 60.458717$$

Рис. 31. Решение задачи оптимизации закупок в MathCad

При полученных значениях аргументов суммарная маржинальная прибыль составит 1074 руб. Пусть необходимо найти решение, которое бы обеспечило значение прибыли, равное 1150 руб. Задача оптимизации имеет вид:

$$(x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 + (x_4 - 5)^2 \to \min$$

$$\begin{gathered} 125x_1 + 105x_2 + 170x_3 + 160x_4 = 3000, \\ 50x_1 + 40x_2 + 40x_3 + 55x_4 = 1150. \end{gathered} \qquad (5.8)$$

Задача (5.8) имеет два ограничения, для использования алгоритма на основе обратных вычислений необходимо выполнить их преобразование в одно ограничение. Для этого могут быть рассмотрены два способа:

1) замена переменных: выражение переменной из одного ограничения и подстановка её во второе ограничение и целевую функцию (основное преимущество – уменьшение размерности решаемой задачи);

2) формирование ограничения в виде суммы квадратов разницы между функцией ограничения и её заданным значением.

Первый способ обеспечивает линейный вид функции-ограничения, воспользуемся данным способом.

Выберем в первом уравнении переменную и выразим её:

$$x_3 = \frac{300 - \left(125x_1 + 105x_2 + 160x_4\right)}{170}.$$

Тогда задача оптимизации с одним ограничением будет иметь вид:

$$(x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + \left(\frac{3000 - (125x_1 + 105x_2 + 160x_4)}{170} - 8\right)^2 + (x_4 - 5)^2 \to \min,$$

$$50x_1 + 40x_2 + 40\left(\frac{3000 - (125x_1 + 105x_2 + 160x_4)}{170}\right) + 55x_4 = 1150.$$

Минимумом целевой функции $g(x)$ будут значения: $x_1^* = 7{,}584$, $x_2^* = 13{,}13$, $x_4^* = 0{,}627$.

Вторые производные целевой функции:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = 3{,}081, \ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 2{,}763, \ \frac{\partial^2 g}{\partial x_4^2} = 3{,}772.$$

Частные производные функции-ограничения

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 20{,}588, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 15{,}294, \ \frac{\partial f}{\partial x_4} = 17{,}353.$$

Тогда система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\dfrac{3{,}081}{2{,}763} = \dfrac{20{,}588}{15{,}294}; \\[2mm] \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_4}\dfrac{3{,}081}{3{,}772} = \dfrac{20{,}588}{17{,}353}; \\[2mm] 50\left(7{,}584 + \Delta x_1\right) + 40\left(13{,}13 + \Delta x_2\right) + \\ 40\left(\dfrac{3000 - 125\left(7{,}584 + \Delta x_1\right) - 105\left(13{,}13 + \Delta x_2\right) - 160\left(0{,}627 + \Delta x_4\right)}{170}\right) + \\ +55\left(0{,}627 + \Delta x_4\right) = 1150. \end{cases}$$

Решение системы: Δx_1 = 1,687, Δx_2 = 1,398, Δx_4 = 1,162. Таким образом, искомые значения аргументов будут равны: x_1 = 9,271, x_2 = 14,528, x_3 = 0,172, x_4 = 1,789. Значение целевой функции g равно 76,728.

Таким образом, решение оптимизационной задачи при наличии двух ограничений и использовании метода замены переменных включает следующие шаги.

Шаг 1. Преобразование задачи с двумя ограничениями в задачу с одним ограничением путем подстановки выраженной переменной x_k из ограничения f_1 в целевую функцию и функцию расчёта ограничения f_2:

$$x_k = h\left(x_l\right), l = 1..n, l \neq k$$

$$g(x_1, x_2, h(x_l), ..., x_n) \to \min,$$

$$f_2(x_1, x_2, h(x_l), ..., x_n) = U^*.$$

Шаг 2. Решение задачи безусловной оптимизации целевой функции *g,* сформированной на первом шаге. В результате будет получен набор значений $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$.

Шаг 3. Решение задачи с помощью обратных вычислений для определения приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ для достижения заданного значения результирующего показателя с учётом влияния аргументов на изменение целевой функции.

Шаг 3.1 Решение системы уравнений (η – номер аргумента, выбранного в качестве базового):

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_\eta}{\Delta x_i} \dfrac{\dfrac{\partial^2 g(0)}{\partial x_\eta^2}}{\dfrac{\partial^2 g(0)}{\partial x_i^2}} = \dfrac{\dfrac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_\eta}}{\dfrac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_i}}; i = 1..n, i \neq \eta \\ f_2(x^* + \Delta x) = U^*. \end{cases}$$

Решением системы будут величины аргументов $x_i^* = x_i^* + \Delta x_i$ ($i \neq k$).

Шаг 3.2 Определение значения k-го аргумента путем подстановки в функцию выражения: $x_k^* = h\left(x_l^* + \Delta x_l\right), l = 1..n, l \neq k$.

В табл. 13 представлены результаты, полученные с помощью метода штрафов (использован квадратичный штраф).

Таблица 13

Результаты решения задачи оптимизации закупок, полученные с помощью метода штрафов

Штрафной параметр R	Аргументы функции				Целевая функция $g(x)$
	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	11	16	8	5	0
100	8,391	14,209	− 0,23	3,114	81,3050
1000	9,65	14,452	0,301	1,407	76,401
10000	9,649	14,453	0,301	1,407	76,401

На рис. 32 представлено решение задачи в программе MathCad.

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$x_4 := 0$$

$$g(x) := (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 + (x_4 - 5)^2$$

Given

$$x_1 \cdot 125 + x_2 \cdot 105 + x_3 \cdot 170 + x_4 \cdot 160 = 3000$$

$$x_1 \cdot 50 + x_2 \cdot 40 + x_3 \cdot 40 + x_4 \cdot 55 = 1150$$

$$\text{des} := \text{Minimize}(g, x)$$

$$\text{des} = \begin{pmatrix} 9.658209 \\ 14.453586 \\ 0.304738 \\ 1.395575 \end{pmatrix}$$

$$g(\text{des}) = 76.400744$$

Рис. 32. Решение задачи оптимизации закупок в MathCad

Можно увидеть, что решение задачи, полученное с использованием метода на основе обратных вычислений, согласуется с решением с помощью метода штрафов и математического пакета.

ГЛАВА 6. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ АРГУМЕНТАМИ ФУНКЦИИ

§6.1. Решение обратной задачи в случае двух аргументов

В случае зависимости между аргументами функции (число аргументов равно двум) система в общем случае примет вид [105–106]:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f(x_1^*, x_2^*); \\ x_1^* = h(x_2^*). \end{cases}$$

где x^* – искомые значения аргументов ($x^* = x + \Delta x$, x – исходные значения аргументов, Δx – их приращение);
h – функция зависимости между аргументами;
y – исходное значение результирующей переменной;
Δy – изменение результирующей переменной.

Так, рассмотрим задачу формирования выручки:

$$r = p \cdot c,$$

где r – выручка;
p – количество;
c – цена.

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = x_1^* \cdot x_2^*; \\ x_1^* = h(x_2^*). \end{cases}$$

Рассмотрим гиперболическую зависимость между ценой и количеством проданного товара (рис. 32) вида:

$$p = 10 + \frac{10}{c}.$$

Исходные данные: r = 50 усл. ден. ед., p = 12,5 усл. ед., c = 4 усл. ед.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} p + \Delta p = 10 + \dfrac{10}{c + \Delta c}; \\ (p + \Delta p)(c + \Delta c) = 100. \end{cases}$$

Решением системы будут следующие значения (точка *B*): $\Delta c = 5$, $\Delta p = -1{,}3889$, $c = 9$, $p = 11{,}1111$.

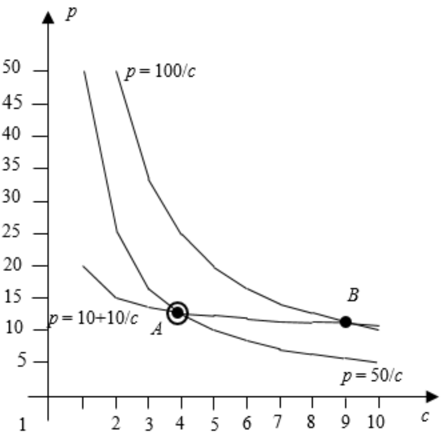


Рис. 33. Гиперболическая зависимость
между аргументами функции

При отсутствии решения (точка пересечения графика зависимости аргументов с линией заданного уровня отсутствует) может быть найдена точка $\tilde{x}_1$, в которой расстояние между функцией зависимости аргументов ($h(\tilde{x}_1)$) и линией уровня $x_2(x_1)$ минимально:

$$\left(h(\tilde{x}_1) - x_2(\tilde{x}_1)\right)^2 \to \min \cdot$$

Так, для исходных данных на рис. 33 задача имеет вид:

$$\left(\frac{100}{c} - 25 + 3c\right)^2 \to \min \cdot$$

Решением задачи является значение $c = 5{,}774$.

С помощью полученного значения $\tilde{x}_1$ можно сделать вывод о следующих показателях:

1) $x_2(\tilde{x}_1)$ – значение аргумента, которое при существующей зависимости обеспечивает решение, соответствующее целевой установке. Так, для задачи на рис. 33 C = 5,774, следовательно, p = 100/5,774 = 17,319.

2) $h(\tilde{x}_1)$ – значение аргумента, которое обеспечивает учёт существующей зависимости между аргументами функции. Так, для задачи на рис. 33 C = 5,774, следовательно, p = 25 – 3·5,774 = 7,678.

§6.2. Формирование маржинальной прибыли предприятия с учетом зависимости между доходами и расходами

Для решения обратной задачи были использованы данные ресторана быстрого питания о продукте «пшеничная лапша»: себестоимость, цена, общее значение спроса за неделю

Маржинальная прибыль (M) определяется как разница между доходом ($Revenue$) и затратами ($Costs$):

$$M = Revenue - Costs = Price \cdot Num - Num \cdot C_{unit}, \quad (6.1)$$

где $Price$ – цена единицы продукта;
Num – количество проданного продукта;

C_{unit} – себестоимость единицы продукта.

Себестоимость рассматриваемого изделия составляет 19 руб., цена равна 100 руб. Тогда зависимость доходов от расходов имеет вид:

$$Revenue = \frac{Price}{C_{unit}} Costs = 5,263 Costs$$

Данная формула получается путем выражения количества из формулы вычисления затрат и подстановки выражения в формулу расчета доходов:

$$Costs = Num \cdot C_{unit} \to Num = \frac{Costs}{C_{unit}},$$

$$Revenue = Price \cdot Num = Price \frac{Costs}{C_{unit}} \cdot$$

Начальные значения доходов и расходов (за неделю): $Revenue = 4050$ руб., $Costs = 855$ руб.

Прибыль составляет 3195 руб. Необходимо определить величины доходов и расходов, обеспечивающих прибыль равную 3500 руб.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{(Revenue + \Delta Revenue)}{(Costs + \Delta Costs)} = 5,263; \\ (Revenue + \Delta Revenue) - (Costs + \Delta Costs) = 3500. \end{cases}$$

Решение системы: $\Delta Revenue = 271$, $\Delta Costs = -33,98$.

На рис. 34 представлена графическая интерпретация задачи и отображены следующие линии: начального уровня прибыли (3195 руб.), заданного уровня прибыли (3500 руб.) и зависимость доходов от расходов. Точка пересечения линии заданного уровня прибыли и линии зависимости доходов от расходов является решением задачи.

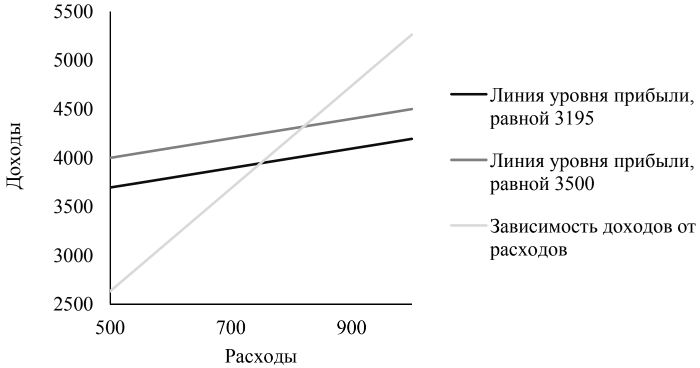


Рис. 34. Графическая интерпретация задачи

§6.3. Решение обратной задачи при числе аргументов больше двух

При числе аргументов больше двух может быть рассмотрена задача с учётом коэффициентов относительной приоритетности либо минимизацией изменения аргументов. Так, для случая минимизации суммы квадратов изменений аргументов задача будет представлена в виде:

$$\begin{aligned} &g(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2 \to \min \\ &f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) = y + \Delta y \\ &x_k + \Delta x_k = h\left(x_l + \Delta x_l\right) \end{aligned} \qquad (6.2)$$

где k, l – индексы аргументов, между которыми существует зависимость.

В §5.2 представлен алгоритм решения оптимизационной задачи при наличии двух ограничений. Для того, чтобы предложенный алгоритм можно было использовать для решения задачи (6.2), необходимо выполнить его модификацию. Решение обратной задачи при наличии зависимости между аргументами функции с помощью алгоритма на основе обратных вычислений будет включать следующие шаги.

Шаг 1. Преобразование задачи (6.2) путем подстановки уравнения зависимости между аргументами в целевую функцию и функцию расчёта заданного значения результирующего показателя:

$$g(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \left(h(x_r + \Delta x_r) - x_h\right)^2 + \Delta x_r^2 ... + \Delta x_n^2 \to \min,$$

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, h(x_r + \Delta x_r), x_r + \Delta x_r, ..., x_n + \Delta x_n) = y + \Delta y.$$

Шаг 2. Решение задачи безусловной оптимизации целевой функции. В результате будет получен набор значений $\Delta\widehat{x}_1, \Delta\widehat{x}_2, ..., \Delta\widehat{x}_n$.

Шаг 3. Решение задачи с помощью обратных вычислений для определения приращений $\Delta x_1^*, \Delta x_2^*, ..., \Delta x_n^*$ для достижения заданного значения результирующего показателя с учётом влияния аргументов на изменение целевой функции.

Шаг 3.1. Решение системы уравнений ($\widehat{x} = x$, η – номер аргумента, выбранного в качестве базового):

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x_\eta^*}{\Delta x_i^*} \dfrac{\dfrac{\partial^2 g(0)}{\partial \Delta x_\eta^2}}{\dfrac{\partial^2 g(0)}{\partial \Delta x_i^2}} = \dfrac{\dfrac{\partial f(\widehat{x} + \Delta\widehat{x})}{\partial x_\eta}}{\dfrac{\partial f(\widehat{x} + \Delta\widehat{x})}{\partial x_i}}; i = 1..n, i \neq \eta \\ f(x + \Delta\widehat{x} + \Delta x^*) = y^*. \end{cases}$$

Путем подстановки в функцию f выраженных значений приращений, могут быть получены аналитические выражения для определения искомых значений. В случае нелинейной зависимости задача определения корня функции может быть решена классическими методами (Ньютона, дихотомии и т.д.).

Решением задачи будут величины приращений Δx_i^*, общее изменение аргументов составит: $\Delta x_i = \Delta x_i^* + \Delta\widehat{x}_i$.

При формировании системы уравнений также может быть использован подход, описанный в §4.1 и основанный на выражении одного из аргументов и построении кривой заданного уровня.

§6.4. Формирование маржинальной прибыли предприятия с учётом зависимости объема продаж от цены

Рассмотрим задачу формирования маржинальной прибыли (6.1).

Задача определения изменений аргументов функции маржинальной прибыли при минимизации их суммы квадратов может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} & g(\Delta N, \Delta P, \Delta C) = \Delta P^2 + \Delta N^2 + \Delta C^2 \to \min \\ & (N + \Delta N) \cdot (P + \Delta P - C - \Delta C) = 3500, \\ & N + \Delta N = 148{,}2 - 1{,}15 \cdot (P + \Delta P). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Подставив исходные значения переменных (N = 45 шт., P = 90 руб., C = 19 руб.), получим следующее решение задачи с помощью пакета Mathcad (встроенной функции Minimize) (рис. 34): ΔN = 2,065, ΔP = –2,056, ΔC = – 5,422. Квадрат эвклидовой метрики (значение функции g) при этом равен 37,889.

$$\Delta P := 0 \quad \Delta N := 1 \quad \Delta C := 1$$

$$N := 45 \quad P := 90 \quad C := 19$$

$$g(\Delta N, \Delta P, \Delta C) := (\Delta N)^2 + (\Delta P)^2 + (\Delta C)^2$$

Given

$$(N + \Delta N)\cdot(P + \Delta P - C - \Delta C) = 3500$$

$$N + \Delta N = 148.2 - 1.15\cdot(P + \Delta P)$$

$$des := \mathrm{Minimize}(g, \Delta N, \Delta P, \Delta C)$$

$$des = \begin{pmatrix} 2.065 \\ -2.056 \\ -5.422 \end{pmatrix}$$

$$g\left(des_0, des_1, des_2\right) = 37.889$$

Рис. 35. Решение обратной задачи в MathCad
при наличии зависимости между аргументами функции

В табл. 14 представлено решение задачи (6.3) с использованием метода штрафов. Модифицированная функция будет иметь вид:

$$V(\Delta N, \Delta P, \Delta C, W1, W2) = \Delta P^2 + \Delta N^2 + \Delta C^{\,2} + W1 \cdot$$

$$\left((N + \Delta N) \cdot (P + \Delta P - C - \Delta C) - 3500 \right)^2 +$$

$$+W2 \cdot \left(N + \Delta N - \left(148{,}2 - 1{,}15 \cdot \left(P + \Delta P \right) \right) \right)^2 .$$

Таблица 14

Результаты, полученные с помощью метода штрафов

Штрафной параметр *W1*	Штрафной параметр *W2*	Аргументы функции			Целевая функция *g*
		ΔN	ΔP	ΔC	
0,001	0,001	2,106	1,344	–1,349	8,061
0,01	0,01	2,293	1,445	–1,494	9,581
0,1	0,1	2,298	1,262	–1,728	9,863
1	1	2,211	0,073	–3,06	14,26
10	10	0,879	–0,247	–5,534	31,464
100	100	0,743	–0,844	–6,357	41,672
1000	1000	1,198	–1,297	–6,057	39,801
10000	10000	1,849	–1,868	–5,567	38,004
100000	100000	1,921	–1,932	–5,524	37,942
1000000	1000000	1,936	–1,944	–5,514	37,933

Рассмотрим использование предложенного алгоритма на основе обратных вычислений для решения задачи формирования прибыли (ε = 0,1). Преобразованная задача имеет вид:

$$\Delta P^2 + \left(-0{,}3 - 1{,}15 \Delta P \right)^2 + \Delta C^2 \to \min,$$

$$\left(148{,}2 - 1{,}15 \cdot \left(P + \Delta P \right) \right) \cdot (P + \Delta P - C - \Delta C) = 3500.$$

На первом шаге осуществляется безусловная оптимизация целевой функции. Полученные значения изменений: $\Delta \overset{\frown}{P} = -0{,}149$, $\Delta \overset{\frown}{C} = 0$.

Вычислим необходимые показатели для формирования системы уравнений.

Вторые частные производные целевой функции будут равны:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \Delta P^2} = 4{,}645, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \Delta C^2} = 2 \cdot$$

Частные производные функции ограничения:

$$\frac{\partial f(P + \Delta \widehat{P})}{\partial P} = -36{,}607, \quad \frac{\partial f(C + \Delta \widehat{C})}{\partial C} = -44{,}871 \cdot$$

Тогда полученная система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta P^*}{\Delta C^*} \dfrac{4{,}645}{2} = \dfrac{-36{,}607}{-44{,}871}; \\ \left(148{,}2 - 1{,}15 \cdot \left(P + \Delta \widehat{P} + \Delta P^*\right)\right) \cdot (P + \Delta \widehat{P} + \Delta P^* - C - \Delta C^*) = 3500. \end{cases}$$

Решением системы уравнений будут значения изменений аргументов: ΔP^* = – 1,905, ΔC^*= – 5,424. Значение целевой функции составляет 38,889.

Таким образом, решением задачи будут величины приращений:

$$\Delta P = \Delta \widehat{P} + \Delta P^* = -2{,}054,$$

$$\Delta C = \Delta \widehat{C} + \Delta C^* = -5{,}424,$$

$$\Delta N = 148{,}2 - 1{,}15 \cdot (P + \Delta \widehat{P} + \Delta P^*) - N = 2{,}062 \cdot$$

Полученные значения соответствуют решению задачи помощью программы Mathcad.

Также были рассмотрены случаи нелинейной зависимости между показателями:

1) степенная: $N = 1735518 \cdot P^{-2{,}359}$;

2) логарифмическая: $N = 507{,}858 - 103{,}07 \cdot \ln\left(P\right)$;

3) гиперболическая: $N = -58{,}8 + \dfrac{9199{,}99}{P} \cdot$

В табл. 15 представлены результаты решения задачи формирования прибыли при нелинейной зависимости объема продаж от цены (результат получен за одну итерацию). В последнем столбце указана величина u – разность между значением целевой функции g, полученной при решении задачи с помощью метода на основе обратных вычислений и значением этой функции при решении задачи с использованием пакета Mathcad.

Результаты свидетельствует о соответствии решения, полученного с помощью обратных вычислений, решению оптимизационной задачи с использованием стандартной функции.

Таблица 15

Результаты решения задачи формирования прибыли при нелинейной зависимости

Вид зависимости	ΔN	ΔP	ΔC	$g(\Delta N, \Delta P, \Delta C)$	u
Степенная	2,358	– 3,959	–6,859	68,231	0,0001305
Логарифмическая	2,125	–2,635	–5,905	46,33	0,001322
Гиперболическая	2,2	–3,208	–6,36	55,581	0,0007084

ГЛАВА 7. ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассматривая подход к решению обратных задач при минимизации суммы квадратов изменений аргументов (§4.1), можно отметить, что при линейной функции ограничения могут быть получены аналитические формулы, которые для двух представленных подходов будут идентичны. При этом обеспечивается высокое соответствие полученного с помощью данных методов решения решению задачи с помощью математических пакетов. Однако при нелинейных ограничениях были выявлены следующие недостатки методов [107]:

1. Для некоторых функций была значительная разница между полученным решением и оптимальным, либо решение не было найдено (например, направление вектора градиента в исходной точке не позволяет достичь заданного значения функции ограничения).

2. Требуется многократное решение системы уравнений, и, соответственно, реализации соответствующих численных методов (например, использование метода Ньютона), что усложняет процесс поиска решения, а также приводит к увеличению времени решения задачи.

В качестве примера можно привести формирование суммарной маржинальной прибыли y при квадратичной функции зависимости маржинальной прибыли продукции i-го вида продукции от установленной цены x_i. Функция зависимости имеет вид (исходные значения цены: x_1=4 д.е., x_2=2,7 д.е., x_3=1,5 д.е.):

$$y=\left(120-\left(x_1-9\right)^2\right)+\left(140-\left(x_2-10\right)^2\right)+\left(150-\left(x_3-11\right)^2\right).\qquad(7.1)$$

Необходимо определить изменения Δx, обеспечивающие суммарное значение маржинальной прибыли, равное 400 д.е.

Решение задачи в MathCad представлено на рис. 36.

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$\Delta x_3 := 0$

$g(\Delta x) := \left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta x_2\right)^2 + \left(\Delta x_3\right)^2$

Given

$120 - \left(4 + \Delta x_1 - 9\right)^2 + 140 - \left(2.7 + \Delta x_2 - 10\right)^2 + 150 - \left(1.5 + \Delta x_3 - 11\right)^2 = 40$

$des := \mathrm{Minimize}(g, \Delta x) = \begin{pmatrix} 3.78209 \\ 5.521852 \\ 7.185971 \end{pmatrix}$

$g(des) = 96.433234$

Рис. 36. Решение задачи формирования маржинальной прибыли в MathCad

Результаты применения градиентного метода, а также использования стандартной функции математического пакета, представлены в табл. 16. Можно отметить отличие в значениях целевой функции более чем в два раза.

Таблица 16

Решение задачи формирования маржинальной прибыли

Метод	Δx_1	Δx_2	Δx_3	$f(\Delta x)$
Градиентный	6,218	9,078	11,814	260,647
Использование функции MathCad	3,782	5,522	7,186	96,433

Таким образом, выявленные недостатки свидетельствуют о целесообразности разработки алгоритмов, отличающихся от известных более простой компьютерной реализацией и более высокой точностью решения задачи. В связи с этим была выполнена разработка на основе существующих алгоритмов, использующих аппарат обратных вычислений, итерационных алгоритмов решения оптимизационной задачи. Это позволит упростить процедуру реализации методов, повысить точность решения и расширить круг решаемых задач.

Исходные данные алгоритмов: начальные значения аргументов x, заданное значение результирующего показателя $y+\Delta y$, α – некоторое малое положительное число, обеспечивающее движение по направлению к заданному значению ограничения $y+\Delta y$.

Итерационный поиск на основе градиентного метода может быть представлен в следующем виде:

Шаг 1. Используя исходные данные, вычислить величину функции ограничения $f(x)$ и сравнить с заданным значением $y + \Delta y$:

Если $f(x) < y + \Delta y$, то изменение аргументов необходимо выполнить в направлении увеличения величины функции ограничения (направлении вектора-градиента): $t = 1$.

Если $f(x) > y + \Delta y$, то изменение аргументов необходимо выполнить в направлении уменьшения величины функции ограничения (направлении вектора-антиградиента): $t = -1$.

Шаг 2. Определить абсолютную разницу между величиной функции ограничения и заданным значением $y+\Delta y$:

$$d_0 = \left| f(x) - y - \Delta y \right|.$$

Шаг 3. Определить новые значения аргументов путем движения в сторону градиента/антиградиента:

$$x_i^* = x_i + t \cdot \alpha \cdot \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i}, \qquad (7.2)$$

где $i = 1..n$, n – число аргументов.

Шаг 4. Вычислить значение функции ограничения $f(x_i^*)$ и отклонение d_1 от заданного значения $y + \Delta y$.

Проверка: если $d_1 > d_0$, то работа алгоритма завершается. Иначе $d_0 = d_1$, $x = x^*$, переход на шаг 3.

Решением задачи будут значения x.

Алгоритм на основе формирования линии заданного уровня включает следующие шаги (k – номер выражаемой переменной, ε – заданная точность, s – номер реализации):

Шаг 1. Установить начальные значения переменных: $s = 0$, $\hat{x}=x$.

Из функции ограничения $f(x)$ выразить k-ую переменную:

$$x_k = q(x_l), l \neq k.$$

Используя исходные данные, вычислить величину ограничения $f(x)$ и сравнить с заданным значением $y + \Delta y$:

Если $f(x) < y + \Delta y$, то изменение аргументов необходимо выполнить в направлении увеличения величины функции ограничения (направлении вектора-градиента): $t = 1$.

Если $f(x) > y + \Delta y$, то изменение аргументов необходимо выполнить в направлении уменьшения величины функции ограничения (направлении вектора-антиградиента): $t = -1$.

Шаг 2. Определить абсолютную разницу между величиной функции ограничения и заданным значением $y+\Delta y$:

$$d_0 = \left| f\left(x\right) - y - \Delta y \right|.$$

Шаг 3. Определить значение частных производных функции q:

$$r_i = \frac{-\partial q\left(x_i\right)}{\partial x_i}.$$

Шаг 4. Определить новые значения аргументов:

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k + t \cdot \alpha, \\ x_i^* &= x_i + t \cdot \alpha \cdot r_i, i \neq k. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Шаг 5. Вычислить значение функции ограничения $f(x_i^*)$ и отклонение d_1 от заданного значения $y + \Delta y$.

Проверка: если $d_1 > d_0$, то переход на шаг 6. Иначе $d_0 = d_1$, $x = x^*$, переход на шаг 4.

Шаг 6. Вычисление значения целевой функции: $s=s+1$, $g_s=g(x)$.

Если $s>1$, то выполняется проверка окончания работы алгоритма:

если $|g_s-g_{s-1}|<\varepsilon$, то работа алгоритма завершается.

Шаг 7. Вычисление новых значений частных производных: $r_i = \dfrac{-\partial q\left(x_i^*\right)}{\partial x_i}$, $x = x^*$, переход на шаг 4.

Решением задачи будут величины x.

Графически такой процесс решения может быть представлен как приближение с некоторым шагом к заданному значению функции ограничения. Так, на рис. 37 (процесс решения задачи при нелинейной зависимости) представлена начальная точка Q, координаты которой изменяются в соответствии со значениями частных производных функции ограничения и вторых производных целевой функции. При этом при большом размере шага решение может значительно отличаться от оптимального, при маленьком шаге для достижения заданного значения функции ограничения потребуется большое число итераций.

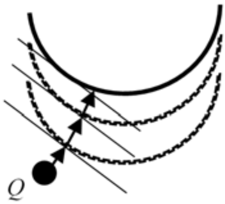


Рис. 37. Решение задачи путем итерационного приближения к линии заданного уровня

Рассмотрим применение итерационных алгоритмов для решения обратных задач при минимизации суммы квадратов изменений аргументов.

Зависимость объема производства от факторов производства (затрат труда и капитала) описывается функцией Кобба-Дугласа [108]:

$$y = A \cdot K^{\alpha} L^{\beta},$$

где y – объем производства; K – затраты капитала; L – затраты труда; A, α, β – параметры.

Исходные значения K, L равны соответственно 2 и 1,15, параметры A, α, β равны соответственно 7, 0,5, 0,3. Необходимо определить изменения этих аргументов для достижения объема производства, равного 17.

Решение задачи в MathCad представлено на рис. 38

$$\Delta K := 0 \qquad \Delta L := 0$$

$$g(\Delta K, \Delta L) := (\Delta K)^2 + (\Delta L)^2$$

$$K := 2 \qquad L := 1.15$$

Given

$$\left[7 \cdot (K + \Delta K)^{0.5}\right] \cdot (L + \Delta L)^{0.3} = 17$$

$$y := \mathrm{Minimize}(g, \Delta K, \Delta L)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1.472 \\ 1.268 \end{pmatrix}$$

$$g\left(y_0, y_1\right) = 3.776$$

Рис. 38. Решение задачи формирования
объема производства в MathCad

Для алгоритма на основе построения линии заданного уровня первая итерационная формула будет иметь вид ($K = \left(\frac{17}{7L^{0,3}}\right)^2$, $\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{-3,539}{L^{1,6}}$):

$$K = K + \alpha,$$

$$L = L + \alpha \frac{3,539}{L^{1,6}}.$$

Для градиентного алгоритма первая итерационная формула представляется следующим образом ($\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{3,5L^{0,3}}{K^{0,5}}$, $\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{2,1K^{0,5}}{L^{0,7}}$):

$$K = K + \alpha \frac{3,5L^{0,3}}{K^{0,5}},$$

$$L = L + \alpha \frac{2,1K^{0,5}}{L^{0,7}}.$$

В табл. 17, 18 приведены изменения аргументов в процессе решения задачи при α=0,01 (реализация алгоритма выполнена в Excel с помощью VBA).

Таблица 17

Результаты итераций при градиентном методе

Номер итерации	K	L	d	$g(x)$
1	2,026	1,177	6,537	0,001
2	2,052	1,204	6,399	0,006
3	2,077	1,231	6,263	0,012
…	…	…	…	…
57	3,449	2,468	0,046	3,835

Таблица 18

Результаты реализаций при использовании метода на основе формирования линии заданного уровня (ε = 0,02)

Номер реализации, s	r	K	L	d	$g(x)$
1	2,83	2,810	3,442	0,002	5,910
2	0,489	3,840	2,051	0,016	4,198
3	1,121	3,310	2,619	0,0003	3,873
4	0,758	3,550	2,326	0,011	3,784
5	0,917	3,430	2,461	0,014	3,765

Согласно полученным результатам, можно сделать вывод, что при использовании метода на основе формирования линии заданного уровня была достигнута меньшая разница с заданным значением ограничения и меньшее значение целевой функции. Однако число итерационных вычислений было выполнено больше и составило 699. Достижение большего соответствия заданному значению ограничения может быть достигнуто с помощью уменьшения значения параметра α. Так, в табл. 19 представлены результаты решения задачи с использованием двух алгоритмов при α=10^{-8} (ε = 0,001). В последнем столбце представлена величина u – разница между значением целевой функции $g(x)$, полученной при использовании данного метода, и значением целевой функции при использовании стандартной функции MathCad. Также в табл. 19 приведены результаты применения классических методов решения задачи (штрафов и множителей Лагранжа), градиентного метода и метода на основе формирования линии заданного уровня (описание которых приводится в §4.2). В методе штрафов шаг изменения штрафного параметра равен 10, а точность 10^{-8}. Наибольшее значение разницы u было получено при использовании градиентного метода, а разницы d – метода штрафов. Рассматривая параметры d и u как минимизируемые величины, можно отметить, что эффективными по Парето будут результаты, полученные с помощью метода множителей Лагранжа, штрафов, и стандартной функции MathCad. При этом наилучший среди алгоритмов на основе обратных вычислений результат был получен с использованием итерационного алгоритма на основе формирования линии заданного уровня.

Таблица 19

Решение задачи формирования объема производства (α=10^{-8})

Метод	K	L	d	$g(x)$	u
Итерационный градиентный	3,441	2,455	$4{,}1 \cdot 10^{-7}$	3,779	$3{,}4 \cdot 10^{-3}$
Итерационный на основе формирования линии заданного уровня	3,463	2,429	$5{,}6 \cdot 10^{-8}$	3,776	$2{,}8 \cdot 10^{-4}$
Градиентный	3,412	2,562	$5 \cdot 10^{-7}$	3,827	0,051
На основе формирования линии заданного уровня	3,463	2,429	$2{,}4 \cdot 10^{-7}$	3,776	$2{,}8 \cdot 10^{-4}$
Множителей Лагранжа	3,472	2,418	0	3,776	$2{,}8 \cdot 10^{-6}$
Штрафов	3,472	2,418	$3{,}9 \cdot 10^{-4}$	3,775	$-4{,}6 \cdot 10^{-4}$
Использование функции MathCad	3,472	2,418	$2{,}3 \cdot 10^{-6}$	3,776	–

С помощью градиентного метода было также выполнено решение задачи (7.1). Полученные величины приращений аргументов: $\Delta x_1 = 3{,}782$, $\Delta x_2 = 5{,}522$, $\Delta x_3 = 7{,}186$. Значение целевой функции равно 96,433, величины d и u равны соответственно $1{,}3 \cdot 10^{-6}$ и $-4{,}8 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, итерационный алгоритм позволил получить решение со значительно меньшим значением целевой функции (табл. 16).

В качестве примера задачи, для которой не может быть применен метод на основе построения линии заданного уровня, может быть рассмотрено формирование складских затрат (согласно классической модели управления запасами [109]). Функция зависимости затрат от объема заказа продукции первого, второго и третьего вида представлена следующим образом:

$$y = \frac{w_1 \upsilon_1}{x_1} + \frac{s_1}{2} x_1 + \frac{w_2 \upsilon_2}{x_2} + \frac{s_2}{2} x_2 + \frac{w_3 \upsilon_3}{x_3} + \frac{s_3}{2} x_3. \quad (7.4)$$

где x – размер заказа; s – затраты на хранение единицы товара в единицу времени; w – затраты на выполнение одного заказа; υ – интенсивность спроса.

Значения переменных представлены в табл. 20. Необходимо определить размер заказа каждого вида продукции таким образом, чтобы суммарные затраты составили 10 д.е. Результаты решения задачи представлены в табл. 20. Решение задачи в MathCad приведено на рис. 33.

Таблица 20

Исходные данные задачи формирования затрат

Показатель	Номер продукции		
	1	2	3
Затраты на хранение ед. товара в ед. времени, s	0,3	0,1	0,1
Затраты на выполнение одного заказа, w	10	5	5
Интенсивность спроса, υ	2	4	5
Исходные значения размера заказа, x	7	5	4

Таблица 21

Решение задачи формирования затрат при α=10^{-8}

Метод	x_1	x_2	x_3	d	$g(x)$
Итерационный градиентный	8,347	7,986	8,233	$1{,}2 \cdot 10^{-9}$	28,649
Градиентный	7,854	7,48	9,001	$9{,}28 \cdot 10^{-8}$	31,888
Использование стандартной функции MathCad	8,525	8,102	8,069	$3{,}75 \cdot 10^{-6}$	28,508

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$\Delta x_3 := 0 \quad \Delta x_2 := 0 \quad \Delta x_1 := 0$$

$$g(\Delta x) := (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2$$

Given

$$\left(\frac{10\cdot 2}{7+\Delta x_1}\right) + \frac{0.3}{2}\cdot(7+\Delta x_1) + \left[\left(\frac{5\cdot 4}{5+\Delta x_2}\right) + \frac{0.1}{2}\cdot(5+\Delta x_2)\right] + \left[\left(\frac{5\cdot 5}{4+\Delta x_3}\right) + \frac{0.1}{2}\cdot(4+\Delta x_3)\right] =$$

$$\mathrm{des} := \mathrm{Minimize}(g, \Delta x)$$

$$\mathrm{des} = \begin{pmatrix} 1.525 \\ 3.102 \\ 4.069 \end{pmatrix}$$

$$g(\mathrm{des}) = 28.508$$

Рис. 33. Решение в MathCad задачи формирования затрат

Полученные результаты также свидетельствуют о том, что использование итерационного алгоритма позволило получить решение с меньшим значением целевой функции.

§7.1. Модификация итерационных алгоритмов для решения задач нелинейного программирования

Подход на основе обратных вычислений может быть использован для решения более широкого класса оптимизационных задач, в частности задач нелинейного программирования с одним ограничением в виде равенства [19]. При этом частные производные целевой функции должны быть одномерными функциями. В этом случае может быть использован градиентный метод, для итерационного алгоритма необходимо выполнить следующую модификацию:

1. Осуществить безусловную оптимизацию целевой функции $g(x)$, в результате последующего использования итерационных алгоритмов происходит корректировка полученных значений аргументов x. Т.е. вместо исходных значений x, применяемых в обратной задаче, используются значения, полученные в результате безусловной оптимизации целевой функции $g(x)$.

2. В итерационных формулах (7.2, 7.3) расчёта необходимо выполнить корректировку, которая отражает влияние изменения аргумента на изменение целевой функции (если вторые частные производные не постоянны и не равны между собой). Данная операция выполняется путем деления частных производных функции ограничения первого порядка на частные производные второго порядка целевой функции:

$$x_i^* = x_i + t \cdot \alpha \cdot \frac{\dfrac{\partial f\left(x_i\right)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial^2 g\left(x_i\right)}{\partial x_i^2}}.$$

Рассмотрим решение двух классических задач исследования операций с помощью итерационных алгоритмов: оптимизация портфеля ценных бумаг и формирование затрат при заданном суммарном заказе.

Задача оптимизации портфеля ценных бумаг при отсутствии их взаимного влияния и при минимизации риска имеет вид [110]:

$$\begin{aligned}
&g(x) = \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 + \sigma_4 x_4^2 \to \min, \\
&m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = M, \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,
\end{aligned} \qquad (7.5)$$

где σ – показатель риска; m – показатель доходности; M – ограничение доходности.

Значения показателей риска и доходности: $\sigma_1 = 0{,}0165$, $\sigma_2 = 0{,}0032$, $\sigma_3 = 0{,}0008$, $\sigma_4 = 0{,}0002$, $m_1 = 0{,}291$, $m_2 = 0{,}121$, $m_3 = 0{,}481$, $m_4 = 0{,}381$. Заданное значение доходности M равно 0,37.

Задача (7.5) имеет два ограничения, для использования итерационного алгоритма необходимо выполнить их преобразование в одно ограничение. Рассмотрим формирование ограничения в виде суммы квадратов разницы между функцией ограничения и её заданным значением.

Задача оптимизации в этом случае имеет вид:

$$g(x) = \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 + \sigma_4 x_4^2 \to \min,$$

$$\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 - M\right)^2 + \left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1\right)^2 = 0.$$

Первая итерационная формула для первой переменной будет иметь вид (начальные значения переменных x равны нулю):

$$\frac{\partial^2 g(x_i)}{\partial x_i^2} = 2\sigma_i,$$

$$\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2m_1\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 - 0{,}37\right) - 2,$$

$$x_1 = 0 - \alpha \frac{-2{,}215}{0{,}033}.$$

Также рассмотрена задача минимизации функции затрат за закупку и хранение запаса (7.4) при заданном объеме закупок, который должен быть равен 28:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 28.$$

Исходные данные представлены в табл. 20, при этом исходными значениями аргументов x будут величины, полученные путем безусловной оптимизации функции (7.4): $x_1 = 11{,}547$, $x_2 = 19{,}999$, $x_3 = 22{,}358$.

В табл. 22 представлены результаты решения двух оптимизационных задач.

Таблица 22

Результаты решения задач оптимизации при $\alpha=10^{-8}$

Задача оптимизации	Метод	x_1	x_2	x_3	x_4	d	$g(x)$
портфеля ценных бумаг	Итерационный градиентный	0,011	0,086	0,12	0,782	$6\cdot10^{-22}$	$1{,}5\cdot10^{-4}$
	Градиентный	0,008	0,04	0,186	0,76	$3\cdot10^{-4}$	$1{,}4\cdot10^{-4}$
	Использование функции MathCad	0,011	0,086	0,12	0,782	10^{-12}	$1{,}5\cdot10^{-4}$
складских затрат	Итерационный градиентный	7,884	9,497	10,618	–	$4\cdot10^{-6}$	9,185
	Градиентный	9,389	8,786	9,825	–	$4\cdot10^{-15}$	9,29
	Использование функции MathCad	7,884	9,497	10,618	–	$6\cdot10^{-13}$	9,185

На рис. 34, 35 представлено решение рассмотренных оптимизационных задач в MathCad.

ORIGIN := 1

$$g(x) := \left(\frac{10\cdot2}{x_1}\right) + \frac{0.3}{2}\cdot x_1 + \left[\left(\frac{5\cdot4}{x_2}\right) + \frac{0.1}{2}\cdot x_2\right] + \left[\left(\frac{5\cdot5}{x_3}\right) + \frac{0.1}{2}\cdot x_3\right.$$

$x_3 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_1 := 1$

Given

$x_1 + x_2 + x_3 = 28$

des := Minimize(g, x)

$$des = \begin{pmatrix} 7.884 \\ 9.497 \\ 10.618 \end{pmatrix}$$

$g(x) = 65.25$

Рис. 34. Решение задачи оптимизации запасов

$ORIGIN := 1$

$m_1 := 0.2909090909 \quad m_2 := 0.121212121 \quad m_3 := 0.481481481 \quad m_4 := 0.381481481$

$\sigma_1 := 0.0165289256 \quad \sigma_2 := 3.1588613407 \times 10^{-3} \quad \sigma_3 := 7.6817558299 \times 10^{-4} \quad \sigma_4 := 1.817558299 \times 10^{-4}$

$$g(x) := \sum_{i=1}^{4} \left[\sigma_i \cdot (x_i)^2\right]$$

$x_4 := 0$

Given

$$\sum_{i=1}^{4} \left((x_i \cdot m_i)\right) = 0.37$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$$

$x \geq 0$

$$des := Minimize(g, x) = \begin{pmatrix} 0.011 \\ 0.086 \\ 0.12 \\ 0.782 \end{pmatrix}$$

Рис. 35. Решение задачи оптимизации портфеля в MathCad

Согласно полученным результатам, итерационный градиентный метод обеспечил большее соответствие решению, полученному с помощью математического пакета. В задаче оптимизации затрат его использование обеспечило меньшее значение целевой функции, а в задаче оптимизации портфеля – меньшую разницу между значением функции ограничения и заданным значением.

Заключение

В монографии представлены результаты исследования, посвященные решению обратных задач в области экономики и, в частности, развитию аппарата обратных вычислений. Предложенные методы и алгоритмы позволяют упростить компьютерную реализацию, выполнить решение задачи при меньшем объеме или отсутствии экспертной информации, поскольку её получение может быть затруднено и сопряжено с дополнительными затратами ресурсов. Кроме того, уменьшение объема входных данных позволяет избежать ошибок, вызванных некорректным определением входных значений. Также постановка задачи может подразумевать вместо использования экспертной информации нахождение решения при минимальном отклонении значений от исходных данных или выбор переменных для достижения заданной цели. В ходе выполнения работы были получены следующие результаты.

Предложен метод решения обратной задачи с помощью обратных вычислений на основе формирования уравнения зависимости между аргументами функции. В отличие от классического метода в модифицированном методе необходимо определить коэффициенты относительной важности и направление изменения аргументов (изменение в одном направлении соответствует прямой зависимости между аргументами, изменение в разных направлениях – обратной зависимости между аргументами). Это позволяет избежать ошибок, вызванных несогласованностью информации, поступающей от эксперта в части направления изменения аргументов и значений коэффициентов относительной важности.

Разработаны стохастические алгоритмы решения обратных задач при наличии ограничений на значения аргументов. Их основным преимуществом является простота компьютерной реализации при большом числе аргументов вследствие отсутствия необходимости реализации вычислительных процедур по решению систем уравнений и свертки. Алгоритм на основе приращений аргументов определяет решение при минимальном суммарном абсолютном изменении аргументов (т.е. наиболее «быстрым» способом). К недостаткам использования случайных величин относят субоптимальность полученного решения, которое будет отличаться в различных реализациях.

Предложены подходы к решению обратных задач при использовании регуляризации Тихонова и через манхеттенское расстояние. Предложенный алгоритм решения обратной задачи является более простым в компьютерной реализации по сравнению с классическими методами нелинейной оптимизации, решение задачи сводится к решению системы уравнений.

Выполнена модификация предложенного алгоритма решения обратных при минимизации суммы квадратов изменений для решения более широкого круга оптимизационных задач. Особенностью предложенного подхода является отсутствие необходимости формирования модифицированной функции и многократного решения задачи безусловной оптимизации, что обеспечивает упрощение процедуры его компьютерной реализации и уменьшение времени решение задачи. Это возможно благодаря использованию в предложенном алгоритме аппарата обратных вычислений, позволяющего перейти от значений аргументов, полученных в результате безусловной оптимизации целевой функции к значениям аргументов, удовлетворяющих ограничению задачи. Недостатком алгоритма является ограниченность его применения, в частности, целевая функция и ограничения должны удовлетворять обозначенным требованиям. Рассмотрено решение задачи оптимизации цены и закупок с помощью разработанного алгоритма.

Предложен алгоритм решения задачи при наличии зависимости между аргументами функции. В частности, рассмотрен случай минимизации суммы квадратов изменений аргументов, при котором происходит подстановка уравнения зависимости в ограничение и целевую функцию.

Предложены итерационные алгоритмы решения обратной задачи, которая представлена в виде задачи квадратичного программирования с одним ограничением. Особенностью предложенного подхода является использование итерационных формул изменения аргументов, основанных на аппарате обратных вычислений. Данный аппарат позволяет выполнить переход от исходных значений аргументов к величинам аргументов, которые удовлетворяют ограничению задачи. Используемый подход обеспечивает простоту реализации алгоритмов ввиду отсутствия необходимости реализации методов решения систем уравнений. Для рассмотренных задач использование итерационного изменения аргументов обеспечило более точное решение задачи по сравнению с решением задачи с помощью системы уравнений. С помощью итерационных алгоритмов может быть получено решение для более широкого круга задач. Выполнена модификация итерационных алгоритмов для решения оптимизационных задач нелинейного программирования представленного вида. В этом случае выполняется безусловная оптимизации целевой функции, а итерационные формулы корректируются с целью учетом влияния аргументов на изменение целевой функции.

Проведены вычислительные эксперименты с использованием предложенных в монографии методов и алгоритмов, выполнено сравнение полученных решений с результатом работы классических методов и математического пакета.

Представленные методы и алгоритмы могут быть реализованы в системах поддержки принятия решений, предоставляя для специалистов организации возможность решения обратных или оптимизационных задач. Используемые подходы позволят уменьшить ошибки при определении входных данных и обеспечить и быстродействие таких программных систем.

Список литературы

1. Кабанихин С.И. Обратные задачи естествознания и компьютерное моделирование // Наука из первых рук. – 2013. – №1 (49). – С. 32–43.

2. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. – 1943. – №5 (39). – С. 195–198.

3. Тихонов А.Н. Методы решения некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 223 с.

4. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

5. Лаврентьев М.М. Теория операторов и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.

6. Иванов В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 208 с.

7. Латтес Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.Л. Лионс. – М.: Мир, 1970. – 224 с.

8. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.

9. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 239 с.

10. Лисковец О.А. Вариационные методы решения неустойчивых задач. – Минск: Наука и техника, 1981. – 343 с.

11. Васин В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 261 с.

12. Федотов А.М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. – Новосибирск: Наука, 1990. – 280 с.

13. Вайникко Г.М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. – Тарту: Изд-во Тартус. ун-та, 1982. – 111 с.

14. Иванов В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. – М.: Физматлит, 1995. – 176 с.

15. Танана В.П. Оптимальные методы решения некорректно поставленных задач / В.П. Танана, А.И. Сидикова. – Челябинск: ЮУрГу, 2012. – 161 с.

16. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009 – 458 с.

17. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: УРСС, 2004. – 480 с.

18. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 207 с.

19. Vogel C.R. Computational methods for inverse problems. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 183 p.

20. Емелин И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – №12. – С. 59–63.

21. Gilyazov S.F. Regularization of ill-posed problems by iteration methods / S.F. Gilyazov, N.L. Gol'dman. – Dordrecht ets.: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 340 p.

22. Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. – Deutschland: De Gruyter, 2011. – 459 p.

23. Матысик О.В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач. – Брест: БрГУ им. А.С. Пушкина, 2014. – 213 с.

24. Страхов В.Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – №6 (13). – С. 1602–1606.

25. Красносельский М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [и др.] – М.: Наука, 1969. – 456 с.

26. Ali M. Indicators for measuring performance of building construction companies in Kingdom of Saudi Arabia / M. Ali, I.A. Al-Sulaihi, K.S. Al-Gahtani // Journal of King Saud University – Engineering Sciences. – 2013. – №25(2). – P. 125–134.

27. Zhenga G.-H. (2018). Solving the backward problem for space-fractional diffusion equation by a fractional Tikhonov regularization method / G.-H. Zhenga, Q.-G. Zhang // Mathematics and Computers in Simulation. – 2018. – №148. – P. 37–47.

28. Park Y. (2018). Parameter determination for Tikhonov regularization problems in general form / Y. Park, L. Reichel, G. Rodriguez [et al.] // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – №343. – P. 12–25.

29. Bai Z.-Z. Modulus-based iterative methods for constrained Tikhonov regularization / Z.-Z. Bai, A. Buccini, K. Hayami [et al.] // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2017. – №319. – P. 1–13.

30. Wang H. Cauchy sparse NMF with manifold regularization: A robust method for hyperspectral unmixing / H. Wang, W. Yang, N. Guan // Knowledge-Based Systems. – 2019. – №184. – P. 1–16.

31. Scardapane S. Group sparse regularization for deep neural networks / S. Scardapane, D. Comminiello, A. Hussain [et al.] // Neurocomputing. – 2017. – №241. – P. 81–89.

32. Одинцов Б.Е. Обратные вычисления в формировании экономических решений. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 256 с.

33. Одинцов Б.Е. Проблемы создания информационных систем управления эффективностью бизнеса / Б.Е. Одинцов, А.Н. Романов // Вестник Финансового университета. – 2014. – №6. – С. 22–36.

34. Одинцов Б.Е. Итерационный метод оптимизации управления предприятиями средствами обратных вычислений / Б.Е. Одинцов, А.Н. Романов // Вестник Финансового университета. – 2014. – № 2. – С. 60–73.

35. Цветков М.А. «Возвратно-сетевой» метод совершенствования структуры кредитно-депозитной базы коммерческих банков // Экономика и управление. – 2007. – №1. – С. 139–141.

36. Збарский А.М. Математическое представление процесса приведения предприятия в равновесное состояние // Российский экономический интернет-журнал. – 2009. – №1.– С. 445-452.

37. Одинцов Б.Е. Управление с учетом «золотых» пропорций плановых показателей // Управленческие науки в современном мире. – 2016. – №1. – Р. 43–47.

38. Виштак О.В. Использование технологии обратных вычислений при мониторинге качества дополнительного образования в ВУЗе / О.В. Виштак, И.А. Штырова // Вестник Астраханского государственного технического университета. – 2014. – №2. – С. 67–73.

39. Бармина Е.А. Мониторинг качества коммерческой организации. Структурирование показателей. Применение когнитивных

карт / Е.А. Бармина, И.Ю. Квятковская // Вестник Астраханского государственного технического университета. – 2010. – №2. – С. 15–20.

40. Блюмин С.Л. Применение анализа конечных изменений и метода обратных вычислений в системах управления и поддержки принятия решений / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова // Проблемы управления. – 2018. – №6. – С. 29–34.

41. Силкина Г.Ю. Совмещение сбалансированной системы показателей и метода обратных вычислений как аналитический инструмент управления эффективностью компании / Г.Ю. Силкина, А.А. Переверзева // Научно-технические ведомости санкт-петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. – 2016. – №3. – С. 258–267.

42. Shananin A.A. Inverse problems in economic measurements // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2018. – №58 (2). – С. 170–179.

43. Грибанова Е.Б. Методы решения обратных задач экономического анализа // Корпоративные финансы. – 2016. – №1. – С. 119–130.

44. Грибанова Е.Б. Решение обратных задач экономики с помощью модифицированного метода обратных вычислений // Проблемы управления. – 2016. – №5.– С. 35–40.

45. Грибанова Е.Б. Стохастический алгоритм поиска глобального минимума функции // Прикладная информатика. – 2017. – №2. – С. 130–139.

46. Грибанова Е.Б. Стохастические алгоритмы решения обратных задач экономического анализа с ограничениями // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2016. – №4. – С. 112–116.

47. Растригин Л.А. Адаптация сложных систем. – Рига: Зинатне, 1981. – 375 с.

48. Растригин Л.А. Статистические методы поиска. – М.: Наука, 1968. – 376 с.

49. Мицель А.А. Комбинаторная модель опционного портфеля / А.А. Мицель, М.Е. Семенов, М.Э. Фатьянова // Финансовая аналитика: проблемы и решения. – 2016. – №25 (307). – С. 2–13.

50. Thomas J. Improved simple optimization algorithm for unconstrained non-linear optimization problems / J. Thomas, S. Mahapatra // Perspectives in Science. – 2016. – №8. – P. 1–3.

51. Hamzacebi C. Continuous function minimization by dynamic random search / C. Hamzacebi, F. Kutay // Applied Mathematical Modeling. – 2007. – №10(31). – P. 2189–2198.

52. Hamzacebi C. A heuristic approach for finding the global minimum: adaptive random search technique / C. Hamzacebi, F. Kutay. // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – №173. – P. 1323–1333.

53. Toksari M.D. Ant colony optimization for finding the global minimum // Applied Mathematics and computation. – 2006. – №176. – P. 308–316.

54. Toksari M.D. A heuristic approach to find the global optimum of function // Journal of computational and Applied mathematics. – 2007. – №2(209). – P. 160–166.

55. Жиглявский А.А. Методы поиска глобального экстремума / А.А. Жиглявский, А.Г. Жилинскас. – М.: Наука, 1991. – 248 с.

56. Панов Н.В. Объединение стохастических и интервальных подходов для решения задач глобальной оптимизации функций // Вычислительные технологии. – 2009. – №5(14). – С. 49–65.

57. Xu J. (2016). Assessment of Tikhonov-type regularization methods for solving atmospheric inverse problems / J. Xu, F. Schreier, A. Doicu [et al.] // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. – 2016. – №184. – P. 274–286.

58. Demin D. Synthesis of optimal control of technological processes based on a multialternative parametric description of the final state // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – №3 (4 (87)). – P. 51–63.

59. Грибанова Е.Б. Методы решения обратных задач экономического анализа с помощью минимизации приращений аргументов // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2018. – №2. – С. 95–99.

60. Trunov A.N. Modernization of means for analysis and solution of nonlinear programming problems // Quantitative Methods in Economics. – 2015. – №16(2). – P. 133–141.

61. Мицель А.А. Методы оптимизации / А.А. Мицель, А.А. Шелестов. – Томск: Издательство Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, 2004. – 148 с.

62. Qi Y. An adaptive penalty-based boundary intersection method for many-objective optimization problem / Y. Qi, D. Liu, X. Li [et al.] // Information Sciences. – 2020. – №509. – P. 356–375.

63. El-Sobky B. A penalty method with trust-region mechanism for nonlinear bilevel optimization problem / B. El-Sobky, Y. Abo-Elnaga // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – №340. – P. 360–374.

64. Li J. A QP-free algorithm without a penalty function or a filter for nonlinear general-constrained optimization / J. Li, Y. Zhenping // Applied Mathematics and Computation. – 2018. – №316. – P. 52–72.

65. Мицель А.А. Новый алгоритм решения задачи квадратичного программирования / А.А. Мицель, А.Н. Хващевский // Автометрия. – 1999. – №3. – P. 93–98.

66. Morovati V. Extension of Zoutendijk method for solving constrained multiobjective optimization problems / V. Morovati, L. Pourkarimi // European Journal of Operational Research. – 2019. – №273(1). – P. 44–57.

67. Li B. ICRSFilter: A randomized direct search algorithm for constrained nonconvex optimization problems / B. Li, V.H. Nguyen, C.L. Ng [et al.] // Chemical Engineering Research and Design. – 2016. – №106. – P. 178–190.

68. El-Shorbagya M.A. A chaos-based evolutionary algorithm for general nonlinear programming problems / M.A. El-Shorbagya, A.A. Mousaab, S.M. Nasra // Chaos, Solitons & Fractals. –2016. – №85. – P. 8–21.

69. Hosseini A. A non-penalty recurrent neural network for solving a class of constrained optimization problems // Neural Networks. – 2016. – №73. – P. 10–25.

70. Darabia A. Dual feasible direction-finding nonlinear programming combined with metaheuristic approaches for exact overcurrent relay coordination / A. Darabia, M. Bagheri, G.B. Gharehpetian // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. – 2020. – №114. – С 1–8.

71. Сініцький М. Є. До питання розв’язку обернених задач економічного спрямування // Науковий вісник Національної академії статистики, обліку та аудиту. – 2018. – №1–2. – С. 195–202.

72. Shen B. Profit optimization in service oriented data market: A Stackelberg game approach / B. Shen, Y. Shen, W. Ji // Future Generation Computer Systems. – 2019. – №95. – P. 17–25.

73. Neill B. Profit optimization for deterministic inventory systems with linear cost / B. Neill, S. Sanni // Computer & Industrial Engineering. – 2018. – № 122. – P. 303–317.

74. Lee C. Meta-data envelopment analysis: Finding a direction towards marginal profit maximization // European Journal of Operation Research. – 2014. – №237. – P. 207–216.

75. Парушина Н.В. Анализ выпуска готовой продукции предприятий пищевой промышленности: влияние факторов и резервы роста / Н.В. Парушина, О.А. Булкина // Научные записки Орел ГИЭТ. – 2010. – №2. – С. 153–157.

76. Gribanova E.B. Algorithm for solving the inverse problems of economic analysis in the presence of limitations // EUREKA: Physics and Engineering. – 2020. – №1. – P. 70–78.

77. Vanderbei, R.J. Linear programming. Foundation and extensions. – New York: Springer, 2014. – 466 p.

78. Ганичева А.В. Метод решения некоторых классов оптимизационных задач // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – №2 (7). – С. 43–54.

79. Gribanova E.B. Development of a price optimization algorithm using inverse calculations // Eastern-European journal of Enterprise technologies. – 2019. – №5 (4). – P. 18–25.

80. Chen R. Capacitated assortment and price optimization for customers with disjoint consideration sets / R. Chen, H. Jiang // Operations Research Letters. – 2017. – №45. – P. 170–174.

81. Gallego G. Multiproduct price optimization and competition under the nested logit model with product-differentiated price sensitivities / G. Gallego, R. Wang // Operations Research. – 2014. – №62 (2). – P. 450–461.

82. Ferreira K.J. Analytics for an online retailer: demand forecasting and price optimization / K.J. Ferreira, B.H.A. Lee, D. Simchi-Levi // Manufacturing & Service Operations Management. – 2015. – №18 (1). – P. 69–88.

83. Caro F. Clearance pricing optimization for a fast-fashion retailer / F. Caro, J. Gallien // Operations Research. – 2012. – №60 (6). – P. 1404–1422.

84. Harsha P. A practical price optimization approach for omnichannel retailing / P. Harsha, S. Subramanian, M. Ettl // INFORMS Journal on Optimization. – 2019. – №1 (3). – P. 241–264.

85. Salvietti L. A profit-maximizing economic lot scheduling problem with price optimization / L. Salvietti, N.R. Smith // European Journal of Operational Research. – 2008. – №184. – P. 900–914.

86. Katsifou A. Joint product assortiment, inventory and price optimization to attract loyal and non-loyal customers / A. Katsifou, A.R.W. Seifert, J.-S. Tancrez // Omega. – 2014. – №46. – P. 36–50.

87. Chen R. Capacitated assortment and price optimization under the multilevel nested logit model / R. Chen, H. Jiang // Operations Research Letters. – 2019. – №47. – P. 30–35.

88. Qu T. Demand prediction and price optimization for semi-luxury supermarket segment / T. Qu, J.H. Zhang, F. Chan [et al.] // Computers & Industrial Engineering. – 2017. – №113. – P. 91–102.

89. Грибанова Е.Б. Решение задачи оптимизации цены с помощью обратных вычислений // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – №3 (7). – С. 1–10.

90. Katsifou A. Joint product assortiment, inventory and price optimization to attract loyal and non-loyal customers / A. Katsifou, R.W. Seifert, J.-S. Tancrez // Omega. – 2014. – №46. – P. 36–50.

91. Chen Y.-C. A probabilistic approach for traditional EOQ model // Journal of Information and Optimization Sciences. – 2003. – №24. – P. 249–259.

92. Haksever C. A model for optimizing multi-product inventory systems with multiple constraints / C. Haksever, J. Moussourakis. // International Journal of Production Economics. – 2005. – №97. – P. 18–30.

93. Chang C.-T. An EOQ model for deteriorating items under supplier credits linked to ordering quantity / C.-T. Chang, L.-Y. Ouyang, J.-T. Teng. // Applied Mathematical Modelling. – 2003. – №27. – P. 983–996.

94. Dewi S. Modeling pooled purchasing strategy in purchasing consortium to optimize total purchasing cost / S. Dewi, I. Baihaqi, E. Widodo // Procedia Manufacturing. – 2015. – P. 478–486.

95. Shekarian E. Fuzzy inventory models: a comprehensive review / E. Shekarian, N. Kazemi // Applied Soft Computing. – 2017. – №55. – P. 588–621.

96. Teng J.-T. 2009. A Simple method to compute economic order quantities // European Journal of Operation Research. – 2009. – №197. – P. 351–353.

97. Krichena S. Single supplier multiple cooperative retailers inventory model with quantity discount and permissible delay in payments / S. Krichena, A. Laabidia, F. Abdelazizb // Computers & Industrial Engineering. – 2011. – №60. – P. 164–172.

98. Chu Y. Simulation-based optimization framework for multi-echelon inventory systems under uncertainty / Y. Chu, F. You, J.M. Wassick [et al.] // Computers & Chemical Engineering. – 2015. – №73. – P. 1–15.

99. Mele F.D. A simulation-based optimization framework for parameter optimization of supply-chain networks / F.D. Mele, G. Guillen, A. Espuna [et al.] // Industrial & Engineering Chemistry Research. – 2006. – №45. – P. 3133–3148.

100. Mansouri S.A. A simulated annealing approach to a bi-criteria sequencing problem in a two-stage supply chain // Computers & Industrial Engineering. – 2006. – №50. – P. 105–119.

101. Silva C.A. Distributed optimisation of a logistic system and its suppliers using ant colonies / C.A. Silva, J.M.C. Sousa, T.A. Runkler [et al.] // International Journal of Systems Science. – 2006. – №37. – P. 503–512.

102. Castro P.M. Hybrid mathematical programming discrete-event simulation approach for large-scale scheduling problems / P.M. Castro, A.M. Aguirre, L.J. Zeballos [et al.] // Industrial & Engineering Chemistry Research. – 2011. – №50. – P. 10665–10680.

103. Манахов В.В. Моделирование оптимального ассортимента ритейлера при продаже непродовольственных товаров в кредит // Статистика и экономика. – 2016. – №3. – С. 78–82.

104. Грибанова Е.Б. Решение задачи оптимизации закупок с помощью обратных вычислений // Экономический анализ: теория и практика. – 2018. – №3. – С. 586–596.

105. Грибанова Е.Б. Система решения обратной задачи формирования маржинальной прибыли предприятия / Е.Б. Грибанова, И.Н. Логвин // Сборник трудов Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Современные технологии принятия решений в цифровой экономике», Юрга, 15–17 ноября 2018 г. – 2018. – С. 242–244.

106. Gribanova E.B. Economic analysis inversion mechanism taking into account argument interrelation / E.B. Gribanova, I.N. Logvin. // Proceedings of the 1st International Scientific Conference «Modern Management Trends and the Digital Economy: from Regional Development to Global Economic Growth», Ekaterinburg, 14–15 April 2019. – 2019 – P. 86–92.

107. Gribanova E.B. Development of iterative algorithms for solving the inverse problem using inverse calculations // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2020. – №4 (3). – P. 27–34.

108. Zhang Q. Study on factors affecting corn yield based on the Cobb-Douglas production function / Q. Zhang, W. Dong, C. Wen [et al.] // Agricultural Water Management. – 2020. – №228. – P. 1–11.

109. Sarmah S.P. Coordination of a single-manufacturer/multi-buyer supply chain with credit option / S.P. Sarmah, D. Acharya, S.K. Goyal // International Journal of Production Economics. – 2008. – №111 (2). – P. 676–685.

110. Kalayci C.B. A comprehensive review of deterministic models and applications for mean-variance portfolio optimization / C.B. Kalayci, O. Ertenlice, M.A. Akbay // Expert Systems With Applications. – 2019. – №125. – C. 345–368.

Для заметок

Для заметок

Научное издание

Грибанова Екатерина Борисовна

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО АППАРАТА ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Монография

Чебоксары, 2020 г.

Редактор *Е.Б. Грибанова*
Компьютерная верстка *Е.В. Кузнецова*
Дизайн обложки *Н.В. Фирсова*

Подписано в печать 28.10.2020 г.
Дата выхода издания в свет 02.11.2020 г.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 7,6725. Заказ К-725. Тираж 500 экз.

Издательский дом «Среда»
428005, Чебоксары, Гражданская, 75, офис 12
+7 (8352) 655-731
info@phsreda.com
https://phsreda.com

Отпечатано в Студии печати «Максимум»
428005, Чебоксары, Гражданская, 75
+7 (8352) 655-047
info@maksimum21.ru
www.maksimum21.ru