



**СОВРЕМЕННЫЕ ВОПРОСЫ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД—2019**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

## **СОВРЕМЕННЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД – 2019**

Сборник статей по материалам конференции  
с международным участием  
7 июня 2019 г.

Чебоксары  
Издательский дом «Среда»  
2019

УДК 531(082)  
ББК 22.2я43  
С56

***Рецензенты:***

кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой  
математики, физики и информационных технологий  
ФГБОУ ВО «Чувашская государственная  
сельскохозяйственная академия»

*Максимов А.Н.*

доктор физико-математических наук, профессор кафедры  
«Высшая математика и естественные науки»  
ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта»

*Карпухин В.Б.*

***Редакционная коллегия:***

*М.В. Петров (отв. редактор), А.Г. Николаева (отв. секретарь),  
Л.А. Максимова, А.Н. Плотников, Б.В. Михайлов*

*Печатается по решению Ученого совета  
Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова  
(протокол от 19.06.2019 №5)*

**С56**      **Современные вопросы механики сплошных сред – 2019:** сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием (7 июня 2019 г., г. Чебоксары). – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – 192 с.

**ISBN 978-5-6043758-7-7**

Рассмотрены различные тематические направления: механика деформируемого твердого тела, механика несущих систем, механика сплошных сред в образовании.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов.

Материалы сборника воспроизведены с авторских оригиналов рукописей, представленных в оргкомитет.

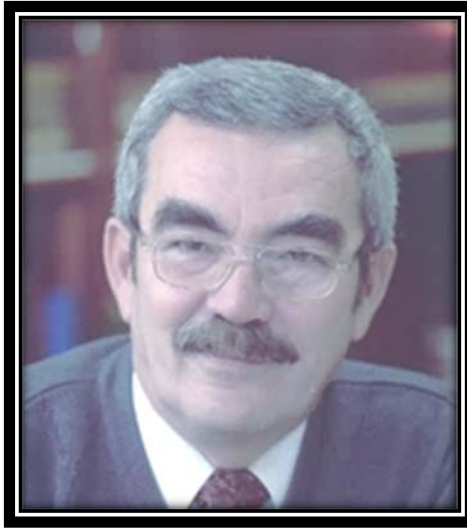
DOI 10.31483/a-127  
ISBN 978-5-6043758-7-7

© Коллектив авторов, 2019  
© ИД «Среда», оформление, 2019

<b>СОДЕРЖАНИЕ</b> .....	3
<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	5
<b>РАЗДЕЛ 1. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА</b> .....	10
<i>Варданян С.В.</i> Малонапряженное состояние в плоской задаче теории моментных напряжений.....	10
<i>Козел А.Г.</i> Области физической нелинейности в трёхслойной пластине на основании Пастернака.....	18
<i>Максимова Л.А.</i> К вопросу об устойчивости решения напряженного состояния тела.....	28
<i>Немировский Ю.В., Тихонов С.В.</i> Продольно-поперечный изгиб бетонных стержней с учетом влияния силы тяжести.....	33
<i>Нестерович А.В.</i> Осесимметричное растяжение–сжатие круговой трехслойной пластины в температурном поле.....	42
<i>Петров М.В., Гоник Е.Г.</i> Экспериментальное измерение давления сыпучего материала на стенку цилиндрической оболочки.....	47
<i>Плотников А.Н., Иванова Н.В.</i> Плечо пары сил в сечении железобетонного изгибаемого элемента на всех стадиях напряженного состояния.....	52
<i>Плотников А.Н., Яковлева О.С., Романова Т.В.</i> Прочностной расчет армированной каменной кладки на основе деформационных параметров составляющих ее материалов.....	60
<i>Соколов Н.С.</i> Деформации оснований большеразмерных фундаментов при повышенных нагрузках на них.....	68
<i>Соколов Н.С.</i> Многолетние исследования деформаций оснований большеразмерных фундаментов.....	81
<i>Старовойтов Э.И.</i> Термоупругое деформирование трехслойной балки сосредоточенной силой.....	91
<i>Трацевская Е.Ю.</i> Определение механических свойств неводонасыщенных грунтов.....	99
<b>РАЗДЕЛ 2. МЕХАНИКА НЕСУЩИХ СИСТЕМ</b> .....	103
<i>Жиренков А.Н., Масленникова И.И.</i> Вопросы и пути решения строительных проблем освоения акватории Северного ледовитого океана.....	103
<i>Иванов В.А., Вуцин Л.И., Скобеева М.В.</i> Численное моделирование динамики конструкций, подкрепленных системой армирующих стержней.....	117
<i>Каюмов Р.А., Страхов Д.Е.</i> Исследование накопления повреждений в композитных элементах конструкций.....	123

<i>Николаева А.Г., Иванова Н.В., Горбунова И.С.</i> Моделирование расчетных схем панельных зданий при расчете на прогрессирующее обрушение.....	128
<i>Плотников А.Н., Николаева А.Г., Иванова Н.В., Андрианов Д.В.</i> Анализ несущих систем зданий с крупногабаритными квартирами	135
<i>Соколов Н.С.</i> Расчет осадок оснований большеразмерных фундаментов.....	144
<i>Федоров Н.А.</i> Обтекание гибкой дуги безграничным потоком	154
<i>Трещев А.А., Теличко В.Г., Золотов Н.В.</i> Модель деформационно-прочного расчета пространственной несущей системы многоэтажного здания из монолитного железобетона	159
<b>РАЗДЕЛ 3. МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД В ОБРАЗОВАНИИ</b> .....	171
<i>Максимова Л.А.</i> Основные принципы научного исследования	171
<i>Николаева А.Г., Иванова Н.В.</i> Применение САПР в проектировании многоэтажных стальных каркасов .....	175
<i>Петров М.В., Михайлов Б.В., Гоник Е.Г., Арина Н.Н., Яковлева О.С.</i> Анализ расчетов прогибов элементов конструкций методом начальных параметров.....	180

## ПРЕДИСЛОВИЕ



*Памяти доцента кафедры строительных конструкций А.Г. Лукина*

*В прошлом году не стало нашего коллеги и друга Александра Геннадьевича Лукина. Он ушел рано, не дожив немного до своего 60-летия, которое мы хотели отметить в мае 2019 г.*

*Светлый человек и замечательный преподаватель – его уважали коллеги и любили студенты. Практически вся его жизнь была связана с Чувашским госуниверситетом. Поступив в ЧГУ после окончания Чебоксарского строительного техникума, активно занимаясь исследованиями в области надежности зданий и сооружений, он окончил университет с отличием и сразу же был принят на кафедру сопротивления материалов и строительной механики в 1983 г. До последних дней преподавание дисциплины «Конструкции из дерева и пластмасс» было связано с именем Александра Геннадьевича. Им была создана методика преподавания этой дисциплины, выверенная до мельчайших деталей, курсовое проектирование поставлено на высокий уровень, его лекции студенты слушали с неподдельным интересом и вдохновением. Залогом этого было использование в учебном процессе достижений ведущей научной школы отрасли - Московского государственного строительного университета, выпуск-*

ником аспирантуры которой он был. Лучшие студенты строительного факультета стремились выполнять дипломные проекты под его руководством. Эти работы отличала архитектурная и конструктивная оригинальность, инженерная грамотность, четкая графическая подача и лаконичный и конкретный доклад на защите. Этому способствовало, в частности, глубокое знание работы большепролетных пространственных конструкций. У коллег по кафедре всегда будет перед глазами такая картина: вокруг стола А.Г. Лукина сидят студенты и ловят каждое его слово по методике выполнения дипломного проекта.

В последние годы А.Г. Лукиным были поставлены новые дисциплины для магистрантов и специалистов, новых профилей бакалавриата, такие как «Надежность и долговечность зданий и сооружений», «Исследование и проектирование конструкций из дерева и пластмасс», «Инженерные сооружения в транспортном строительстве», «Сейсмостойкость сооружений», спецкурс по железобетонным конструкциям. С 1993 г. Александр Геннадьевич руководил студенческим научным обществом факультета, при этом конференции студентов проходили на высоком уровне. Он неоднократно выезжал с командой строительного факультета на Олимпиаду по направлению «Строительство» в г. Казань, где команда занимала призовые места. Широкий круг специалистов в области строительства придает особое значение практической деятельности А.Г. Лукина в области исследования эксплуатационной надежности зданий и конструкций. Его эрудиция, знание теории и огромный практический опыт позволяли точно установить категорию технического состояния зданий и сооружений, найти эффективное решение по продлению срока их службы и дать рекомендации по восстановлению. Результаты этой работы представлены в более чем 130 публикациях. Можно отметить такие работы как «Обследование строительных конструкций блока основных сооружений Водопроводной очистной станции «Заовражная» г. Чебоксары», «Обследование строительных конструкций формовочного отделения полигона №1 цеха №2, цеха №3 ОАО «ЖБК-9» г. Чебоксары», большое количество высоковольтных линий электропередачи многих регионов России, в том числе на Курской и Смоленской АЭС, более ста объектов.

Он был награжден Почетными грамотами Министерства образования и науки РФ, Министерства строительства ЧР, Почетной

грамотой администрации Ленинского района г. Чебоксары, Почетной грамотой ЧГУ.

*Александр Геннадьевич был любящим супругом, всегда спешил к своей Татьяне, обожал своих дочерей, внука. Младшая дочь, Анастасия с отличием окончила строительный факультет ЧГУ.*

*Из воспоминаний друзей и коллег.*

*В.М. Старостин:*

*Большой и настоящий был человек.*

*Я знал его 40 лет. И никогда не уставал поражаться его качествам. Снова и снова открывал в нем что-то новое, удивительное.*

*Мы поступали с ним на первый курс строительного факультета в далеком 1978 году. Там, на экзаменах, встретились, познакомились. Я – школьник, не «нюхавший пороха»; он – выпускник техникума, успевший поработать на стройке. Так и прожили 40 лет: я – витавший в облаках «теоретик», и он – «практик-интеллектуал», исследовавший жизнь своим большим умом.*

*А.Г. Лукин был человек большого ума.*

*Все годы студенческой жизни я удивлялся его способности впитывать знания, раскладывать их «по полочкам», и в нужный момент «вынимать» их из своих обширных «закромов». Его не интересовали пятерки на экзаменах, он хотел знать и уметь. И это у него прекрасно получалось.*

*Потом, в трудные 90-е, мне довелось работать с ним, выполняя проекты и научные исследования. И я не переставал изумляться тому багажу знаний, которые он бережно копил, той гибкости ума, что позволяла ему решать самые сложные инженерные задачи.*

*А.Г. Лукин был человеком большой души.*

*В студенческие годы мы были практически всегда вместе. Он меня учил жизни. С ним я ходил в туристические походы. Там я видел то, как должен вести себя настоящий мужчина. Дорогие моему сердцу уроки мужественности, доброты.*

*Потом я видел с какой нежностью он относится к своей семье. Он – однолюб. Свою будущую жену он встретил в техникуме. И пронес свою любовь всю свою жизнь!*

*А.Г. Лукин был человеком настоящего дела.*

*После диплома он остался на строительном факультете. За годы работы на кафедре А.Г. Лукин стал прекрасным преподавателем.*



*Всю свою жизнь Лукин работал только на одном месте - на строительном факультете. Однажды выбрав путь, он не сворачивал с него. И это его настоящее дело.*

*А.Г. Лукин был человеком слова.*

*Никто не сможет сказать, что Лукин не сдержал данного им слова. Никто! Таких людей, с таким характером единицы.*

*Будь то работа – надо вовремя сдать проект, значит будут бессонные ночи, но слово сдержит. Будь то туристский поход – надо в холодно горной речке спасти перевернувшуюся байдарку, значит прыгнет в воду, будет до конца, до боли в мышцах, держать и бороться.*

*Будь то семья – обещал дочкам поход в кино, и каким-бы ни был уставшим, идет в кино с искренней радостью.*

*Чего не любил Лукин – фальши. Фальшь последних лет Советского союза, громкие лживые слова на партийных собраниях. Фальшь в науке, когда псевдочлены, раздувая щеки, рассуждают о том, как они «пишут науку».*

*Уверен, что память о настоящем большом человеке Лукине Александре Геннадьевиче сохранится в наших сердцах.*

*А.Н. Плотников:*

*С А.Г. Лукиным на строительном факультете мы учились на одном курсе, правда в разных группах. Тогда на факультете было много направлений исследований, проводимых студентами. Так случилось, что мы были задействованы в разных темах, иногда пересекались. Но уже тогда Александр отличался серьезностью и основательностью. Немного был старше нас по возрасту, но были на курсе и другие ребята постарше, больше отличался глубиной мышления, практичностью. Больше сдружились мы потом, когда проходили летние военные сборы под Казанью.*

*После окончания университета мы встретились вновь, когда я пришел работать на кафедру сопротивления материалов и строительной механики. Александр Геннадьевич уезжал в очную аспирантуру МИСИ (ныне МГСУ), я пришел на его место вести курс «Конструкции из дерева и пластмасс». Первое, что предстояло, читать открытую лекцию. Слушал меня А.Г. Лукин. От него я получил одобрение, важные рекомендации по методике, фактически благословение на преподавательскую деятельность в вузе.*

*А.Г. Лукин быстро сделал научную работу, быстро ее защитил. С его способностями это было логично. Затем я уехал в аспиранту-*

*ру, потом были годы совместной работы на вновь созданной кафедре строительных конструкций. Ему предлагали и административные должности, он мог стать и деканом факультета, но ему были ближе более практические, более творческие дела, от должностей отказывался.*

*В течение ряда лет мы с ним выполняли работу по обследованию зданий и сооружений. Помню, как в нестандартной ситуации А.Г. Лукин находил практические решения по методам обследования. Мы с ним даже плавали на надувной лодке в отстойниках водозаборных резервуаров, между поверхностью воды и плита покрытия там был всего один метр. С работой справились. Всегда удивлялся его способности определять причины возникновения нестандартных повреждений конструкций.*

*В последнее время мы с ним занимались вопросами автоматического мониторинга зданий и сооружений. Решили сложные вопросы моделирования работы металлического моста чрез р. Каму. В последнее время он глубоко разобрался в расчете мостовых конструкций, вел дисциплину по строительству мостов.*

*Обсуждали мы с ним и разные возникающие периодически проблемы со здоровьем, обсуждали методы лечения.*

*За день, когда его не стало (30 августа), мы с ним разговаривали по телефону. Он был бодр, говорил, что чувствует себя очень хорошо, строил планы на предстоящий учебный год. К сожалению, не все зависит от нас самих.*

*Светлая память об Александре Геннадьевиче Лукине навсегда останется в наших сердцах.*

*Коллеги по кафедре строительных конструкций, по строительному факультету, друзья – В.М. Старостин, А.Н. Плотников, С.Н. Степанов, С.В. Криворучко.*

## РАЗДЕЛ. 1. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

### МАЛОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

*С.В. Варданян*

МГУ им. М.В. Ломоносова  
г. Москва, Россия

*Аннотация:* в статье рассмотрено напряженное состояние клиновидного тела, состоящего из двух разных материалов. Задача рассмотрена в плоской постановке с учетом моментных напряжений. Исследованы области малонапряженности в зависимости от углов клина и соотношений параметров упругости.

*Ключевые слова:* напряженное состояние, клин, функция напряжений, моментное напряжение.

### LOW STRESS STATE IN A PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF MOMENT STRESSES

*Abstract:* the stress state of the wedge-shaped body, consisting of two different materials, is considered. The problem is considered in a flat setting taking into account moment stresses. The low-tension regions are investigated depending on the wedge angles and the relations of elasticity parameters

*Keywords:* stress state, wedge, stress function, moment stress.

В рамках плоской деформационной задачи рассмотрим напряженное состояние на вершине составного клиновидного тела с учетом моментных напряжений (рис. 1). Предполагается, что клин состоит из двух частей с разными материалами.

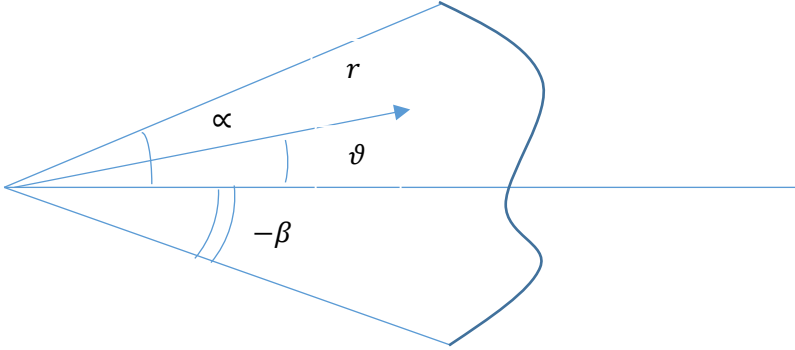


Рис. 1

Уравнения равновесия можно записать в форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\tau_{r\vartheta} + \tau_{\vartheta r}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \mu_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\mu_{rz}}{r} + \tau_{r\vartheta} - \tau_{\vartheta r} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Принимая соотношения Коши

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r}, \quad (2)$$

связь тензора напряжений и деформаций выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_r - \nu(\sigma_r + \sigma_\vartheta)), \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_\vartheta - \nu(\sigma_r + \sigma_\vartheta)), \\ \gamma_{r\vartheta} &= \frac{1+\nu}{2E} (\tau_{r\vartheta} + \tau_{\vartheta r}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга а  $G = E / 2(1 + \nu)$  модуль сдвига,

Функцию напряжений введем следующим образом [5; 6].

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \vartheta}, \\
 \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \vartheta}, \\
 \tau_{r\vartheta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2}, \\
 \tau_{\vartheta r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\
 \mu_{rz} &= \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \mu_{\vartheta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta},
 \end{aligned} \tag{4}$$

Учитывая (4) и (1) плоская задача моментной теории упругости приводится к решению следующих уравнений:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 (F - l^2 \nabla^2 F) = 0 \tag{5}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \tag{6}$$

Причем функции напряжений  $\Phi$  и  $F$  связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} (F - l^2 \nabla^2 F) &= -2(1-\nu) l^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \nabla^2 \Phi, \\
 \frac{\partial}{\partial \vartheta} (F - l^2 \nabla^2 F) &= 2(1-\nu) l^2 r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi,
 \end{aligned} \tag{7}$$

Представим функции  $\Phi$ ,  $F$  в следующем виде:

$$\Phi = r^{\lambda+1} f(\vartheta), \quad F = r^{\lambda+1} \varphi(\vartheta), \tag{8}$$

Тогда (4) представится в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= r^{\lambda-1} [(1+\lambda)f + f'' - \lambda\varphi], \\
 \sigma_{\vartheta\vartheta} &= r^{\lambda-1} [\lambda(1+\lambda)f + \lambda\varphi'], \\
 \tau_{r\vartheta} &= -r^{\lambda-1} [\lambda f' + (\lambda+1)\varphi + \varphi''], \\
 \tau_{\vartheta r} &= r^{\lambda-1} [-\lambda f' + \lambda(\lambda+1)\varphi], \\
 \mu_{rz} &= r^{\lambda} (\lambda+1)\varphi, \quad \mu_{\vartheta z} = r^{\lambda} \varphi',
 \end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая то обстоятельство, что в выражениях (5) и (7) слагаемое  $F$  имеет порядок  $l^2$  и, соответственно не влияет на напряженное состояние в окрестности угловой точки составного

клина, эту слагаемую не будем учитывать, т. е. функция напряжений определится из уравнения:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad (10)$$

а (7) запишется в форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 F &= -2m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \nabla^2 \Phi, \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \nabla^2 F &= 2mr \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $m = 1 - \nu$ .

Решение уравнения (10) запишется в форме:

$$\Phi(r, \vartheta) = r^{\lambda+1} [A_1 \sin(\lambda+1)\vartheta + A_2 \cos(\lambda+1)\vartheta + A_3 \sin(\lambda-1)\vartheta + A_4 \cos(\lambda-1)\vartheta] \quad (12)$$

$$F(r, \vartheta) = r^{\lambda+1} [B_1 \sin(\lambda+1)\vartheta + B_2 \cos(\lambda+1)\vartheta + B_3 \sin(\lambda-1)\vartheta + B_4 \cos(\lambda-1)\vartheta]$$

Решение (12) подставляя в (11) получим:

$$\Phi(r, \vartheta) = r^{\lambda+1} [A_1 \sin(\lambda+1)\vartheta + A_2 \cos(\lambda+1)\vartheta + A_3 \sin(\lambda-1)\vartheta + A_4 \cos(\lambda-1)\vartheta] \quad (13)$$

$$F(r, \vartheta) = r^{\lambda+1} [B_1 \sin(\lambda+1)\vartheta + B_2 \cos(\lambda+1)\vartheta - 2mA_3 \sin(\lambda-1)\vartheta + 2mA_4 \cos(\lambda-1)\vartheta]$$

Во всех выражениях в дальнейшем будем использовать верхние индексы 1 и 2, которые соответствуют первому и второму материалам клина.

Предположим, что края тела свободны от напряжений

$$\Phi_1 \Big|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad \Phi_2 \Big|_{\vartheta=-\beta} = 0, \quad F_1 \Big|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad F_2 \Big|_{\vartheta=-\beta} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=-\beta} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=-\beta} = 0, \quad (15)$$

А на линии прикосновения материалов имеет место полное сцепление,

$$\tau_{r\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=0} = \tau_{r\vartheta}^{(2)} \Big|_{\vartheta=0}, \quad \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=0} = \sigma_{\vartheta}^{(2)} \Big|_{\vartheta=0}, \quad (16)$$

$$\chi_r^{(1)} \Big|_{\vartheta=0} = \chi_r^{(2)} \Big|_{\vartheta=0}, \quad \chi_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=0} = \chi_{\vartheta}^{(2)} \Big|_{\vartheta=0} \quad (17)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0}, \quad \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial r^2} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial r^2} \Big|_{\vartheta=0} \quad (18)$$

где  $\chi_r$ ,  $\chi_{\vartheta}$  являются кривизнами волокон:

$$\chi_r = \frac{\mu_r}{B}, \quad \chi_{\vartheta} = \frac{\mu_{\vartheta}}{B}, \quad (19)$$

причем  $B$  константа микрополярности, которая называется изгибно-крутильным модулем.

С учетом (2), (3) выражение (17) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(1)} \Big|_{g=0} &= \varepsilon_{rr}^{(1)} \Big|_{g=0}, \\ 2 \frac{\partial \gamma_{r,g}^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}^{(1)}}{\partial g} + \frac{2}{r} \gamma_{r,g}^{(1)} \Big|_{g=0} &= 2 \frac{\partial \gamma_{r,g}^{(2)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}^{(2)}}{\partial g} + \frac{2}{r} \gamma_{r,g}^{(2)} \Big|_{g=0} \end{aligned} \quad (20)$$

С помощью функций напряжения контактные условия на линии присоединения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \Big|_{g=0} &= \Phi_2 \Big|_{g=0}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial g} \Big|_{g=0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial g} \Big|_{g=0}, \\ F_1 \Big|_{g=0} &= \gamma F_2 \Big|_{g=0}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial g} \Big|_{g=0} = \gamma \frac{\partial F_2}{\partial g} \Big|_{g=0}, \\ \frac{m_1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{m_1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial g^2} - (1-m_1) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r \partial g} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_1}{\partial g} \Big|_{g=0} &= \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{m_2}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{m_2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial g^2} - (1-m_2) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_2}{\partial r \partial g} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_2}{\partial g} \Big|_{g=0} \right) \\ \frac{m_1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial g^3} + \frac{1+m_1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r^2 \partial g} - \frac{2-m_1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial g} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial g} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial r^3} \Big|_{g=0} &= \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mu \left( \frac{m_2}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial g^3} + \frac{1+m_2}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r^2 \partial g} - \frac{2-m_2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial g} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial g} - \frac{\partial^3 F_2}{\partial r^3} \Big|_{g=0} \right)$$

причем  $\gamma = \frac{B_2}{B_1}$ ,  $\mu = \frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} = \frac{G_1}{G_2}$ .

С учетом работ [3] для изгибно-крутильного момента имеем  $B = l^2 G$ , где  $G$  модуль сдвига, а  $l^2$  – новый параметр материала. Для определения данного параметра существуют разные подходы [8]. Предположим, что для каждой составной части

составного тела  $l^2$  не меняется, тогда будем иметь  $\gamma = \frac{G_2}{G_1}$ .

Удовлетворяя граничным и контактным условиям и исключая тривиальное решение, получим следующее детерминантное уравнение.

$$\det\|a_{ij}\| = 0, \quad i, j = 1, \dots, 12 \quad (23)$$

Отличные от нуля компоненты матрицы (20) представляются ниже:

$$a_{11} = \sin(\lambda + 1)\alpha, \quad a_{12} = \cos(\lambda + 1)\alpha, \quad a_{13} = \sin(\lambda - 1)\alpha, \quad a_{14} = \cos(\lambda - 1)\alpha, \\ a_{27} = -\sin(\lambda + 1)\beta, \quad a_{18} = \cos(\lambda + 1)\beta, \quad a_{19} = -\sin(\lambda - 1)\beta, \quad a_{110} = \cos(\lambda - 1)\beta,$$

$$a_{31} = (\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\alpha, \quad a_{32} = -(\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\alpha,$$

$$a_{33} = (\lambda - 1)\cos(\lambda - 1)\alpha, \quad a_{34} = -(\lambda - 1)\sin(\lambda - 1)\alpha,$$

$$a_{47} = (\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\beta, \quad a_{48} = (\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\beta,$$

$$a_{49} = (\lambda - 1)\cos(\lambda - 1)\beta, \quad a_{410} = (\lambda - 1)\sin(\lambda - 1)\beta, \quad a_{4i} = 0,$$

$$a_{53} = -2m_1(\lambda - 1)\sin(\lambda - 1)\alpha, \quad a_{54} = -2m_1(\lambda - 1)\cos(\lambda - 1)\alpha,$$

$$a_{55} = (\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\alpha, \quad a_{56} = -(\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\alpha,$$

$$a_{69} = 2m_2(\lambda - 1)\sin(\lambda - 1)\beta, \quad a_{610} = -2m_2(\lambda - 1)\cos(\lambda - 1)\beta,$$

$$a_{611} = (\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\beta, \quad a_{612} = (\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\beta,$$

$$a_{72} = 1, \quad a_{74} = 1, \quad a_{78} = -1, \quad a_{710} = -1,$$

$$a_{81} = \lambda + 1, \quad a_{83} = \lambda - 1, \quad a_{87} = -(\lambda + 1), \quad a_{89} = -(\lambda - 1),$$

$$a_{93} = 2m_1, \quad a_{96} = 1, \quad a_{99} = -2\gamma m_2, \quad a_{912} = -\gamma,$$

$$a_{104} = -2m_1(\lambda - 1), \quad a_{105} = \lambda + 1, \quad a_{1010} = 2m_2\gamma(\lambda - 1), \quad a_{1011} = -\gamma(\lambda + 1),$$

$$a_{112} = -\lambda(\lambda + 1), \quad a_{114} = \lambda(\lambda + 1)(2m_1 - 1), \quad a_{115} = -\lambda(\lambda + 1),$$

$$a_{118} = \lambda\mu(\lambda + 1), \quad a_{1110} = -\lambda(\lambda + 1)\mu(2m_2 - 1), \quad a_{1111} = \lambda\mu(\lambda + 1),$$

$$a_{121} = -\lambda(\lambda + 1)^2 m_1, \quad a_{122} = -(\lambda + 1)^3(m_1 + 1), \quad a_{123} = \lambda(\lambda - 1)(m_1\lambda - 3m_1 - 2),$$

$$a_{124} = -(1 + m_1)(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

$$a_{127} = \mu\lambda(\lambda + 1)^2 m_1, \quad a_{128} = \mu(\lambda + 1)^3(m_2 + 1), \quad a_{129} = -\lambda\mu(\lambda - 1)(m_1\lambda - 3m_1 - 2),$$

$$a_{1210} = \mu(1 + m_2)(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

Составим таблицу разных значений параметров упругости.



Таблица 1

N/N	$\mu = \frac{G_1}{G_2}$	$\gamma = \frac{G_2}{G_1}$	Материал N <sub>1</sub>	$m_1$	Материал N <sub>2</sub>	$m_2$
1	0,97	1,03	Алюминий	0,655	Золото	0,56
2	1,12	0,89	Серебро	0,633	Золото	0,56
3	0,84	1,18	Серебро	0,633	Цинк	0,75
4	1,1	0,9	Медь	0,657	Титан	0,68
5	1,34	0,74	Медь	0,657	Цинк	0,75
6	1,63	0,61	Никель	0,72	Медь	0,657

Области малонапряженности в рамках классической теории упругости представлен в графике 1 а в рамках микрополярной теории упругости в графике 2.

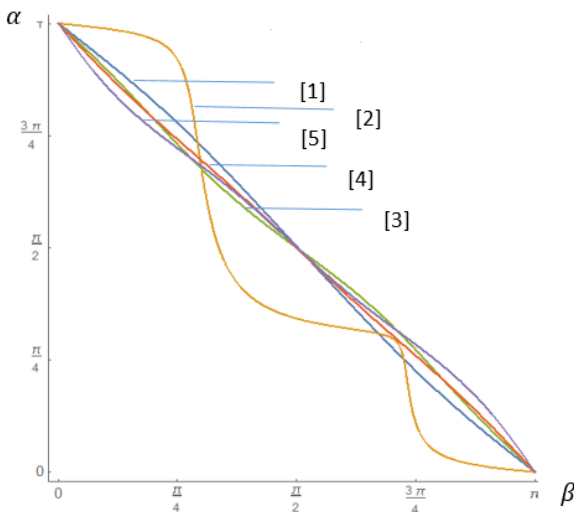


Рис. 2

**Список литературы:**

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. – Ереван, 1987. – 338 с.
2. Ду Цин-Хуа Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды // Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н.И. Мухелишвили. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 152–156.

3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Науково-думка, 1968. – 888 с.
4. Чобанян К.С. О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел // ДАН Арм. ССР. – 1961. – Т. 32. – №2. – С. 69–77.
5. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика, 4, 86. – М.: Мир, 1964.
6. Neuber H. On the general solution of linear elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat-continuum. Lecture at the 11-th international congress of applied mechanics. – Munchen, 1964.
7. Schijve J. Note on couple stresses // J. Mech. Phys. Solids. – 1966. – Vol. 14. – P. 113–120.
8. Lakes R.S. Experimental micro mechanics methods for conventional and negative Poisson's ratio cellular solids as Cosserat continua // J. Engng Mater. Techn. – 1991. – V. 113. – Iss. 001. – P. 148–155.

Варданыан Седрак Ваникович – канд. физ.-мат. наук, доцент (докторант кафедры теории пластичности МГУ им. М.В. Ломоносова), e-mail: [svardanyan@datafoundry.ai](mailto:svardanyan@datafoundry.ai)  
*PhD Sedrak Vardanyan, e-mail: [svardanyan@datafoundry.ai](mailto:svardanyan@datafoundry.ai)*

Для цитирования:

Варданыан С.В. Малонапряженное состояние в плоской задаче теории моментных напряжений // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 10–17.

Citation:

Vardanyan S.V. Low stress state in a plane problem of the theory of moment stresses // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 10–17.

УДК 539.3

## ОБЛАСТИ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

*А.Г. Козел*

Белорусский государственный  
университет транспорта  
г. Гомель, Беларусь

*Аннотация:* предложенная постановка и рекуррентное решение краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной упругопластической пластины с легким заполнителем, связанной с двухпараметрическим упругим основанием Пастернака.

*Ключевые слова:* трёхслойная круговая пластина; осесимметричный изгиб; основание Пастернака; области нелинейности

## THE FIELD OF PHYSICAL NONLINEARITY IN A THREE-LAYER PLATE ON THE PASTERNAK'S FOUNDATION

*Abstract:* the proposed formulation and recurrent solution of the boundary value problem allows us to investigate the stress-strain state of a circular three-layer elastoplastic plate with a lightweight filler associated with Pasternak's two-parameter elastic base.

*Keywords:* circular sandwich plate; axisymmetrical bending; Pasternak foundation; the field of nonlinearity.

### Введение

Создание изделий, отвечающих всем современным требованиям строительства и машиностроения, в настоящее время связано с использованием новых конструкционных решений. В связи с этим значительное распространение получили композитные элементы конструкций, имеющие слоистую структуру. Многослойные конструкции, при относительно малом весе, способны обеспечить не только хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства, заданные показатели прочности и жёсткость, но и противостоять ряду других негативных воздействий. Поэтому возникает актуальная проблема разработки эффективных методик расчёта напряженно-деформированного состояния трёх-

слоистых пластин, связанных с упругим сложным двухпараметрическим основанием.

Деформирование слоистых стержней, пластин и оболочек переменными нагрузками рассматривалось в работах [1–4]. Изгиб трехслойных элементов конструкций в температурном поле исследовалось в статьях [5; 6]. Модель Винклера применялась для анализа деформирования трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием, в статье [7]. Модель основания Пастернака (рис. 1), учитывающая его сжимаемость и связность, была использована для описания упругого изгиба несимметричных по толщине упругих трёхслойных пластин в работах [8–12].

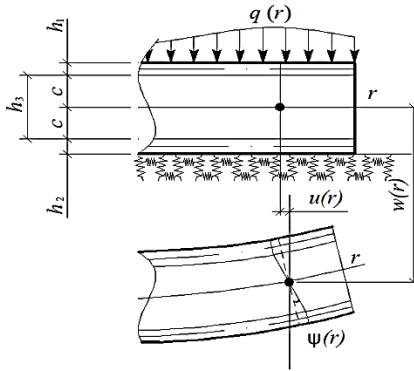


Рис. 1. Схема деформирования круговой пластины

Здесь приведена постановка и аналитическое решение краевой задачи об осесимметричном деформировании упругопластической трехслойной пластины с легким заполнителем на двухпараметрическом основании Пастернака. Определены области нелинейного деформирования материалов слоев.

**1. Постановка краевой задачи.** В тонких внешних слоях приняты гипотезы Кирхгофа, в толстом легком несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r)$ . За искомые функции приняты: прогиб пластины  $w(r)$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi(r)$  и радиальное перемещение координатной плоскости  $u(r)$ . Осесимметричная нагрузка  $q^{(n)}$  распределена по верхнему слою пластины, реакция основания согласно модели Пастернака:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w,$$

где  $\kappa_0, t_f$  – коэффициенты сжатия и сдвига материала основания,  $\Delta$  – оператор Лапласа

Предполагается, что материалы несущих слоев в процессе деформирования проявляют упругопластические свойства, заполнитель – нелинейно упругие. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3\vartheta_{rz}^{(3)}(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)})), \quad (k = 1, 2, 3, \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $s_\alpha^{(k)}, \vartheta_\alpha^{(k)}, \sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k, K_k$  – модули сдвиговой и объёмной деформации  $k$ -го слоя;  $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$  – функции пластичности и физической нелинейности материалов слоев, которые в случае  $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$  следует положить равными нулю;  $\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформаций в  $k$ -м слое ( $k=1, 2$ ),  $\varepsilon_y^{(k)}$  – деформационный предел текучести (физической нелинейности) материалов несущих слоёв;  $s_{rz}^{(3)}, \vartheta_{rz}^{(3)}$  – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе.

Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}) \end{aligned} \quad (2)$$

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (1), представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций, выделив упругие (индекс «е») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{\omega\omega}^{(k)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{r\omega}^{(3)}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ae}^{(k)} &= 2G_k\vartheta_\alpha^{(k)} + K_k\theta^{(k)}, \quad \sigma_{\omega\omega}^{(k)} = 2G_k\omega_k\vartheta_\alpha^{(k)}, \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3\vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{r\omega}^{(3)} = 2G_3\omega_3\vartheta_{rz}^{(3)}. \end{aligned}$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «е») и нелинейной (индекс «ω») частей:

$$T_{\alpha}^{(k)} = T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad M_{\alpha}^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha \omega}^{(k)}.$$

Величины  $T_{\alpha e}^{(k)}$ ,  $T_{\alpha \omega}^{(k)}$ ,  $M_{\alpha e}^{(k)}$ ,  $M_{\alpha \omega}^{(k)}$  вычисляются по формулам (2), в которых напряжения  $\sigma_{\alpha}^{(k)}$  нужно заменить соответственно на  $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$ ,  $\sigma_{\alpha \omega}^{(k)}$  (3). После этого обобщенные внутренние усилия будут следующими:

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= T_{\alpha e} - T_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ M_{\alpha} &= M_{\alpha e} - M_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ H_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), \quad H_{\alpha \omega} = M_{\alpha \omega}^{(3)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1)} - T_{\alpha \omega}^{(2)}) \end{aligned} \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины на упругом основании была получена с помощью принципа Лагранжа в [11]. Поэтому ее можно применить и здесь как исходную. Используя разделение обобщенных внутренних усилий на линейные и нелинейные составляющие (4) уравнения равновесия приводим к виду:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= p_{\omega}, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = h_{\omega}, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w &= -q + q_{\omega}, \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициенты  $a_i$  и дифференциальные операторы  $L_2$ ,  $L_3$  будут

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+, \\ a_4 &= c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}c K_3^+), \\ a_5 &= c[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+], \\ a_6 &= h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+, \\ K_k^+ &\equiv K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3}G_k, \end{aligned}$$

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Здесь в правой части уравнений собраны нелинейные добавки и включены в слагаемое с нижним индексом « $\omega$ »:

$$p_\omega = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r} (T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r} (H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \quad (6)$$

**2. Решение краевой задачи.** Система уравнений (5) является нелинейной, поэтому для её решения применим метод упругих решений Ильюшина. В этом случае она переписывается в итерационном виде:

$$L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) = p_\omega^{(n-1)},$$

$$L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) = h_\omega^{(n-1)},$$

$$L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) - \kappa_0 w^{(n)} + t_f \Delta w^{(n)} = -q_0 + q_\omega^{(n-1)}, \quad (7)$$

где  $n$  – номер приближения;  $p_\omega^{(n-1)}$ ,  $h_\omega^{(n-1)}$ ,  $q_\omega^{(n-1)}$  – дополнительные «внешние» нагрузки, которые на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения по формулам типа (6)

$$p_\omega^{(n-1)} = T_{r\omega,r}^{(n-1)} + \frac{1}{r} (T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)}),$$

$$h_\omega^{(n-1)} = H_{r\omega,r}^{(n-1)} + \frac{1}{r} (H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)}),$$

$$q_\omega^{(n-1)} = M_{r\omega,rr}^{(n-1)} + \frac{1}{r} (2M_{r\omega,r}^{(n-1)} - M_{\varphi\omega,r}^{(n-1)}), \quad (8)$$

где

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)(n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)}) \vartheta_\alpha^{(k)(n-1)} dz,$$

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)(n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)}) \vartheta_\alpha^{(k)(n-1)} z dz,$$

$$H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(3)(n-1)} + c \left( T_{\alpha\omega}^{(1)(n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)(n-1)} \right)$$

Таким образом, на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками (8).

С помощью первых двух в третьем уравнении системы (7) обнуляем коэффициенты перед искомыми функциями  $u^{(n)}$  и  $\psi^{(n)}$ . После двукратного интегрирования этих уравнений система (7) приводится к виду

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= b_1 w_{,r}^{(n)} - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^r (a_2 h_{\omega}^{(n-1)} - a_4 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_1^{(n)} r + \frac{C_2^{(n)}}{r}, \\ \psi^{(n)} &= b_2 w_{,r}^{(n)} + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^r (a_1 h_{\omega}^{(n-1)} - a_2 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_3^{(n)} r + \frac{C_4^{(n)}}{r}, \\ L_3(w_{,r}^{(n)}) - t_{f1} \Delta w^{(n)} + \kappa^4 w^{(n)} &= q_0 + f_{\omega}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, C_4^{(n)}$  – константы интегрирования на  $n$ -м шаге;

$$t_{f1} = t_f D, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D,$$

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2},$$

$$f_{\omega}^{(n-1)} = -D q_{\omega}^{(n-1)} + D_1 \frac{1}{r} (r p_{\omega}^{(n-1)})_{,r} + D_2 \frac{1}{r} (r h_{\omega}^{(n-1)})_{,r},$$

$$D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},$$

$$D_1 = \frac{a_1 (a_3 a_4 - a_2 a_5)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},$$

$$D_2 = \frac{a_1 (a_1 a_5 - a_2 a_3)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Решение третьего уравнения системы (9) получим по методике, примененной при решении задачи теории упругости [13]. В результате

$$\begin{aligned} w^{(n)} &= C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6^{(n)} H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + \\ &+ C_7^{(n)} J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_8^{(n)} H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r) + w_p^{(n)}(r), \end{aligned} \quad (10)$$



где  $J_0(\sqrt{a}kr)$ ,  $J_0(\sqrt{\bar{a}}kr)$  – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов  $\sqrt{a}kr$  и  $\sqrt{\bar{a}}kr$ ;  $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr)$ ,  $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr)$  – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов; а и  $\bar{a}$  – корни характеристического уравнения, полученные в [8];  $w_p^{(n)}(r)$  – частное решение третьего уравнения системы (9).

Для сплошных круговых пластин, исходя из ограниченности прогиба в начале координат, в (10) следует положить  $C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = 0$ .

Рекуррентное решение (9), (10) с учетом ограниченности перемещений в центре пластины  $C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = 0$ , принимает вид

$$w^{(n)} = C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a}kr) + C_7^{(n)} J_0(\sqrt{\bar{a}}kr) + w_p^{(n)}(r),$$

$$u^{(n)} = b_1 w_{,r}^{(n)} - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r (a_2 h_\omega^{(n-1)} - a_4 p_\omega^{(n-1)}) dr dr + C_1^{(n)} r,$$

$$\psi^{(n)} = b_2 w_{,r}^{(n)} + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r (a_1 h_\omega^{(n-1)} - a_2 p_\omega^{(n-1)}) dr dr + C_3^{(n)} r. \quad (11)$$

Константы интегрирования  $C_1^{(n)}$ ,  $C_3^{(n)}$ ,  $C_5^{(n)}$ ,  $C_7^{(n)}$  следуют из условий закрепления пластины.

Краевая задача по определению перемещений замыкается присоединением к (11) граничных условий. В частности, при жёсткой заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0 \quad \text{при } r = R.$$

**3. Численные результаты.** Рассмотрим защемлённую по контуру пластину единичного радиуса  $R=1$  м, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт-4–Д16Т. Принимались: величина интенсивности поверхностной нагрузки  $q_0 = -40$  МПа; толщины слоёв,  $h_1 = h_2 = 0,04$  м,  $h_3 = 0,4$  м.; аналитический вид функций пластичности и нелинейности

$$\omega_k(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y, \\ A_k (1 - \varepsilon_y^{(k)} / \varepsilon_u)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u > \varepsilon_y, \end{cases} \quad (12)$$

где  $A_k$ ,  $\alpha_k$  – константы нелинейности материалов.

Для рассматриваемых материалов параметры упругости и нелинейности материалов слоев, включенные в формулу (12), заимствованы из [13, 14]: для Д16Т –  $A_1 = 0,96$ ;  $\alpha_1 = 2,34$ ;  $\varepsilon_y^{(1)} = 0,735 \%$ , для фторопласта –  $A_3 = 0,905$ ;  $\alpha_3 = 1,48$ ;  $\varepsilon_s = \varepsilon_y^{(3)} = 3,3 \%$ .

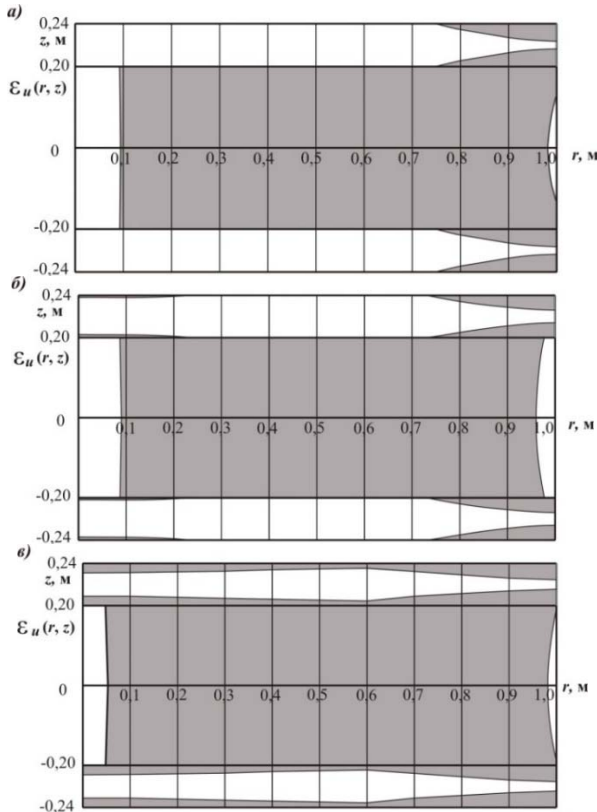


Рис. 2. Области физической нелинейности вдоль радиуса пластины в случае различных коэффициентов сдвига материала основания

На рис. 2 показаны области физической нелинейности вдоль радиуса пластины при основании средней жёсткости ( $K_0 = 100 \text{ МПа/м}$ ) и различных коэффициентах сдвига материала ос-

нования  $t_f$  (МПа·м):  $1 - t_f = 35$ ,  $2 - t_f = 10$ ,  $3 - t_f = 0$ . Области физической нелинейности увеличиваются при уменьшении коэффициента сдвига материала основания. При использовании модели основания Винклера (этот случай соответствует  $t_f = 0$ ) параметры НДС пластины получим завышенные.

### Выводы

Предложенная постановка и решение краевой задачи позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние упругопластической круговой трехслойной пластины с толстым легким заполнителем, связанной с упругим основанием Пастернака. Расчёт с применением модели Пастернака показывает возможность увеличения расчётной грузоподъёмности соответствующих элементов конструкций.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).*

### Список литературы:

1. Горшков А.Г. Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв РАН. Механика твердого тела. – 2001. – №1. – С. 79–85.
2. Старовойтов Э.И. О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных пологих оболочек // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. – 1980. – №2. – С. 92–96.
3. Москвитин В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №1. – С. 116–121.
4. Москвитин В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитивных материалов. – 1985. – №3. – С. 409–416.
5. Старовойтов Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле // Пробл. машиностроения и автоматизации. – 2012. – №3. – С. 91–98.
6. Старовойтов Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – №1. – С. 91–97.
7. Starovoitov É.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44. – №9. – P. 1032–1040. DOI: 10.1007/s10778-009-0115-9.
8. Козел А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака // Проблемы физики, математики и техники. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2017. – №1 (30). – С. 42–46.
9. Козел А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.

10. Козел А.Г. Деформированное состояние трёхслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – №1

11. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://mathmod.esrae.ru/17-60> (дата обращения: 11.06.2018).

12. Старовойтов Э.И. Изгиб упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24. – №1. – С. 392–406.

13. Козел А.Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – №6 (332). – С. 25–35.

14. Старовойтов Э.И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. – 1988. – № . – С. 11–15.

15. Старовойтов Э.И. Сопrotивление материалов. – М.: Физматлит, 2008. – 384 с.

Козел Анастасия Григорьевна, аспирант кафедры «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта, Гомель, Беларусь. e-mail: [kostjaschka2009@mail.ru](mailto:kostjaschka2009@mail.ru)

*Kozel Anastasiya Postgraduate of the department «Structural Mechanics» of the Belarusian State University of Transport, e-mail: [kostjaschka2009@mail.ru](mailto:kostjaschka2009@mail.ru)*

Для цитирования:

Козел А.Г. Области физической нелинейности в трёхслойной пластине на основании Пастернака // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 18–27.

Citation:

Kozel A.G. The field of physical nonlinearity in a three-layer plate on the pasternak's foundation // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 18–27.

УДК 539.3

## К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛА

*Л.А. Максимова*

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова»  
г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* в работе рассматриваются вопросы определения и устойчивости напряженного состояния пространственного бруса в различных постановках одномерном, двумерном и трехмерном. Функции напряжения зависят от трех координат. Обсуждается предельный переход. Рассматривается анизотропия материала. Полученное решение исследуется на устойчивость.

*Ключевые слова:* напряженное состояние, главное напряжение, устойчивость, анизотропия.

## TO THE QUESTION OF STABILITY OF THE DECISION OF THE STRESSED STATE OF THE BEAM

*Abstract:* the paper considers the issues of determining and stability of the stress state of a beam in various settings of one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional. The voltage functions depend on three coordinates. The passage to the limit is discussed. The anisotropy of the material is considered. The result is investigated for stability.

*Keywords:* stress state, main stress, stability, anisotropy.

### 1. Введение. История вопроса

Вопросам устойчивости уделяется большое значение как в математическом анализе, так и в технических задачах [1–4].

Решение любой математической задачи, после того как составлена математическая модель, состоит из нескольких этапов: 1) выбор метода решения (численный, аналитический, разностный); 2) проверка на точность или адекватность полученного решения (то есть на устойчивость). Каждый из этих этапов может увести от правильного решения. Самый простой этап выбор метода. Допустим, выбрали метод и решили им. Как проверить правильность решения? Одним из ответов может служить частное решение модельной, сильно упрощенной задачи совпадающее с полученным решением. Но это не дает обоснование для

проверки правильности в более сложном случае. Сравнительный анализ полученных решений двумя и более методами тоже не является панацеей, если не существует точное аналитическое решение. Исследование же на устойчивость само по себе является сложным процессом. Еще Ляпунов ввел понятие асимптотической устойчивости (после введения понятия просто устойчивости). В реальных технических многокритериальных задачах при исследовании на устойчивость иногда используют не только отдельные параметры, но и функционалы.

## 2. Устойчивость при определении напряженного состояния

В механике деформируемого твердого тела основным понятием является напряжение, как мера внутренних сил, возникающих в конструкциях при влиянии нагрузок, температур и тому подобного. При исследовании напряженного состояния элементов конструкций обычно рассматривают два исходных состояния одномерное и двумерное, то есть плоское. Пространственное рассматривают намного реже и обычно оно является совокупностью нескольких плоских состояний. Естественно, что такие задачи намного проще и прозрачнее.

Пространственные задачи не только объемны и сложны, но и имеют ряд особенностей. Результатом этих особенностей может получиться решение, в котором может не существовать предельный переход от общей задачи к частной (плоской, например) [5–7, 10, 11].

**Пример 1.** Задано почти одноосное напряженное состояние ( $\sigma_x = 40$  МПа,  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ), с некоторой поправкой на касательные напряжения ( $\tau_{xy} = 30$  МПа,  $\tau_{xz} = 10$  МПа,  $\tau_{yz} = 15$  МПа). Требуется определить главные напряжения и их направления. Решив характеристическое вековое уравнение относительно напряжений, получим:  $\sigma_1 = 60,31$  МПа,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -20,31$  МПа.

Определим значения направляющих косинусов для главных площадок (табл. 1.)

Таблица 1

	$\sigma_1=60,31$	$\sigma_2=0$	$\sigma_3 = 20,31$
$l_i$	0,8377	- 0,42857	- 0,3384
$m_i$	0,4810	0,28571	0,82886
$n_i$	0,2585	0,85714	- 0,4455

Сравнивая полученные напряжения с исходными, делаем вывод что добавочные касательные напряжения не только добави-

ли существенный вклад в плоское состояние, но и существенно изменили максимальные напряжения конструктивного элемента.

**Пример 2.** Рассмотрим плоское состояние.  $\sigma_x = -30$  МПа,  $\sigma_y = -50$  МПа,  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xy} = 40$  МПа,  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  МПа. Решив, получим  $\sigma_1 = 1,23$  МПа,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -81,23$  МПа.

Таблица 2

	$\sigma_1 = -1,23$	$\sigma_2 = 0$	$\sigma_3 = 81,23$
$l_i$	-0,778	0	-0,80
$m_i$	0,615	0	0,6
$n_i$	0	1	0

**Пример 3.** Рассмотрим возмущенное плоское состояние.  $\sigma_x = -33$  МПа,  $\sigma_y = -50$  МПа,  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xy} = 40$  МПа,  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  МПа. Решив, получим  $\sigma_1 = 0$  МПа,  $\sigma_2 = -0,61$  МПа,  $\sigma_3 = -82,39$  МПа.

Таблица 3

	$\sigma_1 = 0$	$\sigma_2 = -0,61$	$\sigma_3 = 82,39$
$l_i$	0	0,777	-0,772
$m_i$	0	0,629	-0,635
$n_i$	1	0	0

Сравнив результаты примера 2 и 3, видим, что данное плоское состояние является устойчивым. Это еще может объясняться и тем, что мы в этих задачах остаемся в этом же плоском состоянии.

**Пример 4.** Рассмотрим некоторое пространственное напряженное состояние:  $\sigma_x = 10$  МПа,  $\sigma_y = -20$  МПа,  $\sigma_z = 30$  МПа,  $\tau_{xy} = 20$  МПа,  $\tau_{yz} = 30$  МПа,  $\tau_{zx} = 40$  МПа. Получим:  $\sigma_1 = 74,87$  МПа,  $\sigma_2 = -20,74$  МПа,  $\sigma_3 = -34,13$  МПа. Результаты запишем в табл. 2.

Таблица 4

	$\sigma_1 = 74,87$	$\sigma_2 = 20,74$	$\sigma_3 = 34,13$
$l_i$	0,567525	0,821073	0,060981
$m_i$	0,354519	-0,175902	-0,918045
$n_i$	0,743073	-0,543042	0,391744

По результатам видно, что одно из главных напряжений более чем в два раза превышает из заданных. Таким образом, истинное напряженное состояние «сокрыто», и определить его можно только расчетами.

### 3. Устойчивость и погрешность

Обычно при решении любой технической задачи, решение состоит из нескольких последовательных этапов. На каждом этапе решается своя мини задача, которая имеет погрешность. Эта погрешность переходит в следующий этап и может нарастать. Выявить эти погрешности часто не представляется возможным, даже при условии сходимости решения. Относительная погрешность является расчетной, а не истинной, в связи с тем, что точного решения обычно не имеем. Также неизвестно не только математическое ожидание определяемой величины, но и ее дисперсия. Случайные явления, влияющие на истинное состояние тел, не могут быть как правило описаны плоскими задачами. Снятие же показаний приборов также далеко от точности. Таким образом большие отклонения при эксплуатации от нормативов, могут быть в некоторых случаях обусловлены неустойчивостью задачи. Выходом из этого положение может быть разработка комплекса программ, проверяющего решение на устойчивость при некотором размахе исходных данных.

### 4. Выводы

Математическое моделирование, выбор метода и получение решения, являются первоочередной, но не последней задачей. После ее решения, необходимо исследовать задачу на устойчивость и провести математический анализ полученных результатов. Как показывают печальные примеры, этот анализ способен сделать только математик, знающий глубину используемых методов [8; 9].

#### *Список литературы:*

1. Ишлинский А.Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута// ПММ. – 1943. Т. 7. – Вып. 2. – С. 109–130; Прикладные задачи механики. Т. 1. – М.: Наука, 1986. – С. 221–250.
2. Ишлинский А.Ю. Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины// ПММ. – 1943. Т. 7. – Вып. 6. – С. 405–412; Прикладные задачи механики. Т. 1. – М.: Наука, 1986. – С. 250–262.
3. Баничук Н.В. О некоторых особенностях задач устойчивости и колебаний прямоугольных пластин / Н.В. Баничук, А.Ю. Ишлинский // Прикл. математика и механика. – 1995. – Т. 59. Вып. 4. – С. 620–625.
4. Ильюшин А.А. Соппротивление материалов / А.А. Ильюшин, В.С. Ленский. – М.: Физматгиз, 1959. – 368 с.
5. Ивлев Д.Д. Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы / Д.Д. Ивлев. – Воронеж: ВГУ, 2005. – 357 с.
6. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
7. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред/ Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 1. – 445 с.



8. Нигматулин Р. Об оптимальной доли государственных расходов в ВВП и темпах экономического роста // Вопросы экономики. – 2003. – №3.

9. Илларионов А. Размеры государства и экономический рост / А. Илларионов, Н. Пивоварова // Вопросы экономики. 2002. – №9

10. Петров М.В. Устойчивость при изгибе тонкостенных оболочек, заполненных различными сыпучими материалами / М.В. Петров, Е.Г. Гоник, Т.Г. Федорова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2017. – №4 (34). – С. 52–58.

11. Гоник Е.Г. Исследование упругопластического изгиба и потери устойчивости оболочек вращения с учетом контактного взаимодействия с сыпучим наполнителем / Е.Г. Гоник, А.И. Кибец, М.В. Петров [и др.] // Динамические и технологические проблемы механики и конструкций и сплошных сред: Материалы XXIII международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – 2017. – С. 57–59.

Максимова Людмила Анатольевна, профессор кафедры строительных конструкций ЧГУ им. И.Н. Ульянова, д-р физ.-мат. наук, e-mail: maximova\_ng@mail.ru

*Maksimova Ludmila Anatolievna, Professor, Department of building structures of CHGU named by I.N. Ulyanov, doctor of physico-mathematical Sciences, e-mail: maximova\_ng@mail.ru*

Для цитирования:

Максимова Л.А. К вопросу об устойчивости решения напряженного состояния тела // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 28–32.

Citation:

Maksimova L.A. To the question of stability of the decision of the stressed state of the beam// Modern problems of continuum mechanics –2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 28–32.

УДК 539.374

## ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

*Ю.В. Немировский*

ФГБУН «Институт теоретической  
и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича» СО РАН  
г. Новосибирск, Россия

*С.В. Тихонов*

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова»  
г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* в работе рассматривается задача продольно-поперечного изгиба многослойного бетонного стержня с учетом влияния силы тяжести. Закон деформирования каждого слоя стержня принят в виде аппроксимации полиномом второго порядка. Приближенное решение указанных задач ищется методом Бубнова-Галеркина.

*Ключевые слова:* продольно-поперечный изгиб, стержень, предельная деформация, бетон, диаграмма деформирования бетона, растяжение, сжатие, метод Бубнова-Галеркина, Maple, сила тяжести.

## LONGITUDINAL-TRANSVERSE BENDING OF CON- CRETE RODS UNDER GRAVITY INFLUENCE

*Abstract:* the task of longitudinal-transverse bending of the multi-layer concrete rod taking into account the influence of gravity is considered in the work. The law of deformation of each layer of rod is adopted in the form of approximation with a polynomial of the second order. Approximate solution of these tasks is sought by Bubnov-Galerkin method

*Keywords:* longitudinally cross bend, core, limit deformation, concrete, chart of deformation of concrete, stretching, compression, Bubnov-Galerkina's method, Maple, gravity.

Связь напряжения и деформаций в  $i$ -ом слое стержня возьмем в виде квадратичного полинома [1]

$$\sigma_i = A_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2, \quad (1)$$

где  $\sigma_i$  – напряжения,  $\varepsilon$  – деформация,  $A_{1i}, A_{2i}$  – экспериментально определяемые коэффициенты, характеризующие свойства материала  $i$ -го слоя стержня.

Будем считать, что стержень имеет форму поперечного сечения, изображенного на рис. 1, где  $b_{01}, b_{02}, b_{03}, h_{01}, h_{03}$  – параметры сечения стержня,  $h_i$  – высота  $S_i$  слоя в сечении стержня.

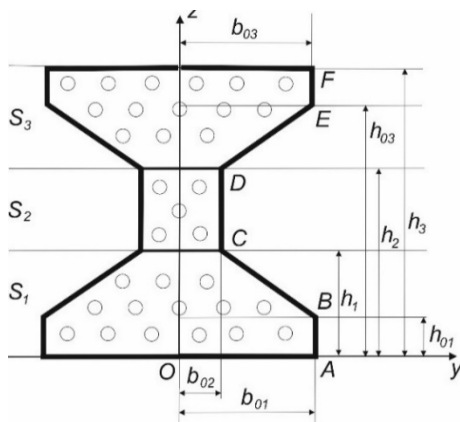


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

Коэффициенты  $A_{1i}, A_{2i}$  можно определить имея традиционные предельные характеристики бетонов, следуя методике изложенной в [1], или методом наименьших квадратов, если имеются диаграммы растяжения и сжатия бетонов. В таблице 1 приведены значения коэффициентов  $A_{1i}, A_{2i}$ , которые получены методом наименьших квадратов на основе диаграмм деформирования бетонов, полученных в работе [2], и предельные деформации  $\varepsilon_*^+, \varepsilon_*^-$  при растяжении и сжатии соответственно.

Таблица 1

Коэффициенты полинома второго порядка для бетонов марок В10, В30, В50

Класс бетона	$A_1$ , МПА	$A_2$ , МПА	$\varepsilon_*^-$ , %	$\varepsilon_*^+$ , %	$\bar{A}$ , %
В10	12488	5078524	0,084	0,0038	33,26
В30	32351	11660358	0,135	0,0045	38,14
В50	56490	21305730	0,186	0,0047	39,29

$\bar{A}$  – средняя ошибка аппроксимации.

Будем считать, что для внутренних силовых факторов справедливо

$$N = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sigma_i dS, \quad M_y = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sigma_i z dS, \quad (2)$$

и имеют место уравнения равновесия

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z - \frac{dm_y}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x. \quad (3)$$

где  $N$  – проекция вектора внутреннего усилия на ось  $x$ ,  $M_y$  – проекция вектора внутреннего момента на ось  $y$ ,  $q_x$ ,  $q_z$  – проекции вектора распределенной нагрузки приложенного к оси стержня,  $m_y$  – проекция вектора распределенного момента на ось  $y$ .

Будем считать справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява, тогда имеют место соотношения

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon_0(x) + z\kappa_y(x), \quad (4)$$

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y = \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad (5)$$

где  $u_0$ ,  $w_0$  – компоненты вектора перемещений точек осевой линии стержня вдоль осей  $x$  и  $z$  соответственно.

Если имеет место случай защемленного с обоих концов стержня, тогда справедливо

$$u_0(0) = w_0(0) = u_0(l) = w_0(l) = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{dw_0}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dw_0}{dx} \right|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (1)-(4) получим систему дифференциальных уравнений относительно перемещений с граничными условиями (6–7).

Решение указанных уравнений будем искать методом Бубнова-Галеркина в математическом пакете Maple [3].

Функции  $u_0(x)$ ,  $w_0(x)$  будем искать в виде

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^N B_k y_k(x), \quad w_0(x) = \sum_{k=1}^N C_k r_k(x),$$

где  $B_k, D_k$  – коэффициенты, которые определяют решение поставленной задачи.

Условия (6), (7) удовлетворим, полагая

$$y_k(x) = r_k(x) = \cos \frac{k-1}{l} \pi x - \cos \frac{k+1}{l} \pi x. \quad (9)$$

Если подставить перемещения (8) в полученные дифференциальные уравнения и обозначить через  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$  левые части соответствующих уравнений, положив в качестве базисных функций в методе Бубнова-Галеркина те же функции, что и в разложении (9)

$$f_k(x) = \cos \frac{k-1}{l} \pi x - \cos \frac{k+1}{l} \pi x, \quad k = 1 \dots N, \quad (10)$$

получим систему из  $2N$  алгебраических уравнений относительно  $2N$  неизвестных  $B_k, C_k, k = 1 \dots N$ ,

$$\int_0^l L_i(x) f_k(x) dx = 0, \quad i = 1 \dots 3, \quad k = 1 \dots N.$$

Рассмотрим стержень, защемленный с обоих концов (рис. 2).

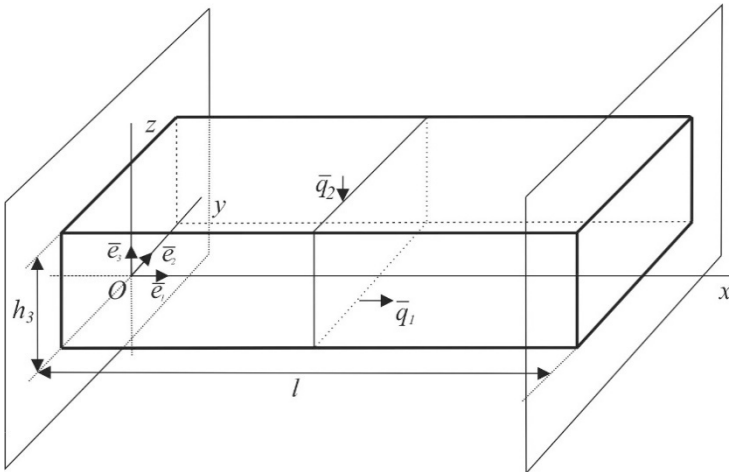


Рис. 2. Защемленный с обоих концов стержень

Будем считать, что на стержень действуют распределенные нагрузки

$$\bar{q}_1 = q_1 \bar{e}_1, \quad \bar{q}_2 = q_2 \bar{e}_3, \quad \bar{q}_{sk} = q_{sk1} \bar{e}_1 + q_{sk3} \bar{e}_3, \quad (12)$$

где  $\bar{q}_1$  – распределенная вдоль поверхности нижней грани стержня продольная нагрузка,  $\bar{q}_2$  – распределенная вдоль поверхности верхней грани стержня поперечная нагрузка,  $\bar{q}_{sk}$  –

вектор распределенной нагрузки массовых сил, действующих в  $k$ -ом сечении стержня.

Тогда получим для проекций нагрузок вдоль длины стержня

$$q_x = \int_{-b_i(0)}^{b_i(0)} q_1 dy + \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \int_{-b_i(z)}^{b_i(z)} q_{si1} dy, \quad q_z = \int_{-b_i(h_3)}^{b_i(h_3)} q_2 dy + \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \int_{-b_i(z)}^{b_i(z)} q_{si3} dy, \quad (13)$$

где  $b_i(z)$  – уравнение кривой ограничивающий контур сечения в  $i$ -ом слое.

Указанные нагрузки будут порождать распределенный момент

$$m_y = - \int_{-b_i(0)}^{b_i(0)} x q_1 dy + h_3 \int_{-b_3(h_3)}^{b_3(h_3)} q_2 dy - \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \int_{-b_i(z)}^{b_i(z)} (x q_{si3} - z q_{si1}) dy.$$

Если положить, что проекции нагрузок (12) имеют вид

$$q_1 = t_{11} + t_{12}x + t_{13}x^2, \quad q_2 = t_{21} + t_{22}x + t_{23}x^2, \quad (14)$$

$$q_{si1} = g \rho_i \sin \alpha, \quad q_{si3} = g \rho_i \cos \alpha,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\alpha$  – угол, определяющий направление действия силы тяжести по отношению к оси стержня,  $\rho_i$  – плотность  $i$ -го слоя бетонного стержня.

Если принять, что длина стержня равна  $l = 10$  м и первый слой стержня реализован из бетона марки В30, второй – В10, третий – В50, и параметры сечения стержня (рис. 1) имеют вид

$$h_0 = 0, h_1 = \frac{1}{5} \text{ м.}, h_2 = \frac{2}{5} \text{ м.}, h_3 = \frac{3}{5} \text{ м.}, h_{01} = \frac{1}{10} \text{ м.}, h_{03} = \frac{1}{2} \text{ м.}, \quad (15)$$

$$b_{01} = \frac{3}{10} \text{ м.}, b_{02} = \frac{4}{10} \text{ м.}, b_{03} = \frac{3}{10} \text{ м.},$$

плотность бетона для всех слоев принимается равной  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 2800 \text{ кг} / \text{м}^3$ , ускорение свободного падения

$g = -9,81 \text{ м} / \text{с}^2$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $N=5$ , коэффициенты, определяющие нагрузки (14) примем равными

$$t_{11} = -5000, t_{12} = -100 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}, t_{13} = -50 \frac{\text{кН}}{\text{м}^4},$$

$$t_{21} = -8000, t_{22} = -300 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}, t_{23} = -50 \frac{\text{кН}}{\text{м}^4}.$$

Решение, соответствующее данной задаче, имеет вид (рис. 3–6).

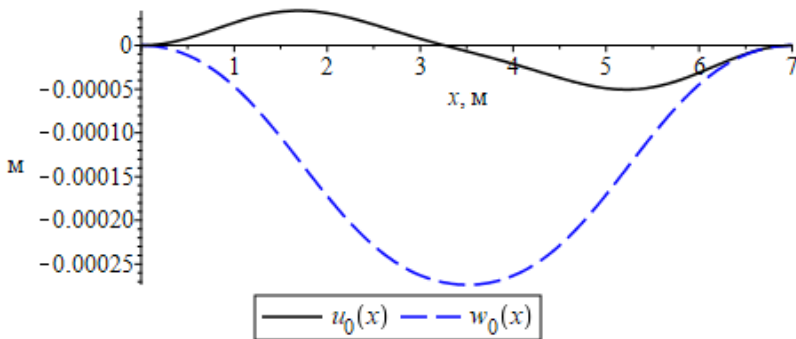


Рис. 3. График перемещений

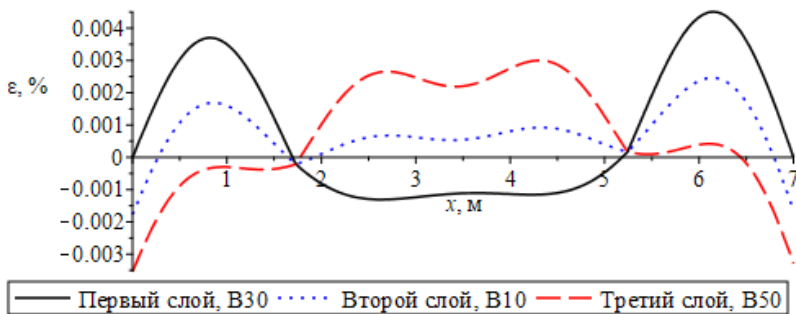


Рис. 4. График максимальных деформаций в сечении стержня

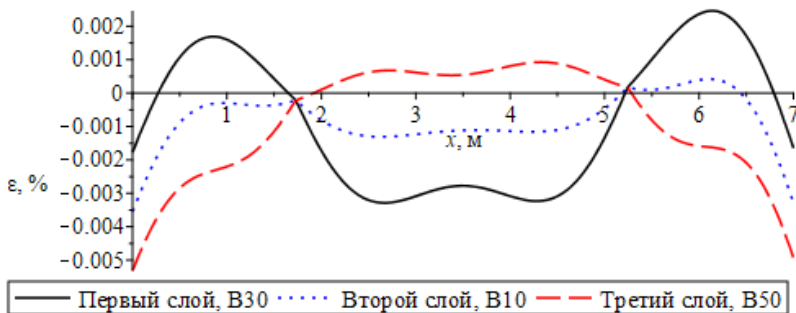


Рис. 5. График минимальных деформаций в сечении стержня

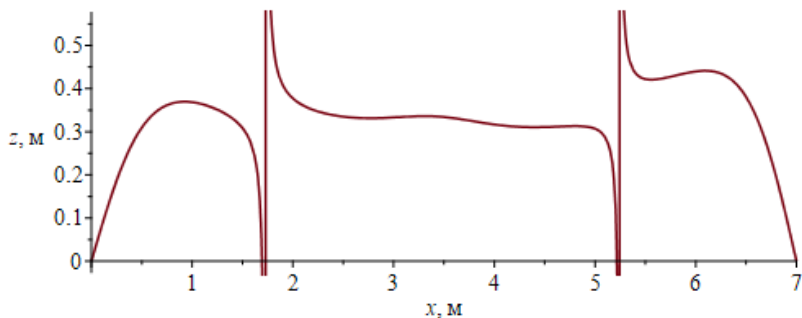


Рис. 6. Положение нейтральной линии в сечении

Как видно из рис. 4–5 деформация не превышает предельных значений для каждого слоя стержня (таблица 1). Значит, данное решение имеет место.

В случае, когда сила тяжести не учитывается ( $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ ), при тех же самых нагрузках и форме сечения решение имеет вид изображенной на рис. 7–10.

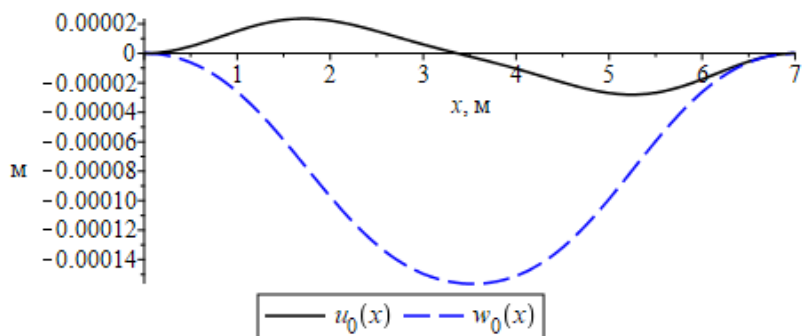


Рис. 7. График перемещений



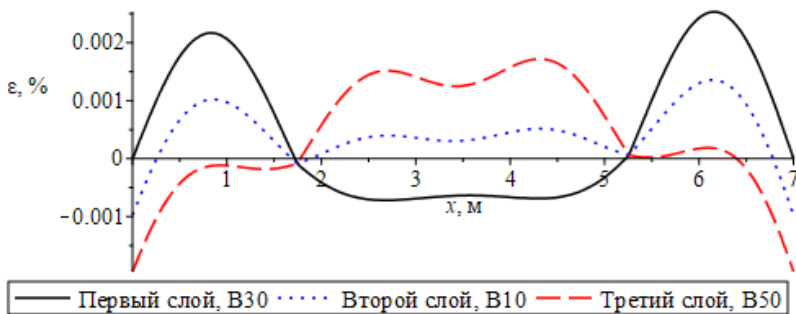


Рис. 8. График максимальных деформаций в сечении стержня

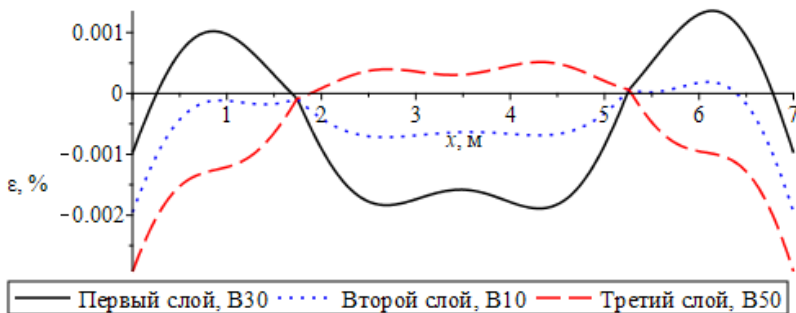


Рис. 9. График минимальных деформаций в сечении стержня

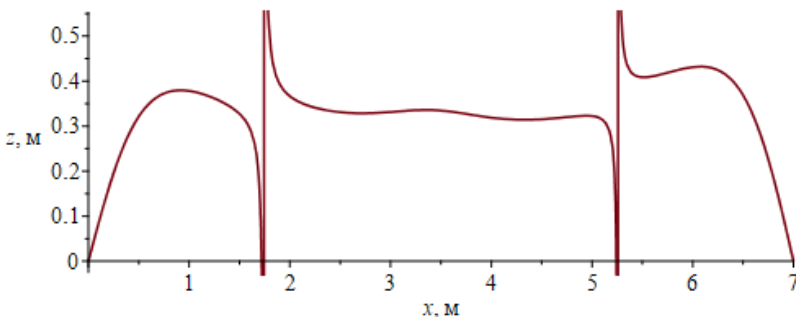


Рис. 10. Положение нейтральной линии в сечении

Из рисунков 4 и 8 можно заметить, что максимальные деформации в сечении в случае, когда не учитывается сила тяжести (рис. 8) практически в два раза ниже, чем в случае, когда она учитывалась (рис. 4).

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 17-41-210272 р\_поволжье\_а, 19-01-00038-а.*

**Список литературы:**

1. Немировский Ю.В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2018. – №3 (37). – С. 26–37

2. Маилян Л.Р. Расчет железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов / Л.Р. Маилян, Е.И. Иващенко. – Ростов н/Д.: Ростовский гос. строит. ун-т., 2006. – 222 с.

3. Голоскоков Д.П. Построение базиса для одномерных краевых задач в системах символьных вычислений // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. – Вып. 1. – С. 77–85.

Юрий Владимирович Немировский, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия. e-mail: nemiryury@mail.ru

Тихонов Сергей Владимирович, канд. экон. наук, доцент, Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия, e-mail: strangcheb@mail.ru

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, e-mail: nemiryury@mail.ru*

*Tikhonov Sergey Vladimirovich, Ph. D., Assoc. Prof., Federal State Educational Budget Institution of Higher Education «The Ulianov Chuvash State University», Chuvash Republic, Cheboksary, e-mail: strangcheb@mail.ru*

**Для цитирования:**

Немировский Ю.В. Продольно-поперечный изгиб бетонных стержней с учетом влияния силы тяжести / Ю.В. Немировский, С.В. Тихонов // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 33–41.

**Citation:**

Nemirovsky Yu.V. Longitudinal-transverse bending of concrete rods under gravity influence / Yu.V. Nemirovsky, S.V. Tikhonov // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 33–41.

УДК 539.3

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

*А.В. Нестерович*

Белорусский государственный  
университет транспорта  
г. Гомель, Беларусь

*Аннотация:* рассмотрено растяжение – сжатие трехслойной упругой пластины в температурном поле. Для описания кинематики пластины приняты гипотезы ломаной линии. Проведен численный анализ перемещений при различных температурах.

*Ключевые слова:* термосиловое поле, осесимметричное деформирование, трехслойная круговая пластина.

## AXISYMMETRIC TENSION — COMPRESSION OF A CIRCULAR THREE-LAYER PLATE IN A TEMPERATURE FIELD

*Abstract:* the tension – compression of a three-layer elastic plate in a temperature field is considered. To describe the kinematics of the plate, hypotheses of the broken line are adopted. A numerical analysis of displacements at various temperatures is performed.

*Keywords:* thermal force field, axisymmetric deformation, three-layer circular plate.

Поперечные колебания трехслойных стержней и осесимметричные колебания круговых пластин рассмотрены в [1–4]. Квазистатическое переменное нагружение – в [5–8]. Деформирование трехслойных элементов конструкций в тепловом потоке исследовалось в работах [9–14]. Постановки краевых задач при неосесимметричном нагружении предлагались в [15–17].

Здесь рассматривается осесимметричное деформирование трехслойной круговой пластины в своей плоскости, для которой принимаются кинематические гипотезы ломаной линии. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , связанной со срединной плоскостью заполнителя. К верхней плоскости пластины приложена непре-

рывно распределенная нагрузка, проекции которой на оси координат:  $p_r(r, \varphi)$ ,  $p_\varphi(r, \varphi)$ .

Уравнения равновесия в перемещениях упругой трехслойной пластины при деформировании в своей плоскости получены из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$a_1 \left( u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = -p_r, \quad a_2 \left( u_{\varphi,r} + \frac{u_{\varphi,r}}{r} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) = -p_\varphi. \quad (1)$$

где  $a_i$  – коэффициенты, зависящие от температуры и определяемые через геометрические и упругие характеристики материалов слоев:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left( K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) dz, \quad a_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T_k) dz$$

$G_k(T_k)$ ,  $K_k(T_k)$  – модули сдвига и объемной деформации материалов слоев  $k$  – номер слоя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования.

Решение системы уравнений (1) будет следующим

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{a_1 r} \int_0^r \int_0^r p_r dr dr, \\ u_\varphi = C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{1}{a_2 r} \int_0^r \int_0^r p_\varphi dr dr, \quad (2)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  – константы интегрирования, определяемые граничными условиями. В центре пластины перемещения должны быть конечными, в связи с этим  $C_2 = 0$ ,  $C_4 = 0$ . При жесткой заделке контура пластины и при шарнирном опирании перемещения при  $r = r_0$  будут равны нулю, тогда

$$C_1 = \frac{1}{a_1 r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{r_0} p_r dr dr, \quad C_3 = \frac{1}{a_2 r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{r_0} p_\varphi dr dr.$$

При постоянных нагрузках  $p_r, p_\varphi$  константы  $C_1, C_3$  будут

$$C_1 = \frac{p_r r_0}{3a_1}, \quad C_3 = \frac{p_\varphi r_0}{3a_2}.$$

В результате, перемещения (2) приведены к виду:

$$u_r = \frac{p_r r}{3a_1} (r_0 - r), \quad u_\varphi = \frac{p_\varphi r}{3a_2} (r_0 - r). \quad (3)$$

*Численные результаты* получены при постоянных нагрузках  $p_r = 10^5$  Па,  $p_\varphi = 10^5$  Па, распределенных по всей поверхности

пластины. Материалы слоев Д16Т-фторопласт-Д16Т, механические характеристики которых приведены в [18], относительные толщины  $h_1 = 0.02$ ,  $h_2 = 0.04$ ,  $h_3 = 0.4$ , радиус пластины  $r_0 = 1$  м. При численной реализации решения (3) для описания зависимости параметров упругости материалов слоев от температуры использовалась формула Белла [16]. Температуры слоев принимались однородным.

На рис. 1 показано изменение вдоль радиуса пластины (а) – радиальных перемещений  $u_r$ , (б) – тангенциальных перемещений  $u_\varphi$  при различных температурах: 1 –  $T_1 = 293$  К, 2 –  $T_2 = 343$  К, 3 –  $T_3 = 393$  К

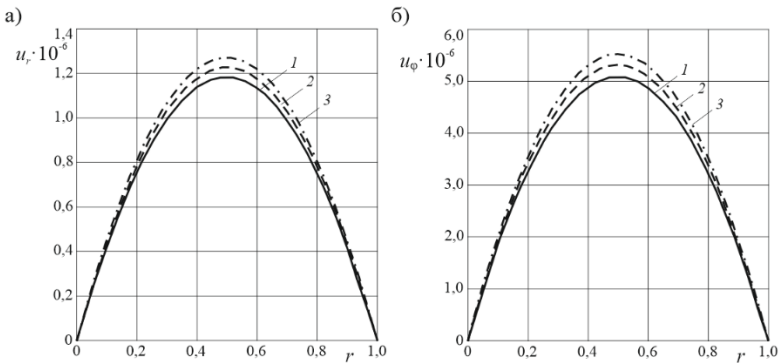


Рис. 1. Изменение перемещений вдоль радиуса пластины

Нагревание стержня на 50 К приводит к увеличению перемещений  $u_r$  на 3,7% по сравнению с изотермическим изгибом;  $u_\varphi$  увеличивается на 4,6%. При нагревании на 100 К подобное увеличение  $u_r$  достигает 7,3%;  $u_\varphi$  возрастает на 8,7%. Небольшие добавки перемещений при нагревании обусловлены жесткой заделкой контура пластины.

**Выводы.** Предложенная модель позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние упругих трехслойных пластин при осесимметричном деформировании в своей плоскости.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).*

**Список литературы:**

1. Starovoitov E.I. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V.Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39. – №12. – P. 1458–1463.

2. Горшков А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – №1. – С. 45–52.

3. Starovoitov É.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / É.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, D.V. Leonenko // Strength of materials. – 2003. – Vol. 35. – №4. – P. 346–352. DOI: 10.1023/A:1025834123302.

4. Starovoitov E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46. – №1. – P. 86–93.

5. Старовойтов Э.И. О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных пологих оболочек // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. – 1980. – №2. – С. 92–96.

6. Москвитин В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №1. – С. 116–121.

7. Москвитин В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – №3. – С. 409–416.

8. Горшков А.Г. Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв РАН. Механика твердого тела. – 2001. – №1. – 79–85.

9. Kharitonov V.V. Sandwich plate under thermal impact / V.V. Kharitonov, T.A. Starovoiyova, E.I. Starovoitov // Journal of Engineering Physics. – 1987. Vol. 52. – №6. – P. 734–740.

10. Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Вязкоупругопластический трехслойный стержень при термосиловых нагрузках // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1998. – №3. – С. 109–116.

11. Старовойтов Э.И. Циклическое нагружение трехслойных стержней в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Вестник Самарского гос. техн. Ун-та. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – №2 (31). – С. 147–155.

12. Старовойтов Э.И. Термосиловое деформирование ступенчатого трехслойного физически нелинейного стержня / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Инженерно-физический журнал. – 2016. – Т. 89. – №6. – С. 1608–1616.

13. Старовойтов Э.И. Переменный термосиловой изгиб трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2017. – Т. 53. – №5. – С. 927–946.

14. Starovoitov É.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44. – №9. – P. 1032–1040. DOI: 10.1007/s10778-009-0115-9.

15. Нестерович А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – №2 (27). – С. 54–61.

16. Нестерович А.В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т. транспорта. – Гомель, 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

17. Нестерович А.В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.

18. Старовойтов Э.И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. – 1988.– №4. – С. 11–15.

Нестерович Алина Викторовна – аспирант кафедры «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта; г. Гомель, 246653, ул. Кирова, д. 34, г. Гомель, Республика Беларусь; *e-mail*: [alina\\_nest92@bk.ru](mailto:alina_nest92@bk.ru)

*Nestsiarovich Alina Victorovna – postgraduate student of the Department «Construction Mechanics» Belarusian State University of Transport, Gomel, 34, Kirova street, Gomel, 246653, Republic of Belarus. e-mail: [alina\\_nest92@bk.ru](mailto:alina_nest92@bk.ru)*

Для цитирования:

Нестерович А.В. Осесимметричное растяжение – сжатие круговой трехслойной пластины в температурном поле // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 42–46.

Citation:

Nestsiarovich A.V. Axisymmetric tension – compression of a circular three-layer plate in a temperature field // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 42–46

УДК 691-492

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА НА СТЕНКУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

*М.В. Петров*

*Е.Г. Гоник*

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова»  
г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* цистерны являются одними из наиболее часто используемых емкостей для хранения и перевозки сыпучих материалов. При загрузке, разгрузке и транспортировке сыпучих материалов они подвергаются ситуациям, когда может произойти потеря устойчивости цистерны. Определение величины давления на внутреннюю стенку цилиндрической оболочки, создаваемого сыпучим материалом, является задачей при проектировании цистерн. В данной работе приведен один из способов измерения давления сыпучего материала на внутреннюю стенку цилиндрической оболочки.

*Ключевые слова:* модельный образец, цилиндрическая тонкостенная оболочка, стеклянные пьезометрические трубки, сыпучий материал, железный порошок ПЖ-3 и ПЖ-5, насыпная плотность сыпучего материала, гидростатический закон.

## EXPERIMENTAL MEASUREMENT OF THE PRES- SURE OF THE BULK MATERIAL ON THE WALL OF A CYLINDRICAL SHELL

*Annotation:* tanks are one of the most frequently used containers for storing and transporting bulk materials. When loading, unloading and transporting bulk materials, they are exposed to situations where instability of the tank may occur. Determination of the pressure on the inner wall of the cylindrical shell, created by the bulk material, is a task in the design of tanks. This paper presents one way to measure the pressure of bulk material on the inner wall of a cylindrical shell.

*Keywords:* model sample, cylindrical thin-walled shell, piezometric glass tubes, bulk material, iron powder ПЖ-3 and ПЖ-5, bulk density of bulk material, hydrostatic law.



Можно измерить давление с помощью приборов, приведенных в [2-4]. В статье [1] приводится методика определения давления на стенку цилиндрической оболочки. Давление на стенку цилиндрической оболочки определялось с помощью прибора, показанного на рис. 1.

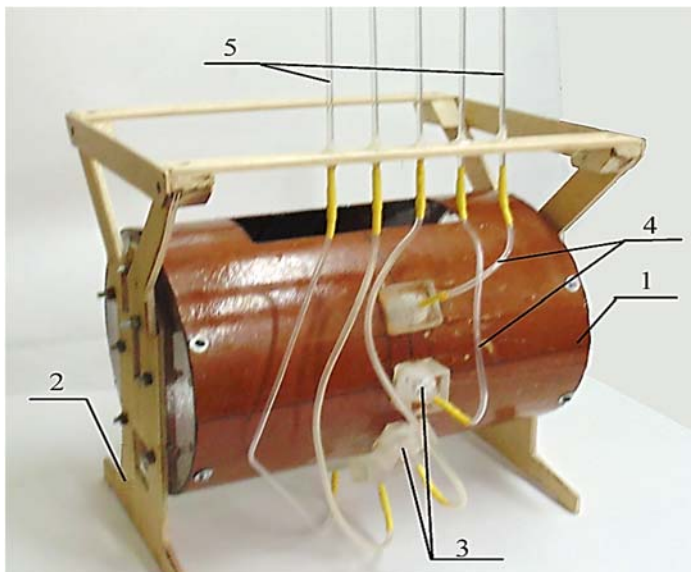


Рис. 1. Оборудование для проведения эксперимента.  
1 – модельный образец (цилиндрическая тонкостенная оболочка), 2 – деревянная опора, 3 – накладки переходники, 4 – гибкие трубки, 5 – стеклянные пьезометрические трубки

Материалом оболочки являлся алюминиевый сплав с толщиной стенки 1,35 мм и размерами, изображенными на рис. 2.

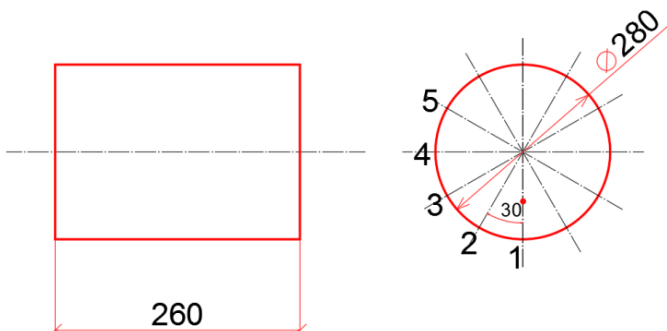


Рис. 2.

Принцип работы данной экспериментальной установки основан на измерении уровня вытесненной жидкости спирта в пьезометрических трубках 5, при заполнении оболочки сыпучим веществом. В качестве сыпучего материала был выбран железный порошок ПЖ-3 и ПЖ-5.

По полученным результатам были построены графики рис. 3. На графиках приведена зависимость распределения давления по точкам 1–5.

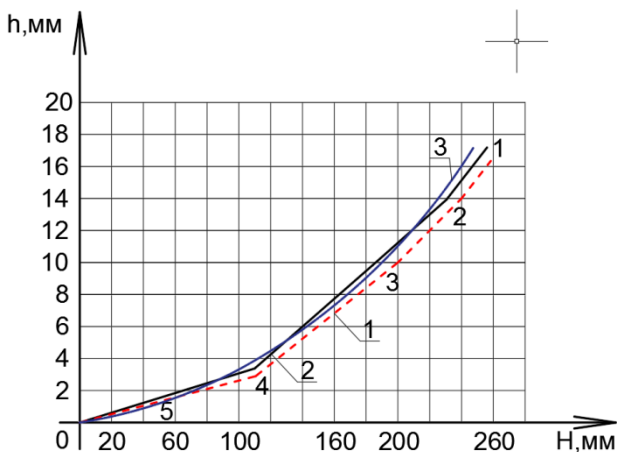


Рис. 3. Распределение давлений для: 1 – железного порошка ПЖ-3; 2 – железного порошка ПЖ-5; 3 – воды

$H$  – высота от верхнего уровня сыпучего вещества до точек 1-5, вычисленное в мм;  $h$  – разность высот в стеклянных трубках при заполнении оболочки сыпучим материалом в 1–5 рассматриваемых точках.

Для проверки правильности измерений и тарировки результатов измерений давления сыпучего материала выполнены измерения давления воды в точках 1–5 (рис. 3). Графики 1–3 на рис. 3 почти совпадают. Значит, давление сыпучего материала на стенку оболочки можно определить по аналогии давлением воды по формуле [5; 6]

$$P = \rho g H,$$

где  $\rho$  – насыпная плотность сыпучего материала,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

Выводы к эксперименту:

Распределение давления сыпучего материала по окружности происходит по гидростатическому закону. По графикам видно, что в самой нижней точке 1 давление максимально.

**Список литературы:**

1. Петров М.В. Экспериментальное определение давления сыпучей среды на внутреннюю стенку цилиндрической оболочки / М.В. Петров, Т.Г. Федорова, Е.Г. Гоник // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: Материалы III Международной (IX Всероссийской) конференции НАСКР–2016. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2016. – С. 119–123.
2. Патент СССР №1464055, кл. G 01 L 9/04. Полупроводниковый преобразователь давления. Авторы патента: В.С. Заседателей, С.М. Заседателей, В.В. Куренков. Оpubл. 1987.
3. Патент СССР №2120116. Тензометрический преобразователь давления. Авторы патента: Ю.А. Елисеев, Н.К. Аверьянов, Ю.С. Левит
4. Патент СССР (51)5 В 22 F 3/04, В 30В 05/02. Месдоза для определения давления в порошке. Авторы патента: В.А. Павлов, Б.В. Попов, С.Н. Якунин
5. Кудинов В.А. Гидравлика: учеб. пособ. / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов. – М.: Высшая школа; Абрис, 2012. – 199 с
6. Баженов В.Г. Экспериментальное и теоретическое исследование упруго-пластического выпучивания цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, под действием поперечной силы / В.Г. Баженов, Е.Г. Гоник, А.И. Кибец [и др.] // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159. – №3. – С. 282–295.

Петров Михаил Васильевич, д-р техн. наук, профессор кафедры строительных конструкций строительного факультета ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова». г. Чебоксары, Чувашская Республика, Приволжский федеральный округ РФ, пр-т Московский, д. 15, 428015, e-mail: katya.gonik@mail.ru .

Гоник Екатерина Григорьевна, старший преподаватель кафедры строительных конструкций строительного факультета ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова». г. Чебоксары, Чувашская Республика, Приволжский федеральный округ РФ, пр-т Московский, д. 15, 428015, e-mail: katya.gonik@mail.ru

*Petrov Mikhail Vasilyevich, doctor of technical Sciences, Professor of the Department of building construction faculty of fsbei HPE «Chuvash state University. I.N. Ulyanov». Cheboksary, Chuvash Republic, Volga Federal district of the Russian Federation, PR-t Moskovskiy, d. 15, 428015, e-mail: katya.gonik@mail.ru*

*Gonic Ekaterina Grigoryevna, senior lecturer of the Department of building construction faculty of fsbei HPE «Chuvash state University. I.N. Ulyanov». Cheboksary, Chuvash Republic, Volga Federal district of the Russian Federation, PR-t Moskovskiy, d. 15, 428015, e-mail: katya.gonik@mail.ru*

Для цитирования:

Петров М.В. Экспериментальное измерение давления сыпучего материала на стенку цилиндрической оболочки / М.В. Петров, Е.Г. Гоник // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 47–51.

Citation:

Petrov M.V. Experimental measurement of the pressure of the bulk material on the wall of the cylindrical shell / M.V. Petrov, E.G. Gonic // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 47–51.

УДК 624.012.4.

## ПЛЕЧО ПАРЫ СИЛ В СЕЧЕНИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ИЗГИБАЕМОГО ЭЛЕМЕНТА НА ВСЕХ СТАДИЯХ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

*А.Н. Плотников*

*Н.В. Иванова*

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова»  
г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* в статье обосновано применение упрощенной методики определения плеча пары сил в сечении изгибаемого элемента исходя из высоты сжатой зоны на стадии I напряженно-деформированного состояния. Для определения величины пары сил в сечении применяется коэффициент к первоначальной величине плеча. Величина коэффициента зависит от длительности действия нагрузки. На величину коэффициента влияют неравномерность напряжений по длине арматурных стержней растянутой зоны и неупругие деформации бетона сжатой зоны. Упрощенная методика должна найти применение в расчетах статически неопределимых конструкций при перераспределении усилий.

*Ключевые слова:* плечо пары сил, изгибаемый элемент, железобетон, стадии НДС, сжатая зона.

## SHOULDER OF A COUPLE OF FORCES IN THE CROSS-SECTION OF A REINFORCED CONCRETE BENDED ELEMENT AT ALL STAGES OF A STRESSED STATE

*Abstract:* the article substantiates the use of a simplified method for determining the shoulder of a pair of forces in the cross section of a bent element based on the height of the compressed zone at stage I of the stress-strain state. To determine the magnitude of the pair of forces in the cross section, a coefficient is applied to the initial value of the shoulder. The value of the coefficient depends on the duration of the load. The magnitude of the coefficient is influenced by the unevenness of the stresses along the length of the reinforcing bars of the stretched zone and the inelastic deformations of the con-

*crete of the compressed zone. A simplified technique should find application in the calculations of statically indeterminate constructions in the redistribution of efforts.*

**Keywords:** shoulder of a pair of forces, a bent element, reinforced concrete, stages of a stress-strain state, a compressed zone

Усилия железобетонных пересекающихся элементов при изгибе чувствительны к изменению их жесткостей [1]. Ранее для таких систем определение усилий производилось только при заданном соотношении жесткостей [2; 8]. Однако, как показывают экспериментальные исследования и вытекает из общей теории железобетона при увеличении нагрузки и развитии нелинейных процессов зависимости «напряжение – деформация» происходит перераспределение усилий до 50% [3; 6]. Для расчета железобетонных конструкций при любой нагрузке и разных стадиях напряженно-деформированного состояния (НДС) балок разных направлений необходимы непрерывные функции. В настоящее время для расчета железобетонных конструкций применяются разрывные функции, отдельно по каждой стадии НДС. Свод правил по расчету железобетонных конструкций СП 63.13330. предлагает для стадии II определять форму эпюры сжимающих напряжений как треугольную, для стадии III – как прямоугольную, и элемент можно рассчитывать при одной и той же нагрузке по двум этим вариантам. Как следствие, не получается стыковка в решении задач по разным стадиям НДС, образуются скачки значений геометрических параметров частей сечений при одинаковых значениях нагрузки. Для расчета статически определимых железобетонных конструкций это не представляет опасности, хотя вызывает неопределенность, для расчета более сложных конструкций ошибка может быть значительной.

Расчет железобетонных конструкций как преобразующегося изначально сплошного тела, с образованием и развитием трещин в растянутых зонах сводится к определению геометрических параметров сечений: высоты сжатой зоны, плеча пары сил в сечении, а также доли пластических деформаций в бетоне. Этой всеобъемлющей задаче были посвящены все теоретические работы в области железобетона, достаточно назвать работы А.Ф. Лолейта, А.А. Гвоздева, В.И. Мурашева, С.М. Крылова, Н.И. Карпенко, В.М. Бондаренко, А.Г. Тамразяна, Э.Н. Кодыша, Н.Н. Трекина.

Практически все работы были направлены на создание устойчиво работающей теории расчета железобетона по предельным состояниям, т. е. по фиксированным нагрузкам, без связи между стадиями НДС. В то же время развитие компьютерных методов расчета способствовало реализации нелинейных расчетов по непрерывным функциям. Однако в известных программах они сводятся к заданию обобщенных функций деформаций бетона, в том числе в пластической стадии. Моделирование работы железобетона с трещинами в них пока не реализовано.

Параметры сечений с трещиной в нормах прошедших периодов времени определялись по-разному.

В работах Я.М. Немировского анализировалась роль эпюры растянутого бетона в сечении над трещиной [4]. Отмечалось ее значительное влияние сразу после образования трещины и уменьшение к стадии III. Вместе с тем говорилось, что потеря влияния растянутой зоны бетона компенсируется нелинейной работой бетона сжатой зоны и постоянством соотношения высоты сжатой зоны бетона в сечении с трещиной и средней для элемента (при росте нагрузки, ее длительности действия, разных процентах армирования, свойствах бетона).

По данным анализа А.С. Залесова, Э.Н. Кодыша, Л.Л. Лемыша, И.К. Никитина [5] изменение относительной высоты сжатой зоны  $\xi$  в пределах 10 – 20 % несущественно сказывается на кривизне  $1/r$ , т.к. при этом изменяется и плечо пары сил  $z$  в сечении, деформации бетона  $\varepsilon_{bm}$  и арматуры  $\varepsilon_{sm}$ , при этом сумма деформаций и кривизна  $\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{bm} + \varepsilon_{sm}}{r}$  изменяются мало, что использовалось и в [7].

Традиционно плечо пары сил  $z$  находится как отношение статического момента приведенной площади сжатой зоны бетона относительно растянутой арматуры к указанной приведенной площади.

Позднее, при возвращении к гипотезе плоских сечений при определении ширины раскрытия трещин и кривизны изгибаемого элемента, исходя из расчетов Э.Н. Кодыша, И.К. Никитина, Н.Н. Трекина [5] и нормативного документа СП 63.13330.2018, плечо пары сил стало выражаться как

$$z = h_0 - \frac{1}{3} x_m . \quad (1)$$

После образования трещин и их росте и увеличения доли пластических деформаций в бетоне сжатой зоны (снижение мо-

дуля деформаций) изгибная жесткость элемента определяется выражением

$$D = E_{s,red} A_s z (h_0 - x_m), \text{ где } E_{s,red} = E_s / \psi_s \quad (2)$$

Для реализации стыковки решения задач по разным стадиям НДС принимаем единый центр поворота сжатой зоны бетона относительно центра тяжести растянутой арматуры. Решение задачи, в основном, заключается в нахождении величины смещения центра тяжести эпюры сжатой зоны при переходе между стадиями НДС.

Принимается, что после образования трещин, на стадии II, кроме усилий в сечении, изменяется параметр материала  $\psi_s$  – от 0,4 до 1,0 – коэффициент неравномерности напряжений по длине арматурного стержня между трещинами (рис. 1). Неупругие деформации бетона сжатой зоны учитываются нормативными величинами относительных деформаций при кратковременном и длительном нагружении конструкции по СП 63.13330. После образования трещин в соответствии с трехлинейной диаграммой работы сжатого бетона

$$E_{b1,red} = 0.6 R_{bn} / \varepsilon_{b1} \quad (3)$$

На стадии II в среднем:

$$E_{b0,red} = R_{bn} / \varepsilon_{b0} \quad (4)$$

На стадии III:

$$E_{b2,red} = R_{bn} / \varepsilon_{b2} \quad (5)$$

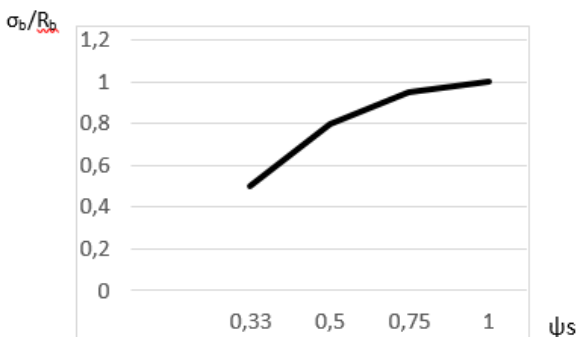


Рис. 1. Зависимость между уровнем напряжений в бетоне сжатой зоны и коэффициентом неравномерности напряжений в растянутой арматуре (по В.И. Мурашеву)



Было проведено моделирование изгибаемого элемента с процентом армирования 1%, соответствующего конструкциям массового применения на 3-х стадиях работы. Для получения сопоставимых результатов для всех групп предельных состояний, соответствующих стадиям нагружения, были приняты нормативные характеристики составляющих конструкцию материалов.

На стадии I высота сжатой зоны и плечо пары сил были определены по методике СП 63.13330. с учетом рекомендаций [5; 9; 10].

Относительная высота сжатой зоны была определена как

$$\xi = Y - \sqrt{Y^2 - \frac{0.733 + \alpha_s(1 - \delta_s)}{0.733 - 0.5r}} \quad (6)$$

параметры материалов заключены в выражениях

$$r = \frac{R_{bn}}{10R_{bt,n}}, \quad \alpha_s = \frac{30A_s}{R_{bt,n}bh},$$

где  $R_{bn}$  – нормативная прочность бетона на сжатие,  $R_{bt,n}$  – нормативная прочность бетона на растяжение,  $A_s$  – площадь сечения растянутой арматуры,  $b$  и  $h$  – ширина и высота прямоугольного сечения. Условное обозначение  $Y$ , принятое для сокращения записи также содержит названные параметры.

Центр тяжести эпюры сжимающих напряжений имеет форму треугольника, отсюда при заданных параметрах, высоте сечения  $h = 350$  мм, плечо пары сил на стадии I  $z = 25,35$  см.

На стадии II, после образования трещин, высота сжатой зоны бетона в зависимости от величины деформации по диаграмме бетона, и, соответственно, уровня нагрузки, величины неравномерности напряжений по длине арматурного стержня (рис. 1), также зависящего от уровня нагрузки:

$$x_m = h_0 \left[ \sqrt{(\mu_s \alpha_{s2})^2 + 2\mu_s \alpha_{s2}} - \mu_s \alpha_{s2} \right], \quad (7)$$

где  $\alpha_{s2} = \frac{E_s}{E_{b,red}\psi_s}$

при сохранении треугольной формы эпюры сжатой зоны бетона, плечо  $z = 25,77$  см. Это практически соответствует плечу в конце стадии I (рис. 2).

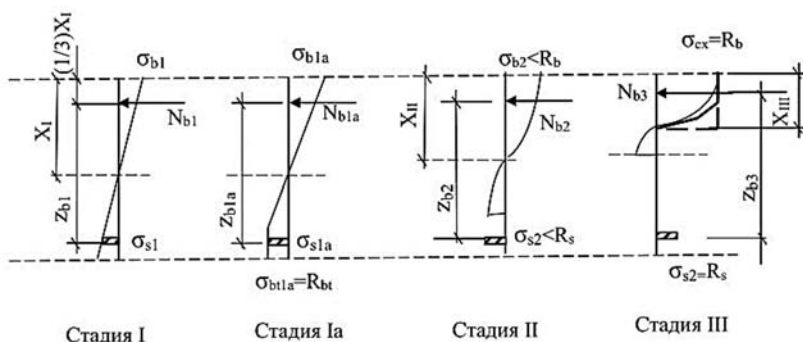


Рис. 2. Эпюры нормальных напряжений в сечении элемента по стадиям нагружения

При величине коэффициента Мурашева  $\psi_s = 1,0$ , что фактически соответствует стадии III – разрушения изгибаемого элемента, и приведенном модуле упругости по (5), предельным деформациям бетона при сжатии  $\varepsilon_{b2} = 0,0035$ , высота сжатой зоны уменьшается в 1,46 раза, при этом плечо пары сил увеличивается. Величина плеча зависит от формы эпюры.

При быстром нагружении элемента, т.е. при действии максимальной кратковременной нагрузки форма эпюры будет оставаться близкой треугольной, в этом случае положение центра тяжести эпюры определится по (1) и составит для рассматриваемого числового примера  $z = 29,7$  см – случай 1.

В случае применения метода расчета по предельным усилиям, что рекомендуется СП 63.13330. для расчета по стадии III, и нагрузки при этом будут длительно действующими (ситуация реальной работы большинства конструкций), эпюра сжатой зоны принимается прямоугольной, плечо пары сил определяется как  $z = h_0 - \frac{1}{2} x_m$  и составит  $z = 28,6$  см – случай 2.

Предлагаемый нормами в последнее время метод расчета по предельным деформациям бетона и арматуры предполагает применение кусочно-линейной эпюры напряжений сжатой зоны, приближенно описывающий реальную нелинейную эпюру. При задании предельных значений деформаций, соответствующих длительной работе бетона, исходя из центра тяжести эпюры напряжений, плечо пары сил для случая 3.

$$z = h_0 - \frac{1}{2,4} x_m \quad (8)$$

В этом случае с учетом коэффициента полноты эпюры напряжений

$$x = \frac{R_{sn} A_{sn}}{\omega R_{bn} b} \quad (9)$$

величина  $z = 28,6$  см.

Отличия по этим ситуациям плеча пары сил на стадии III от стадии I для случая 1 – в 1,17 раза; для случая 2 – 1,13 раза; для случая 3 – также в 1,13 раза. Фактически от стадии I в зависимости от длительности действия нагрузки положение центра тяжести сжатой зоны относительно центра тяжести растянутой арматуры, т.е. плечо пары сил  $z$ , на стадии III отличается всего в 1,13 – 1,17 раза. Ввиду малости этой величины функцию роста  $z$  можно принять предварительно линейной.

Определенное в стадии упругой работы бетона по приведенным геометрическим характеристикам значение плеча пары сил можно корректировать при увеличении нагрузки на коэффициент  $\beta = 1 - 1,13$  – при кратковременном действии нагрузки,  $\beta = 1 - 1,17$  – при длительном действии нагрузки.

Нелинейный расчет статически неопределимых конструкций, например, пересекающихся железобетонных элементов, с введением коэффициента к первоначальному  $z$  позволит более точно оценить их несущую способность и управлять распределением усилий в элементах перекрытий. Использование при этом фиксированного значения плеча упрощит расчет. Усилия в элементах при этом определяются в основном нелинейным изменением коэффициента Мурашева и диаграммой деформирования бетона при сжатии.

**Список литературы:**

1. Плотников А.Н. Усилия пересекающихся изгибаемых железобетонных элементов при нелинейном изменении жесткости / «Лолейтовские чтения–150». Современные методы расчета железобетонных и каменных конструкций по предельным состояниям: сборник докладов Междунар. науч.-практ. конф., посв. 150-летию со дня рождения профессора А.Ф. Лолейта. – М: Изд-во МИСИ–МГСУ. 2018. – С. 346–350.
2. Расчет и проектирование частей жилых и общественных зданий: Справочник проектировщика / П.Ф. Вахненко, В.Г. Хилобок, Н.Т. Андрейко [и др.]; под. ред. П.Ф. Вахненко. – Киев: Будівзельник, 1987. – 424 с.
3. Головин Н.Г. Расчет перекрестно-ребристых перекрытий с учетом физической нелинейности / Н.Г. Головин, А.Н. Плотников // Бетон и железобетон – взгляд в будущее: научные труды III Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и железобетону (Москва, 12–16 мая 2014 г.): в 7 т. Т. 1. Теория железобетона. Железобетонные конструкции. Расчет и проектирование. – М.: МГСУ, 2014. – С. 234–244.

4. Немировский Я.М. Исследование напряженного состояния бетона и арматуры на участках с трещинами в центрально растянутых и изгибаемых элементах / Я.М. Немировский, Л.А. Лемыш // Предельные состояния элементов железобетонных конструкций / под ред. С.А. Дмитриева; НИИЖБ Гостроя СССР. – М.: Стройиздат, 1976. – С. 98–112.

5. Кодыш Э.Н. Расчет железобетонных конструкций из тяжелого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям: монография / Э.Н. Кодыш, И.К. Никитин, Н.Н. Трекин. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2010. – 352 с.

6. Плотников А.Н. Несущая способность железобетонных кессонных перекрытий с учетом пластических деформаций ребер // Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия. Сборник Междунар. науч. конф., посв. 85-летию кафедры железобетонных и каменных конструкций и 100-летию со дня рождения Н.Н. Попова (Москва, 19–20 апреля 2016 г.). – М.: Изд-во: Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т, 2016. – С. 348–353.

7. Плотников А.Н. Аналитический метод определения силы обжатия при обследовании железобетонных изгибаемых конструкций / А.Н. Плотников, Судакова (Иванова) Н.В. // Технические науки: сегодня и завтра. Тезисы докладов юбилейной итоговой научной конференции. – Чебоксары: Клио, 1997. – С. 244–245.

8. Тимофеев Е.О. Исследование методов расчета изгибаемых железобетонных элементов, усиленных композиционными материалами / Е.О. Тимофеев, Л.А. Максимова // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материалы IV Международной (X Всероссийской) конф. НАСКР–2018. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2018. – С. 330–337.

9. Иванова Н.В. Влияние процента армирования колонн на НДС элементов рамных каркасов многоэтажных зданий при расчете с учетом возведения / Н.В. Иванова, А.Г. Николаева // Современные вопросы механики сплошных сред–2017: сб. ст. по материалам конференции (круглого стола) с междунар. участием. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2017. – С. 38–42.

10. Николаева А.Г. Влияние последовательности нагружения на НДС элементов каркасов многоэтажных зданий / А.Г. Николаева // Современные вопросы механики сплошных сред–2017: сб. ст. по материалам конференции (круглого стола) с междунар. участием. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2017. – С. 65–69.

Плотников Алексей Николаевич, декан строительного факультета ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, 428015, г. Чебоксары, Московский пр., 15; plotnikovAN2010@yandex.ru;

Иванова Наталия Васильевна, старший преподаватель кафедры строительных конструкций ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, 428015, г. Чебоксары, Московский пр., 15; sus-a@mail.ru.

Plotnikov Alexey Nikolaevich – Dean of the Faculty of Civil Engineering, Chuvash State University named after I.N. Ulyanov (ChuvSU), 15 Moskovskiy Prospekt, Cheboksary, 428015, Russian Federation; plotnikovAN2010@yandex.ru;

Ivanova Natalia Vasilievna, Senior Lecturer, Department of Building Structures, Chuvash State University named after I.N. Ulyanov (ChuvSU), 15 Moskovskiy Prospekt, Cheboksary, 428015, Russian Federation; sus-a@mail.ru.

Для цитирования:

Плотников А.Н. Плечо пары сил в сечении железобетонного изгибаемого элемента на всех стадиях напряженного состояния / А.Н. Плотников, Н.В. Иванова // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 52–60.

Citation:

Plotnikov A.N. Shoulder of a couple of forces in the cross-section of a reinforced concrete bended element at all stages of a stressed state / A.N. Plotnikov, N.V. Ivanova // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 52–60.

УДК 624.012.25

## **ПРОЧНОСТНОЙ РАСЧЕТ АРМИРОВАННОЙ КАМЕННОЙ КЛАДКИ НА ОСНОВЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЕЕ МАТЕРИАЛОВ**

*А.Н. Плотников*

*О.С. Яковлева*

*Т.В. Романова*

ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И.Н. Ульянова»

г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* в статье рассматривается характер трещинообразования каменной кладки при центральном сжатии, описывается физический смысл применения поперечного армирования как способа увеличения прочности каменной кладки. Приводится сравнение разрушения кладки на всех стадиях работы конструкции под нагрузкой. Предлагается методика прочностного расчета армокаменной кладки исходя из модуля упругости и относительной деформации арматурных стержней.

*Ключевые слова:* каменная кладка, кирпич, поперечное армирование, прочность, трещиностойкость, сжатие, модуль упругости, расчет.

## STRENGTH CALCULATION OF THE REINFORCED STONE LAYER BASED ON DEFORMATION PARAMETERS OF THE COMPONENTS OF ITS MATERIALS

*Abstract: the article presents the nature of masonry cracking during central compression is considered, the physical meaning of using transverse reinforcement as a way to increase the strength of masonry is described. A comparison of the destruction of the masonry at all stages of the structure under load is given. The technique of strength calculation of reinforced masonry based on the modulus of elasticity and relative deformation of reinforcing bars is proposed.*

**Keywords:** masonry, brick, transverse reinforcement, durability, crack resistance, compression, elastic modulus, calculation.

В современном строительстве растет тенденция применения каменной кладки. Для увеличения несущей способности, снижения материалоемкости и, соответственно, себестоимости строительства традиционно применяется армирование кладки.

Доказано, что прочность кирпича на сжатие в неармированной кладке используется в пределах 25...30%. Образование первых трещин происходит на уровне  $0,4...0,7R_n$  от предела прочности [3]. В кирпиче нарастают растягивающие напряжения, в то время как раствор вертикальных швов обладает меньшей по сравнению с кирпичом прочностью к их восприятию. Трещины появляются над вертикальными швами, постепенно объединяются по высоте и в итоге разделяют кладку на столбики, кратные сечению в полкирпича. Разрушение происходит вследствие отрыва с образованием и развитием вертикальных магистральных трещин. Кроме того, появлению трещин в кладке способствует неравномерная плотность и прочность раствора горизонтальных швов, неровная поверхность постели кирпича. Итак, появление первых трещин происходит от напряжений изгиба и среза отдельных кирпичей, а дальнейшее их развитие обусловлено поперечным расширением кладки.

Оптимальным способом увеличения прочности кладки является ее поперечное армирование металлом или композитами [1].

Поперечное армирование снижает трещинообразование кладки за счет восприятия напряжения, сдерживания деформаций в этом направлении. Первые трещины появляются позднее. Объединение их по вертикали и деление на столбики не происходит. Горизонтальные армированные швы позволяют более равномерно передать сжимающую нагрузку от одного ряда

кладки другому. Применение сетчатого армирования позволяет увеличить использование прочности кирпича до 39%, повысить прочность кладки на 80%.

Учитывая вышесказанное, сравнительно опишем阶段性 работы неармированной и армированной поперечными металлическими сетками кладок при силовом нагружении.

Стадия 1 – до образования трещин (рис. 1). Стадия 2 – мелкие вертикальные локальные трещины в 2-х смежных по высоте кирпичах или вертикальном растворном шве. Но кладка все еще представляет собой монолитный композиционный массив, поддается описанию уравнениями теории упругости. Стадия 3 – образование и развитие магистральных трещин. Стадия 4 – разрушение. Большая гибкость отдельных столбиков снижает сопротивление кладки из-за их продольного изгиба. В армированной кладке после стадии 1 и 2, третья выпадает (рис. 2), т. к. металлические сетки сдерживают развитие поперечных деформаций, предотвращая появление магистральных трещин, явления прогиба отдельных ветвей несущественны. Третья стадия для армированной кладки – разрушение по двум формам: потеря прочности кирпича (его раздавливания – смятия) или разрушение раствора и высыпание его поверхностных слоев из швов при еще сохранившейся сплошности кирпича. Для стадии разрушения описание работы кладки уравнениями теории упругости и пластичности недопустимо. Причину разрушения кирпича и раствора надо определять в наступлении предельного состояния по прочности от совместного действия сжимающих и растягивающих напряжений в отдельных локальных областях кирпича и раствора, находящихся в сложных пространственных (трехосных) напряженных состояниях, величину которых можно определить только по соответствующей теории прочности.

В армированной кладке значительно снижаются явления поперечного растяжения и продольного изгиба. Прочность кладки приближается к прочности кирпича на сжатие в стандартных образцах, конструктивный коэффициент прочности  $A$  в формуле

$$R_u = AR_1 \left( 1 - \frac{a}{b + \frac{R_2}{2R_1}} \right) \eta \quad (1)$$

увеличивается [2].

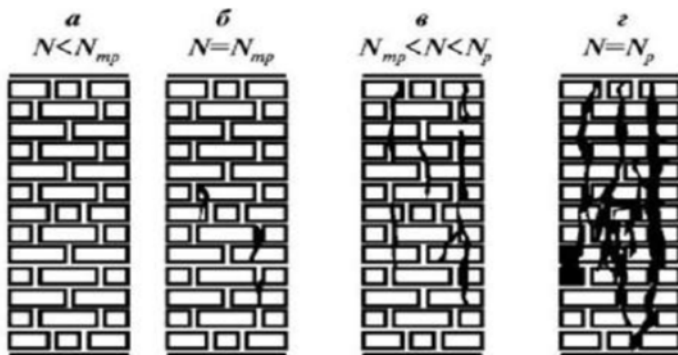


Рис. 1 Стадии работы неармированной каменной кладки при центральном сжатии: а – первая; б – вторая; в – третья; г – четвертая (разрушение)

Следовательно, расчеты кладки, армированной поперечными металлическими сетками, должны основываться на рассмотрении усилий растяжения в их стержнях. Необходимо провести серию испытаний по определению усилий в арматурных стержнях кладки в стадии 2 и 3.

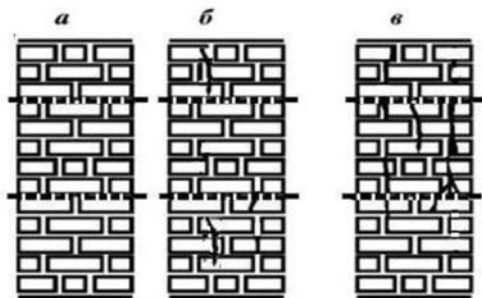


Рис. 2. Стадии работы каменной кладки с поперечным армированием при центральном сжатии: а – первая; б – вторая; в – третья (разрушение)

Ряд проведенных экспериментов подтверждает, что для армокаменных конструкций соблюдается гипотеза плоских сечений, т. е. возможно рассмотрение армированной кладки как линейно-деформируемого упругого материала. При этом за базу измерений следует принимать несколько рядов кладки.

Отметим, что в отечественной практике [2] применяется использование логарифмической зависимости в диаграмме дефор-



мирования каменной и армокаменной кладки (рис. 3б). При этом отображение в области напряжений, близких к пределу прочности не совсем точно (определить точное значение на сегодняшний момент не удастся).

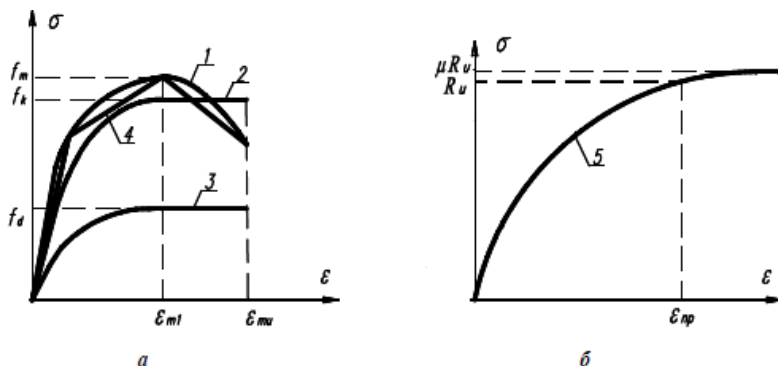


Рис. 3. Диаграммы деформирования каменной кладки при сжатии: а – по Еврокоду 6; б – по СП 15.13330

В случае применения полных диаграмм деформирования [5] выявляется факт отсутствия численного значения деформации при расчете внецентренно сжатых элементов как в пиковой точке, так и в базовых [4].

Анализируя различные методы моделирования каменной кладки отметим, что наиболее комплексно работа кладки описана в [6]. Его метод деформационных параметров исходных материалов является наиболее перспективным, описывает всесторонний анализ состояния нагруженной кладки. Он позволяет направленно подбирать состав и систему перевязки каменной кладки, учитывает различный характер деформирования и разрушения ее типичных элементов – тычковых и ложковых рядов, вертикальных и горизонтальных растворных швов.

Армокаменная кладка находится в условиях объемно-напряженного состояния (рис. 4), для которого закон Гука приводится в следующей интерпретации:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2)$$

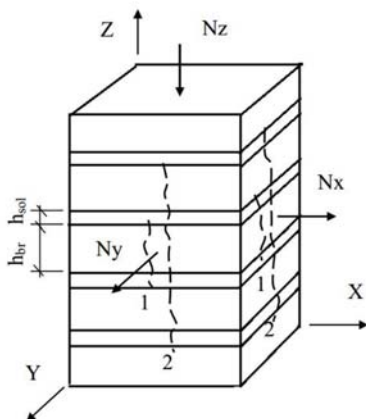


Рис. 4. Элемент каменной кладки с расположением осей.  
1 – начальная стадия трещинообразования,  
2 – разрушающие трещины

Рассматривая схему усилий (рис. 5), запишем для нее уравнение усилий:

$$N^I = N_{erc} - N_s \tag{3}$$

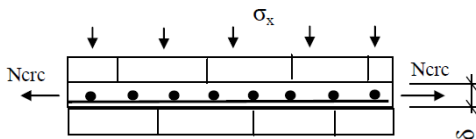


Рис. 5. Схема усилий в слое кладки

Далее усилие образование трещин и усилие  $N_s$ , возникающее в арматуре, запишем через механические параметры материалов:

$$N^I = R_t A_j - \varepsilon_s E_s A_s \tag{4}$$

где  $A_j$  – площадь сечения четырех растворных швов в вертикальной плоскости;  $\varepsilon_s$  – деформация арматуры. Соответствующая деформации образования трещины растворного шва,  $A_s$  – суммарная площадь сечения арматуры одного направления в пределах четырех рядов кладки.

Рассмотрим нижеприведенные формулы СП 15.13330.2012 «Каменные и армокаменные конструкции» для определения

расчетного сопротивления армированной кладки при центральном сжатии (5) и накладываемое на нее ограничение (6),

$$R_{sk} = R + \frac{p\mu R_s}{100} \quad (5)$$

$$R_{sk} \leq 2R \quad (6)$$

Заметим, что прочность армокаменной кладки не должна резко обрываться после линейного увеличения, а нарастать асимптотически. Также известно, что напряжения в стальной арматуре поперечных сеток не достигают предела текучести в момент образования трещин в кладке, т.е. не достигают предела текучести  $R_s$ .

Анализируя (4), можно прийти к выводу о том, что эффект армирования может быть бесконечным. Модифицируем ее введением функции натурального логарифма для большего соответствия физической модели. Аргументом логарифма при этом выберем  $(1 + x)$ , для исключения отрицательных и физически не существующих значений функции. Относительные деформации при этом следует заменить на предельные деформации растворного шва при растяжении  $\varepsilon_u$ .

$$N^I = R_t A_j - \varepsilon_u E_s \ln(1 + A_s) \quad (7)$$

В итоге [7, 8] предложена формула для расчета несущей способности кладки с поперечным армированием стальными сетками, учитывающая увеличение прочности за счет упругого сопротивления арматуры в швах.

$$R_{sk} = R \left( \frac{R_t A_j}{R_t A_j - \varepsilon_u E_s \ln(1 + A_s)} \right) \quad (8)$$

В настоящее время практические методы расчета кладки основаны на эмпирических зависимостях для испытанных материалов. Рынок же изобилует современными легкими, теплоэффективными, пустотелыми камнями, высокопрочными растворами с тонкими швами. А погрешности использования нормативного подхода при этом увеличиваются. Возрастает необходимость физического обоснования теории работы армированной кладки.

**Список литературы:**

1. Антаков А.Б Несущая способность каменной кладки, армированной сетками из безальтопластиковой арматуры / А.Б. Антаков, А.Н. Плотников, В.М. Поздеев // Сборник Междунар. науч. конф., посв. 85-летию кафедры железоб. и каменных конструкций и 100-летию со дня рождения Н.Н. Попова. – 2016. – С. 15–21.

2. СП15.13330.2012. Каменные и армокаменные конструкции. Актуализированная редакция СНиП П-22-81\*.

3. Донченко О.М. К развитию теории трещиностойкости и сопротивления кладки при сжатии / О.М. Донченко, И.А. Дегтев. – М., 2000.

4. Хаткевич А.М. Характер разрушения каменных и армокаменных столбов при центральном нагружении. // Строительство. Прикладные науки. Строительные конструкции. – 2009. – №12.

5. Еврокод 6. Проектирование каменных конструкций. Ч. 1-1: Общие правила для армированных и неармированных конструкций: СТБ EN 1996-1-1-2008.

6. Пангаев В.В. Развитие расчетно-экспериментальных методов исследования прочности кладки каменных конструкций: дис...д-ра техн. наук: 05.23.01. – Новосибирск, 2009.

7. Плотников А.Н. Расчет каменной кладки на центральное сжатие как квазиоднородного сплошного упругопластического тела // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2017. – №4. – С. 30–35.

8. Кибец А.И. Анализ точности конечно-элементной методики решения трехмерной задачи динамики дискретно армированной кирпичной кладки / А.И. Кибец, Ю.И. Кибец, В.А. Иванов // Материалы XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Вятичи, 18–22 марта 2019 г.) / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) [и др.]. Т. 1. – М.: ТРП, 2019.

Плотников Алексей Николаевич – доцент кафедры строительных конструкций, кандидат технических наук, декан строительного факультета ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, e-mail: plotnikovan2010@yandex.ru

Яковлева Ольга Станиславовна – старший преподаватель ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, e-mail: konstruktor9@yandex.ru

Романова Татьяна Вячеславовна – магистрант строительного факультета ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, e-mail: tanyartv@mail.ru

*Plotnikov Aleksey Nikolaevich – associate Professor at the Department of Building Constructions of the «Chuvash state University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: plotnikovan2010@yandex.ru*

*Yakovleva Olga Stanislavovna – senior lecturer of the «Chuvash state University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: konstruktor9@yandex.ru*

*Romanova Tatyana Vyacheslavovna – master student of the «Chuvash state University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: tanyartv@mail.ru*

Для цитирования:

Плотников А.Н. Прочностной расчет армированной каменной кладки на основе деформационных параметров составляющих ее материалов / А.Н. Плотников, О.С. Яковлева, Т.В. Романова // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 60–68.

Citation:

*Plotnikov A.N.* Strength calculation of the reinforced stone layer based on deformation parameters of the components of its materials/*A.N. Plotnikov, O.S. Yakovleva, T.V. Romanova* // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 60–68.

УДК 624.15

## ДЕФОРМАЦИИ ОСНОВАНИЙ БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ ФУНДАМЕНТОВ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ НАГРУЗКАХ НА НИХ

*Н.С. Соколов*

ООО НПФ «ФОРСТ»

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
университет имени И.Н. Ульянова»

г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* актуальными являются вопросы фундирования сооружений с высокими значениями средних давлений  $R_{II\text{mt}}$  под подошвой фундамента. При  $R_{II\text{mt}}$ , достигающих 680 кПа, средняя осадка сооружений достигает  $S = 200 \div 580$  мм. При этом резко возрастают вертикальные перемещения после преодоления средних давлений, составляющих  $R_{II\text{mt}} = 250 \div 300$  кПа. При этом от 60% до 70% деформаций оснований происходит за время строительства, а остальные 30%  $\div$  40% - после окончания монтажа сооружений. При таких высоких значениях средних давлений и осадок немаловажное значение имеют прогнозируемые значения вертикальных перемещений этих сооружений за последующие периоды их эксплуатации. Для этого логарифмическая функция  $S_t = S_0 + A \ln(1 + Bt)$  является удачной математической зависимостью для прогноза осадок фундаментов в любой последующий промежуток времени.

**Ключевые слова:** среднее давление  $P_{II_{mt}}$ , абсолютная осадка фундамента, инженерно-геологические элементы, высокоточное геометрическое нивелирование, прогноз деформации оснований.

## DEFORMATION OF THE BASES OF LARGE FOUNDATIONS WITH HIGH LOADS ON THEM

**Annotation:** *the issues of Foundation of buildings with high values of average pressures are relevant  $P_{II_{mt}}$  under the sole of the foundation. If  $P_{II_{mt}}$ , reaching 680 kPa, the average sediment structures reaches  $S = 200 \div 580$  mm. This dramatically increases the vertical movement after overcoming the medium pressure components  $P_{II_{mt}} = 250 \div 300$  kPa. At the same time, from 60% to 70% of the deformation of the bases occurs during construction, and the remaining 30%  $\div$  40% - after the installation of structures. At such high values of average pressures and sediment, the predicted values of vertical displacements of these structures for subsequent periods of their operation are of great importance. To do this, the logarithmic function  $S_t = S_0 + A \ln(1 + Bt)$  is a good mathematical dependence for predicting the sediment of foundations in any subsequent period of time.*

**Keywords:** high pressure  $P_{II_{mt}}$ , the absolute Foundation settlement, geotechnical elements, high-precision geometric leveling, prediction of deformation bases.

Здания и сооружения, с повышенными на их основания нагрузками, относят к объектам первого типа по ответственности согласно классификации ГОСТ 27751-2014 «Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения». При возведении этих объектов обязательным является проведение геотехнического мониторинга с использованием высокоточного геометрического нивелирования с помощью нивелиров 1 и 2 классов точности и инварных реек. В настоящей статье приводятся результаты геотехнического мониторинга осадок фундаментов пяти промышленных объектов (объекты №1  $\div$  5) в течение длительного времени с 1977 г. по настоящее время.

Инженерно-геологические условия строительных площадок строительства объектов №1–5 приведены ниже в табл. 1.

**Объекты № 1, 2.** С поверхности, абсолютная отметка 161,0 м, до глубины 20 м залегают моренные отложения Валдайского и Московского оледенений, представленные суглинками (слои №3, 7) и глинами (слои № 1, 4, 6), с отдельными линзами супе-

сей (слой №4) Инженерно-геологические разрезы имеются на рис. 1а и 1б.

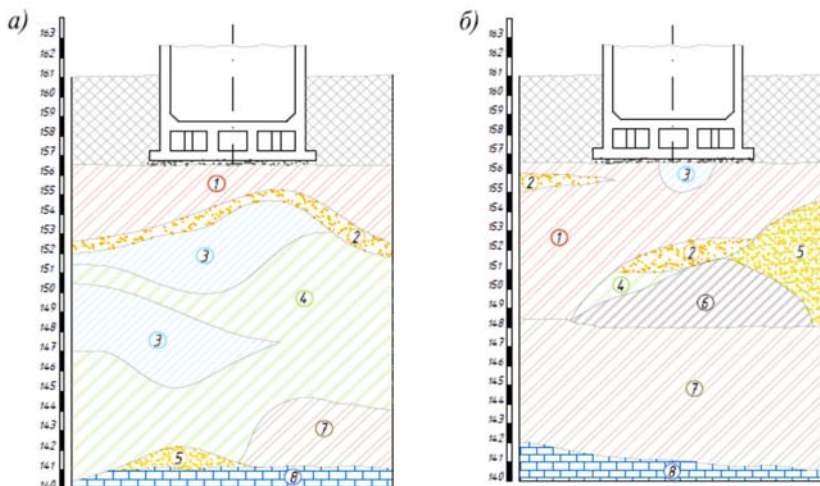


Рис. 1. Инженерно-геологические разрезы основания объектов №1, 2; а – объект №1; б – объект №2

Во всей толще морен, кроме включений обломочного материала, имеются линзы и отдельные прослои песков различного гранулометрического состава. Верхняя (Валдайская) морена (слой №1) отделяется от нижележащей Московской морены (слои № 3, 4, 6, 7) с небольшим прослоем, толщиной 0,3–1,1 м межморенных флювиогляциальных песков разного состава (от пылеватых до гравелистых). Песчаный прослой имеет неровный характер (абсолютная отметка его колеблется в пределах 153,0–155,8 м). Ниже моренных отложений отдельными скважинами вскрыт прослой флювиогляциальных песков, толщиной от 0,7–1,1 м. Ледниковые отложения подстилаются известняками подольского горизонта, толщиной более 60 м. Известняки верхней части до глубины 4–6 м сильно разрушены и выветрены до состояния крупнообломочного дресвощебеночного грунта. Ниже залегают трещиноватые, преимущественно крепкие известняки с отдельными прослоями разрушений.

В гидрогеологическом отношении, площадки строительства объектов характеризуются наличием трех основных водоносных горизонтов. Первый от поверхности – надвалдайский безнапорный горизонт относится к подморенным лескам, супесям и

насыпному слою. Глубина залегания колеблется в пределах в пределах 0,5–1,5 м от дневной поверхности. Второй напорный Валдайско-Московский горизонт приурочен к прослоям межморенных песков. До начала строительства при естественном режиме подземных вод пьезометрический уровень располагается на абсолютных отметках 157,5–159,5 м, при этом высота напора составляла 4,5–5,5 м. Третий напорный водоносный горизонт находится в толще известняков, включая выветрелую зону. Пьезометрический уровень при естественном режиме располагается на отметках 156,5–157,0 м, а высота напора под кровлей пласта составила 14,5–16,0 м.

Нормативные физико-механические характеристики грунтов, оснований и фундаментов объектов №1, 2 приводятся в табл. 1.

**Объекты № 3–5.** С поверхности, абсолютная отметка которой 31,0 м, до глубины 10 м, залегают слабые суглинки, представленные озерно-лиманными хвалынскими отложениями. Фундаменты объектов сооружены на искусственном основании из доломитизированного щебня, толщиной 4 м, с замещением слоя этих слабых грунтов.

Инженерно-геологические разрезы оснований приведены на рис. 2а, 2б, 2в.

Ниже щебеночной подушки (слой №2) залегают аллювиальные хвалынские глины (слой №3), толщиной 7–9 м. Аллювиальные хвалынские пески имеют толщину около 18 м и представлены в основном мелкозернистыми песками. Далее подстилаются аллювиальные пески среднего плейстоцена, вскрытая толщина которого составляет около 20 м. Разведанный уровень подземных вод находится на абсолютной отметке 28 м.



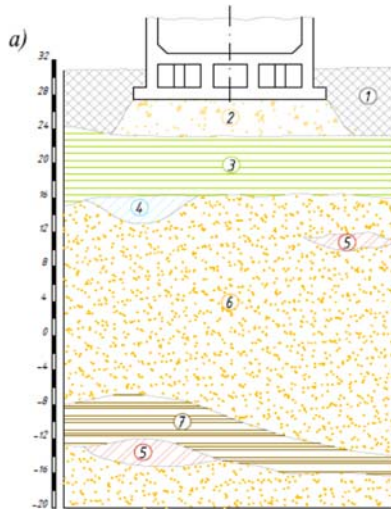


Рис. 2а. Инженерно-геологические разрезы объекта №3

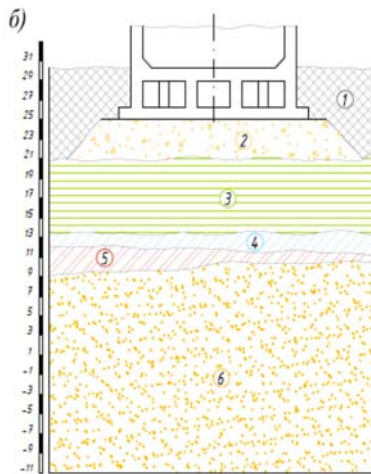


Рис. 2б. Инженерно-геологические разрезы объекта №4

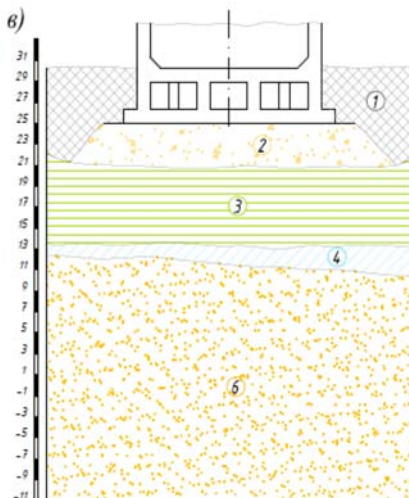


Рис. 2в. Инженерно-геологические разрезы объекта №5

Нормативные физико-механические характеристики инженерно-геологических элементов сведены в табл. 1.

Таблица 1

№ слоя	Наименование грунта основания	Модуль деформации, МПа	Удельный вес, кН/м <sup>3</sup>	Удельное сцепление, МПа	Угол внутреннего трения, град
1	2	3	4	5	6
Объект №1					
1	Глины валдайской корены тугопластичные и твердые	36	20,4	0,047	19
2	Водонасыщенные мелкие пески средней плотности	27	20,0	0,002	28

*Продолжение таблицы 1*

1	2	3	4	5	6
3	Суглинки московской морены тугопластичные и твердые	38	21,2	0,052	22
4	Глины московской морены тугопластичные и твердые	45	20,2	0,047	20
5	Пески	30	20,2	0,002	31
6	Известняки	70	20,1	7,000	32
Объект №2					
1	Глины валдайской корены тугопластичные, твердые	36	20,4	0,047	19
2	Водонасыщенные мелкие пески средней плотности	27	20,0	0,002	28
3	Пески крупнозернистые и гравелистые средней плотности и плотные	21	20,2	0,002	25
4	Супеси флювиогляциальные	30	21,0	0,021	22
5	Гравийные грунты флювиогляциальные	36	20,6	0,001	37
6	Глины московской морены от тугопластичной до полутвердой консистенции	45	20,3	0,058	18
7	Суглинки московской морены от мягкопластичной до полутвердой консистенции	38	21,2	0,044	23
8	Известняки	70	20,1	7,000	32
Объекты №3, 4, 5					
3	Суглинки аллювиальные хвалынские	15	17,8	0,010	13
4	Подушка из доломитизированного известняка	–	–	–	–
5	Глина аллювиальная хвалынская	25	19,7	0,050	10
6	Суглинки аллювиальные	15	19,6	0,015	10
7	Пески разномзернистые	25	20,0	-	24

**Нормативные физико-механические характеристики грунтов оснований фундаментов объектов**

Ниже рассматриваются основные результаты натурных исследований осадок фундаментов объектов №1–5 за период с 1977 по 1999 г. с прогнозом по настоящее время.

Объекты №1, 2 представляют собой круглые жесткие сооружения, высотой 70 м и диаметром 48,8 м.

Фундаменты объектов заложены на глубину 4,2 м от уровня планировки, а среднее давление при этом составляет  $P_{Пнт}=680\text{кПа}$ .

Высокоточные геодезические наблюдения за осадками стеновых осадочных марок объекта №1, начаты в апреле 1977 г. после возведения нижней фундаментной плиты.

На основании результатов изменений осадок фундамента построены графики осадок с ростом среднего давления на основании (рис. 3, 4).

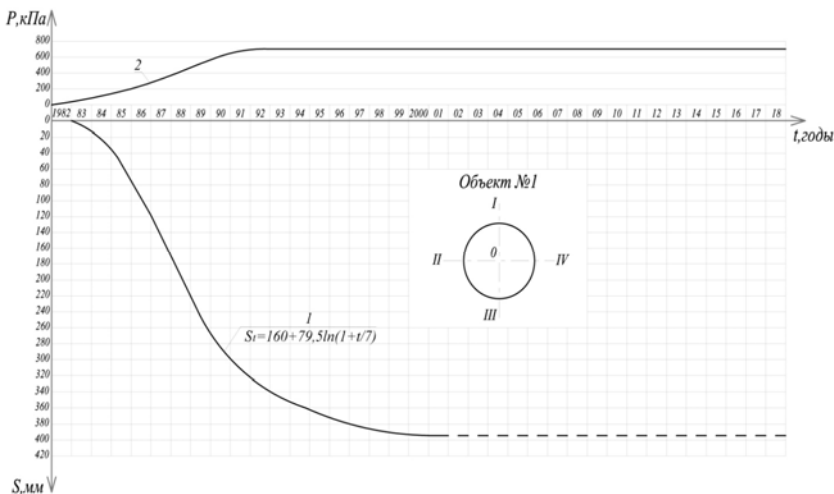


Рис. 3. Объект №1: графики 1 – средней осадки; 2 – роста среднего давления  $P_{Пнт}$  на основание

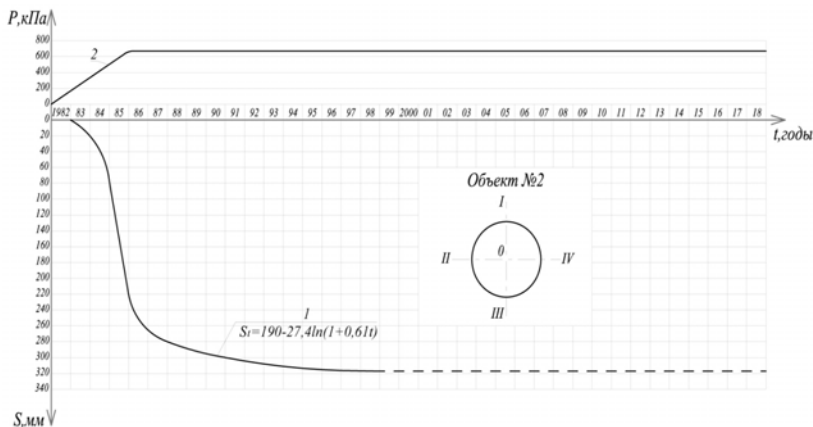


Рис. 4. Объект №2: графики 1 – средней осадки; 2 – роста среднего давления  $P_{II\text{mt}}$  на основание

Средняя осадка фундамента объекта №1 за строительный период с апреля 1977 г. по июль 1984 г. составила 211,6 мм. С июня 1980 г. по июль 1982 г. приращение осадки составило 58 мм, достигнув величины 111 мм. При этом вес сооружения составил 70% проектной нагрузки. Возведение объекта №1 завершено в июне 1983 г. Наиболее интенсивно протекала осадка фундамента за время с мая 1982 г. по июнь 1983 г. (конец строительства объекта №1). За этот период средняя осадка возросла на 99 мм. После окончания монтажа строительных конструкций и оборудования, резко уменьшились скорости осадок. Конечная стабилизированная осадка составила 390 мм. За строительный период произошло 75% средней конечной осадки.

Осадка фундамента объекта №2 протекала более интенсивно по сравнению с объектом №1. Средняя осадка за время строительства с февраля 1983 г. по ноябрь 1986 г. составили 400 мм, а в стабилизированном состоянии-440 мм.

Объекты №3–5 сооружены на коробчатых фундаментах с размерами в плане 68,2 x 68,2 м. Основанием служит доломитизированный известняк толщиной 4 м. Подошва фундаментов заложена на глубину 6,7 м от уровня планировочной отметки. При этом среднее давление на основание составляет  $P_{II\text{mt}} = 520$  кПа.

Высокоточное геодезическое наблюдение за осадками 15 стенных осадочных марок началось после бетонирования нижней монолитной плиты фундамента вначале 1981 г.

По результатам длительных высокоточных геодезических наблюдений за осадками фундаментов построены графики средней осадки с ростом среднего давления на основание, которые приведены на рис. 5–7.

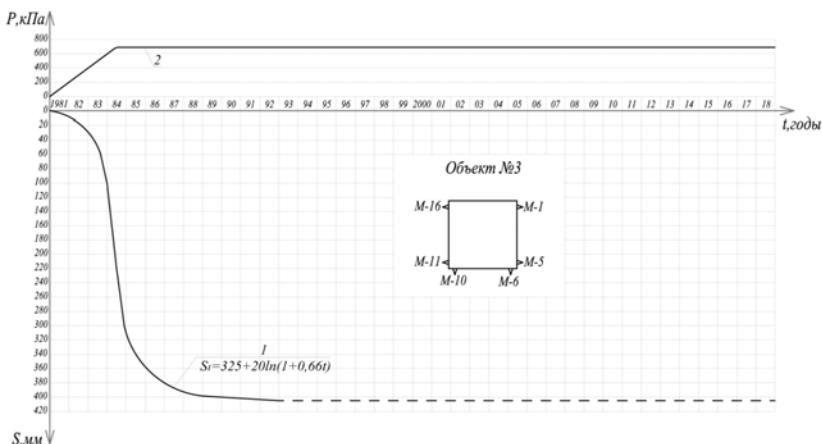


Рис. 5. Объект №3: графики 1 – средней осадки; 2 – роста среднего давления  $P_{\text{плт}}$  на основание

Средняя осадка фундамента объекта №3 за время строительства с марта 1981 г. по ноябрь 1985 г. составили 280 мм, конечная стабилизированная осадка – 390 мм. За строительный период произошло 75% средней конечной осадки.

Осадки фундамента объекта №5 протекали более интенсивно по сравнению с объектом №3. Средняя осадка за время строительства с февраля 1983 г. по ноябрь 1986 г. составила  $S = 400$  мм, а в стабилизированном состоянии  $S = 440$  мм.

Абсолютная осадка объекта №5 за время строительства (начало в 1985 г.) составила  $S = 410$  мм, а стабилизированная на конец 1994 г. –  $S = 520$  мм.

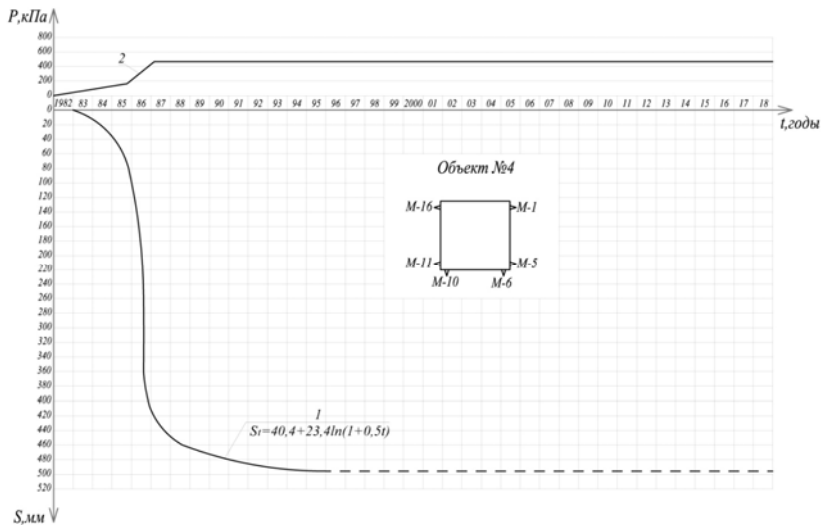


Рис. 6. Объект №4: графики 1 – средней осадки; 2 – роста среднего давления  $P_{\text{Пит}}$  на основание

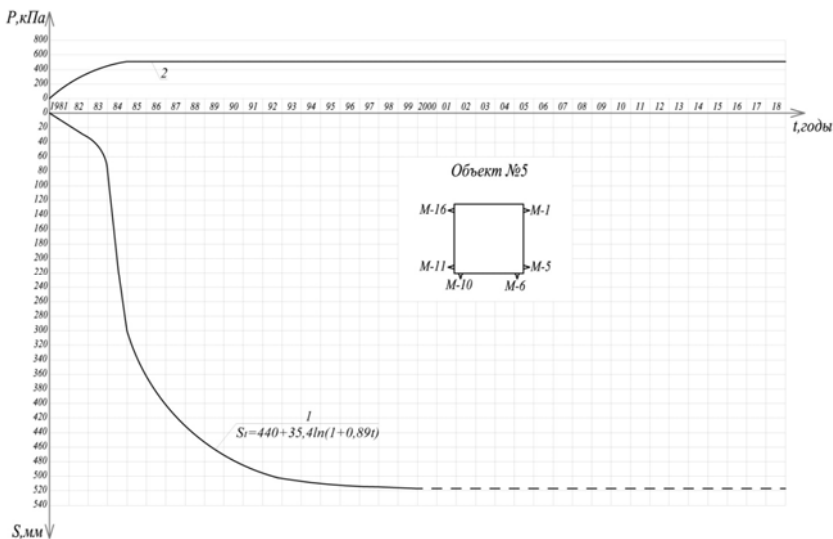


Рис. 7. Объект №5: графики 1 – средней осадки; 2 – роста среднего давления  $P_{\text{Пит}}$  на основание

Анализ осадок фундаментов объектов №1÷5 (рис. 3–7) показывает, что на графиках отчетливо выделяется два участка: линейный и нелинейный. Линейный переходит в нелинейный при среднем давлении на основание.  $P_{lmt} = 250 \div 300$  кПа. На нелинейном участке происходит резкое увеличение приращение деформаций с постепенной стабилизацией их во времени.

Важным являются, определение величины осадок фундаментов во времени.

В этом отношении логарифмическая формула вида  $S_t = S_0 + A \ln(1 + Bt)$  является удачной математической зависимостью для прогноза осадок о стабилизации деформации основания, где  $S_0$  – осадка за строительный период;  $A$  и  $B$  определяются по кривым фактических осадок по двум точкам при  $S_1 > S_0$ . Для этого логарифмическое уравнение легко решается, если брать  $S_2 = 2S_1$  с начала отсчета при  $S > S_0$ . В зависимости от времени наблюдений отсчет производится в годах или месяцах.

Пользуясь логарифмической формулой создается возможность прогнозировать осадки в ограниченном участке времени. При неограниченном увеличении времени значение логарифма стремится к бесконечности. По истечении 3–5 лет следует повторить наблюдения за осадками и откорректировать параметры  $A$  и  $B$ .

Таблица 2

**Прогноз фундаментов объектов № 1–5 по логарифмической зависимости  $S_t = S_0 + A \ln(1 + Bt)$**

№ п/п	Прогнозируемая средняя осадка, $S_t$	
1	Объект №1	$160+79,4 \ln(1+t/7)$
2	Объект №2	$190+27,4 \ln(1+0.61t)$
3	Объект №3	$325+20 \ln(1+0.66t)$
4	Объект №4	$404+23,4 \ln(1+0.5t)$
5	Объект №5	$410+24,6 \ln(1+0.38t)$

*Примечание. 1. Коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются по фактическим кривым осадкам; 2. Время  $t$  – в месяцах.*

**Список литературы:**

1. Егоров К.Е. Закономерности деформации основания фундаментов, имеющих большую площадь / К.Е. Егоров, Н.С. Соколов // Сборник трудов Всесоюзного совещания по фундаментостроению «Ускорение научно-технического прогресса в фундаментостроении». – М.: Стройиздат, 1987. – 5 с.



2. Егоров К.Е. Особенности деформаций оснований фундаментов, имеющих большую площадь. / К.Е. Егоров, Н.С. Соколов // Сборник трудов IV Всесоюзного совещания по фундаментостроению. Т. 2. – М.: Стройиздат, 1987. – 4 с.

3. Егоров К.Е. Особенности деформаций оснований реакторных отделений АЭС / К.Е. Егоров, Н.С. Соколов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1985. – №4. – С. 14–17.

4. Соколов Н.С. Особенности расчета осадок большеразмерных фундаментов при повышенном давлении на грунты. / Н.С. Соколов, С.М. Ушков // Материалы научно-технической конференции «Геотехника Поволжья–IV». 4.2. Основания и фундаменты. – Саратов, 1989. – 3 с.

5. Соколов Н.С. Деформация основания круглого фундамента на конечном сжимаемом слое / Н.С. Соколов // Труды НИИОСП, 1987. – Вып. 86.

6. Соколов Н.С. Совместная работа оснований и фундаментов РО АЭС / Н.С. Соколов // Труды ВНИИОСП им. И.М. Герсеванова. – 1988. – №87. – 5 с.

7. Соколов Н.С. Деформация основания круглого фундамента на конечном сжимаемом слое / Н.С. Соколов // Труды НИИОСП. – 1987. – Вып. 86. – 6 с.

8. Соколов Н.С. Расчетное сопротивление грунтов в основании большеразмерных фундаментов при повышенном давлении. / Н.С. Соколов, С.М. Ушков // Строительные конструкции. – Чебоксары, 1992. – 3 с.

Соколов Николай Сергеевич, канд. техн. наук, доцент, директор e-mail: forstnpf@mail.ru, ns\_sokolov@mail.ru

*Sokolov N.S., Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Director. e-mail: forstnpf@mail.ru, ns\_sokolov@mail.ru*

Для цитирования:

Соколов Н.С. Прогноз осадок большеразмерных фундаментов при повышенных давлениях на основания // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 68–80.

Citation:

Sokolov N.S. Forecast sediment of large-size foundations at high pressures on the grounds // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 68–80.

УДК 624.15

## МНОГОЛЕТНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ОСНОВАНИЙ БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ ФУНДАМЕНТОВ

*Н.С. Соколов*

ООО НПФ «ФОРСТ»

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
университет имени И.Н. Ульянова»

г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* безопасность эксплуатации объектов согласно ГОСТ 27751-2014 «Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения» регламентируются величинами вертикальных осадок и кренов. Рассмотренные в настоящей статье объекты относятся к сооружениям первого класса ответственности. В результате воздействия на их коробчатые фундаменты повышенных нагрузок достигающих значений средних давлений до  $P_{lmt} = 680$  кПа они получили осадки и крены превышающие предельно допустимые величины. При этом направление кренов во время возведения объектов меняется от 0 до 360°. Благодаря своевременно принятым техническим и технологическим приемам во время их возведений они эксплуатируются надежно.

**Ключевые слова:** неравномерная осадка, крен, вертикальные осадки, прогноз деформаций оснований.

## LONG RESEARCH OF THE PROCESSES OF THE DEFORMATION OF BASES OF FOUNDATION IN HIGH LOADS

*Annotation:* safety of operation of facilities in accordance with GOST 27751-2014 «Reliability of building structures and foundations. The main provisions» are regulated by the values of vertical sediments and rolls. The objects considered in this article refer to the structures of the first class of responsibility. As a result of the impact on their box-shaped foundations of increased loads reaching average pressures up to  $P_{lmt} = 680$  kPa, they received deposits and rolls exceeding the maximum permissible values. In this case, the direction of the rolls during the erection of objects varies from 0 to 360°. Due to timely technical and technological methods during their erection, they are operated reliably.

**Key words:** uneven sediment, roll, vertical sediment, forecast of base deformations.

В настоящей статье рассматриваются основные результаты натуральных исследований осадок и кренов промышленных объектов №1÷5.

Инженерно-геологические разрезы и физико-механические характеристики грунтов оснований объектов приведены на рис. 1 и 2 и табл. 1 [1].

Объекты №1, 2 представляют собой круглые жесткие сооружения высотой 70 м и имеют диаметр 48,8 м. Фундаменты их заложены на глубину 4,2 м от уровня планировки, а среднее давление на основание составляет  $P_{lim} = 680$  кПа [2÷5].

Для исследования закономерностей деформирования оснований коробчатых фундаментов объектов №1÷5 были организованы высокоточные геодезические наблюдения 2-го класса точности с помощью нивелиров и штриховых инварных реек.

Наблюдения за осадками стенных осадочных марок объекта №1 начались в апреле 1977 г. после возведения нижней плиты коробчатого фундамента.

По результатам измерений вертикальных перемещений осадочных марок объекта №1 построены графики средней и неравномерной минимальной и максимальной осадок с ростом среднего давления на основание (рис. 1).

Так средняя осадка фундамента за строительный период с апреля 1977 г. по июль 1984 г. составила  $S = 211,6$  мм, а значение неравномерной осадки –  $S = 134,7$  мм, при этом направление крена  $\alpha = 350$  (рис. 2) с июня 1980 г. по май 1982 г. приращение осадки составило  $\Delta S = 58$  мм, достигнув величины  $\Delta S = 111$  мм. За этот период значительно возрос крен сооружения в сторону пристрой и достиг 82 мм. При этом вес сооружения составил 70% проектной нагрузки.

Наиболее интенсивно протекала осадка фундамента за период с мая 1982 г. по июль 1983 г. (конец строительства объекта). За это время средняя осадка выросла на  $\Delta S = 99$  мм, а неравномерная осадка – на  $\Delta S = 53$  мм. После окончания монтажа строительных конструкций и оборудования резко уменьшились скорости осадок и крена.

Для стабилизации роста неравномерной осадки фундамента объекта №1 в ноябре–декабре 1983 г. был уложен срочный пригруз весом 5780 кН на консоль фундамента с противоположной стороны от направления крена (рис. 2). Для ускорения процесса стабилизации крена дополнительно уложены регулируемые пригрузы в секторах А и Б по обе стороны от оси 2 весом около 30000 кН. После этих мероприятий рост крена был приостанов-

лен. В стабилизированном состоянии величина неравномерной осадки составила 148 мм, а ее направление  $\alpha=348^\circ$ .

Объект №2 также построен на естественном основании. Возведение сооружения имеет некоторые особенности по сравнению с объектом №1. Во-первых, практически за все время строительства объекта №1 проводилось глубинное водопонижение в котловане блочно-насосной станции (БНС-1). Понижение уровня подземных вод (УПВ) в котловане блочно-насосной станции (БНС-2) началось с 80% проектной нагрузки на фундамент объекта №2. Во-вторых, строительство объекта №2 велось почти в 2 раза быстрее по сравнению с объектом №1.

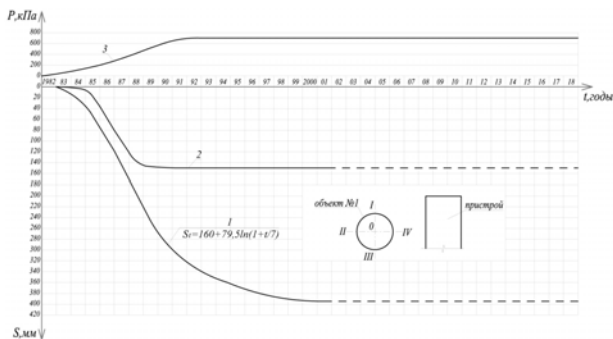


Рис. 1. Объект №1. Графики: 1 – средней осадки; 2 – крена; 3 – роста среднего давления на основание

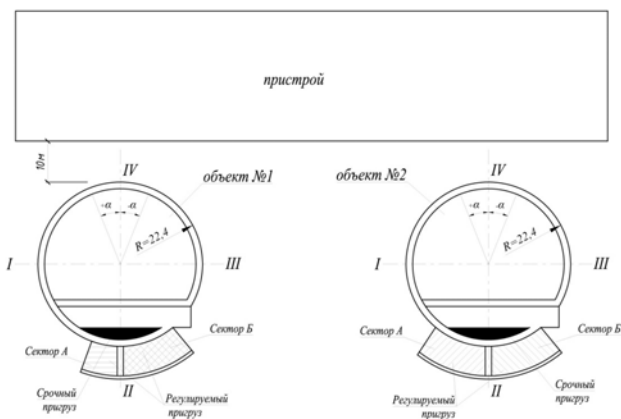


Рис. 2. Объекты №1, 2. а – схемы устройства пригрузов для регулирования кренов; б – схематичный план взаимного расположения фундаментов объектов №1 и 2

Высокоточные геодезические наблюдения за осадками стенных осадочных марок начались после бетонирования нижней монолитной железобетонной плиты коробчатого фундамента в конце 1982 г.

На основании исследований результатов осадок и крена фундаментов построены графики средней и неравномерной осадок с ростом среднего давления на основание (рис. 3)

Средняя и неравномерная осадка фундамента объекта №2 за время строительства составили соответственно 171,3 и 101,8 мм. Средняя осадка в этот период протекала со скоростью 0,164 мм/сут, а скорость неравномерной осадки равнялась 0,10 мм/сут. В период наибольшей интенсивности наращивания нагрузок на основание с сентября 1984 г. по декабрь 1984 г. скорость средней осадки составила 0,12 мм/сут, а интенсивность приложения внешней нагрузки в указанный период составила 55000 кН/мес.

Скорости протекания средней и неравномерной осадок до и во время водопонижения в котловане БНС-2 существенно отличаются между собой. Так, например, скорости средней и неравномерной осадок до водопонижения составили соответственно 0,278 и 0,256 мм/сут, а во время водопонижения эти величины равнялись 0,429 и 0,280 мм/сут.

Для уменьшения скорости нарастания крена были устроены срочный весом 5800 кН и регулируемый весом 51000 кН пригрузы в секторах А и Б (рис. 2), благодаря чему рост крена был приостановлен.

В настоящее время осадки фундаментов объектов №1, 2 безаварийно эксплуатируются.

Анализируя графики средней и неравномерных осадок на рис. 1 и 3 следует отметить, что на кривых отчетливо выделяются два участка линейный и нелинейный. Линейный участок переходит в нелинейный при среднем давлении на основание 250–300 кПа. С момента, соответствующего началу нелинейной зависимости графика осадки, нарастание крена тоже приобретает нелинейный характер, т. е. скорости роста крена увеличиваются. Направление крена остается неизменным для обоих объектов (рис. 4, 5).

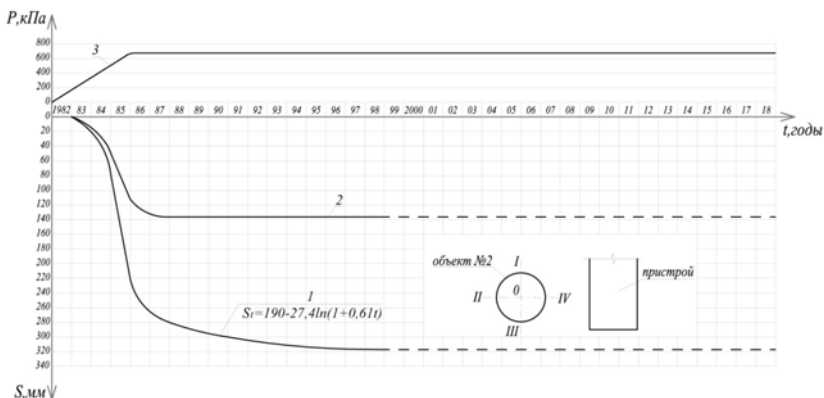


Рис. 3. Объект №2. Графики: 1 – средней осадки фундамента; 2 –крена; 3 – роста среднего давления под подошвой фундамента  $P_{IImt}$

Объекты №3–5 сооружены на коробчатых фундаментах с размерами в плане  $68,2 \times 68,2$  м на искусственном основании из доломитизированного известняка толщиной 4 м. Фундаменты объектов заложены на глубину 6,7 м от уровня планировочной отметки. Среднее давление на основание составляет  $P_{IImt} = 520$  кПа [6–8].

Наблюдение за осадками 15 ственных осадочных марок начались после бетонирования нижней монолитной плиты фундамента в начале 1981 г.

По результатам длительных геодезических наблюдений за осадками фундаментов построены графики минимальной, средней, максимальной и неравномерной осадок объектов с ростом среднего давления на основание, которые показаны на рис. 6–8. Кроме того, на рис. 9–11 приведены графики изменения величины и направления кренов объектов №3–5 с ростом среднего давления на основание.

Средняя и неравномерная осадки фундамента объекта №3 за время строительства с марта 1981 г. по ноябрь 1982 г. составили 280 и 57 мм, конечные стабилизированные осадки – 390 и 58 мм соответственно. За строительный период произошло 75% средней конечной осадки.

Осадки фундамента объекта №4 протекают более интенсивно по сравнению с объектом №1. Средняя и неравномерная осадки за время строительства с февраля 1983 г. по ноябрь 1986 г. со-

ставили 400 и 52 мм, а в стабилизированном состоянии – 440 и 54 мм соответственно.

К настоящему времени строительство объекта №5 завершено. Среднее давление на основание составляет  $P_{lim} = 520$  кПа. Характерной особенностью деформации основания объекта №5 является значительная по сравнению с объектами №3, 4 величина неравномерной осадки, составляющей 75 мм, т. е. крен равен 0,0011.

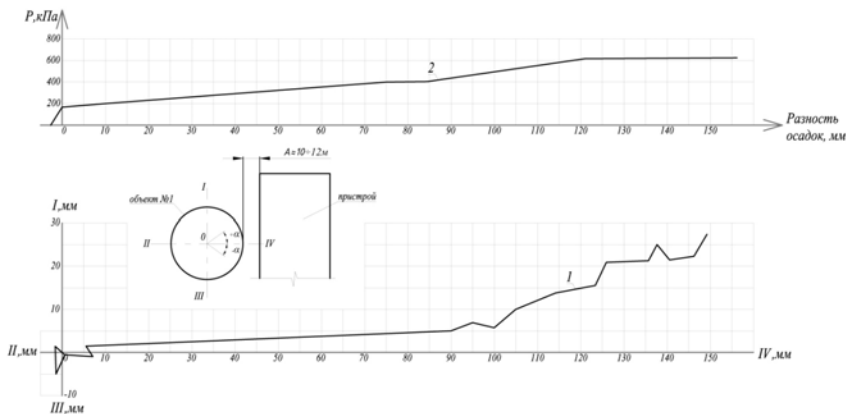


Рис. 4. Объект №1. График нарастания неравномерной осадки 1 с ростом среднего давления 2 на основание

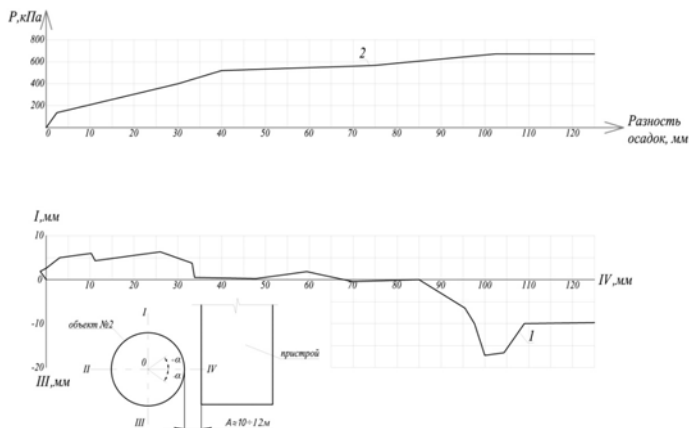


Рис. 5. Объект №2. График нарастания неравномерной осадки 1 с ростом среднего давления 2 на основание

## Раздел 1. Механика деформируемого твердого тела

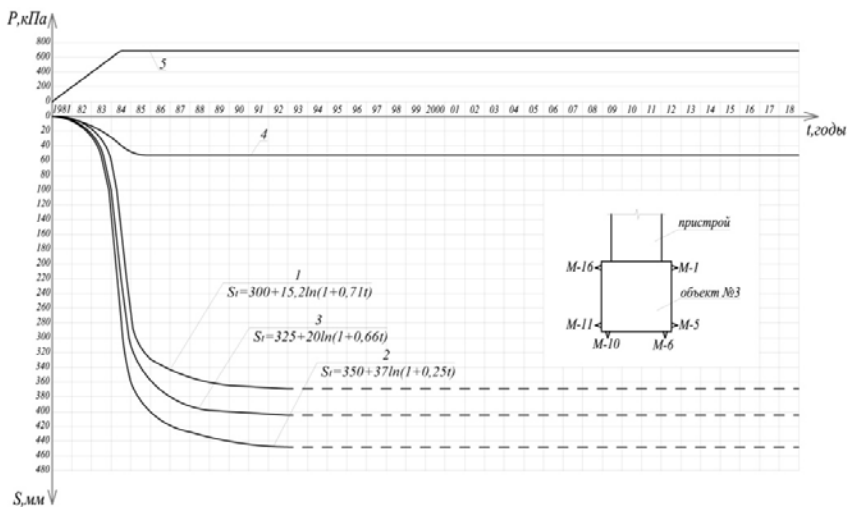


Рис. 6. Объект №3. Графики осадок фундамента во времени:  
 1 – минимальной; 2 – максимальной; 3 – средней; 4 – крана;  
 5 – роста среднего давления  $P_{II mt}$

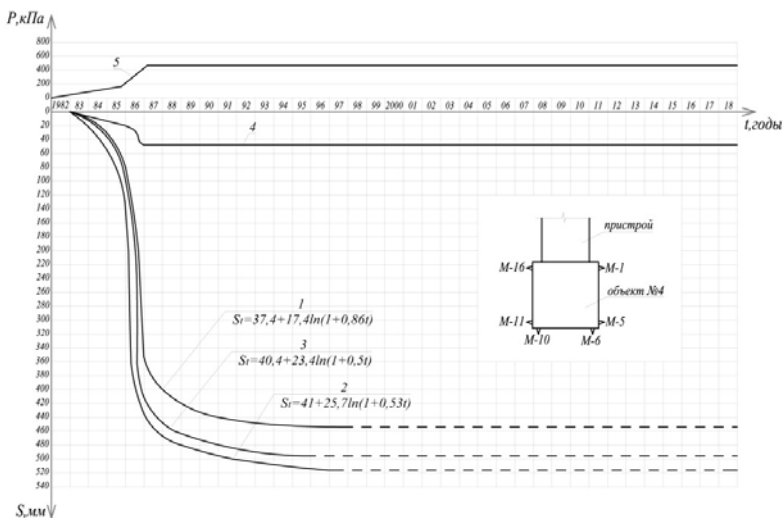


Рис. 7. Объект №4. Графики осадок фундамента во времени:  
 1 – минимальной; 2 – максимальной; 3 – средней; 4 – крана;  
 5 – роста среднего давления  $P_{II mt}$



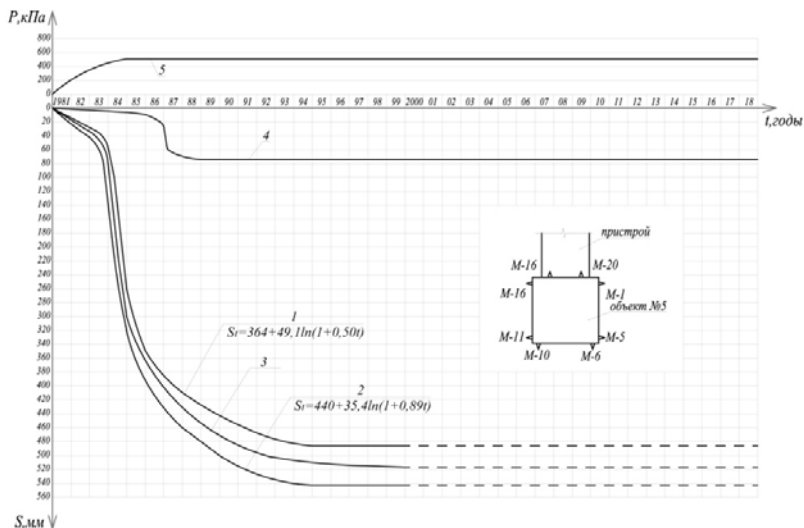


Рис. 8. Объект №5. Графики изменения осадок фундамента во времени: 1 – минимальной; 2 – максимальной; 3 – средней; 4 – крена; 5 – средней осадки  $P_{плт}$

Для анализа изменения величины и направления крена с ростом среднего давления на основание построены графики, показанные на рис. 9–11. Кривые построены в прямоугольной системе координат с началом, совпадающим с геометрическим центром фундаментной плиты в плане. Цифры на рисунках указывают на циклы наблюдений, соответствующей определенной нагрузке на основание. В каждом цикле наблюдений величина и направление крена определяется радиусом вектором  $\Delta h$  и углом  $\alpha$ , отсчитываемом от положительной оси  $OY$ .

Анализ осадок и кренов объектов №3–5 (рис. 6–8) показывает, что также на графиках отчетливо выделяются два участка: линейный и нелинейный. Линейный участок переходит в нелинейный при среднем давлении на основание  $P = 250\text{--}300$  кПа. Крен фундаментов появляется еще при небольших нагрузках и его величина очень незначительна. С момента, соответствующего переходу графика осадок в нелинейный участок кривая крена тоже меняет линейность, т. е. скорости крена возрастают. С этого же момента меняется направление крена (рис. 9–11) от пристроя в противоположную сторону. Изменение направления крена не наблюдается для фундаментов объектов №1, 2.

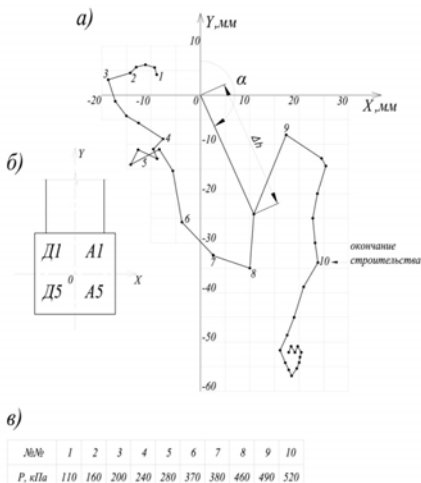


Рис. 9. Объект №3. а – график изменения величины и направления неравномерной осадки; б – схема разбивки фундамента на квадраты; в – таблица роста среднего давления на основание

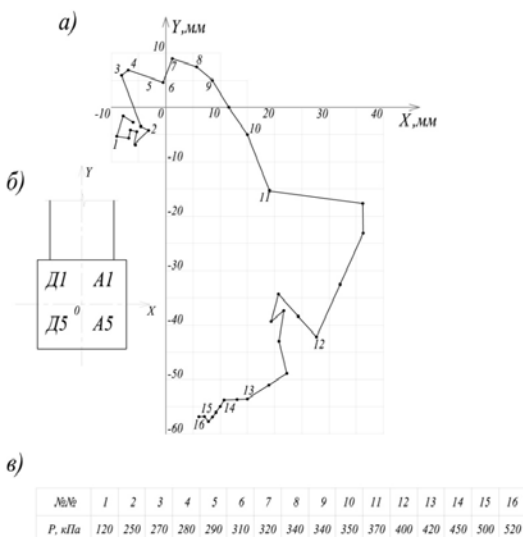


Рис. 10. Объект №4. а – график изменения величины и направления неравномерной осадки; б – схема разбивки фундамента на квадраты; в – таблица роста среднего давления на основание

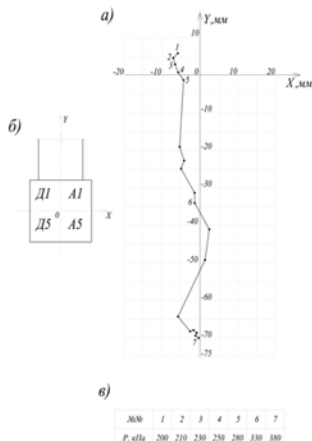


Рис. 11. Объект №5. а – график изменения величины и направления неравномерной осадки; б – схема разбивки фундамента на квадраты; в – таблица роста среднего давления на основание

**Список литературы:**

1. Соколов Н.С. Прогноз осадок большегабаритных фундаментов при повышенных давлениях на основания / Н.С. Соколов // Жилищное строительство. – 2017. – №4. – С. 3–8.
2. Егоров К.Е. Закономерности деформации основания фундаментов, имеющих большую площадь / К.Е. Егоров, Н.С. Соколов // Сборник трудов Всесоюзного совещания по фундаментостроению «Ускорение научно-технического прогресса в фундаментостроении». – М.: Стройиздат, 1987.
3. Егоров К.Е. Особенности деформаций оснований фундаментов, имеющих большую площадь / К.Е. Егоров, Н.С. Соколов // Сборник трудов IV Всесоюзного совещания по фундаментостроению. Т. 2. – М.: Стройиздат, 1987.
4. Егоров К.Е. Особенности деформаций оснований реакторных отделений АЭС / К.Е. Егоров, Н.С. Соколов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1985. – №4. – С. 14–17.
5. Соколов Н.С. Особенности расчета осадок большегабаритных фундаментов при повышенном давлении на грунты / Н.С. Соколов, С.М. Ушков // Материалы научно-технической конференции «Геотехника Поволжья–IV». 4.2. Основания и фундаменты. – Саратов, 1989.
6. Соколов Н.С. Совместная работа оснований и фундаментов РО АЭС / Н.С. Соколов // Труды ВНИИОСП им. И.М. Герсеванова. – 1988. – №87.
7. Соколов Н.С. Деформация основания круглого фундамента на конечном сжимаемом слое / Н.С. Соколов // Труды НИИОСП. – 1987. – Вып. 86.
8. Соколов Н.С. Расчетное сопротивление грунтов в основании большегабаритных фундаментов при повышенном давлении. / Н.С. Соколов, С.М. Ушков // Строительные конструкции. – Чебоксары, 1992.

Соколов Николай Сергеевич, канд. техн. наук, доцент, директор e-mail: forstnpf@mail.ru, ns\_sokolov@mail.ru

*Sokolov N.S., Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Director. e-mail: forstnpf@mail.ru, ns\_sokolov@mail.ru*

Для цитирования:

Соколов Н.С. Длительные исследования процессов деформирования оснований фундаментов при повышенных нагрузках // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 81–91.

Citation:

Sokolov N.S. Long research of the processes of the deformation of bases of foundation in high loads // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 81–91.

УДК 539.375

## ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

*Э.И. Старовойтов*

Белорусский государственный  
университет транспорта  
г. Гомель, Беларусь

*Аннотация:* рассмотрено деформирование трехслойной балки в температурном поле под действием сосредоточенной силы. Исследована зависимость напряженного состояния от места приложения сосредоточенной силы и температурного поля конструкции.

*Ключевые слова:* деформация, балка, напряжение, многослойность.

## THERMOELASTIC DEFORMATION OF A THREE- LAYER BEAM FOCUSED FORCE

*Abstract:* the deformation of a three-layer beam in a temperature field under the action of a concentrated force is considered. The dependence of the stress state on the place of application of the concentrated force and the temperature field of the structure is investigated.

*Keywords:* deformation, beam, stress, multilayer.

Исследованию деформирования трехслойных элементов конструкций посвящена обширная литература. В том числе и рабо-

ты [1–21]. Здесь рассмотрено деформирование трехслойной балки в температурном поле под действием сосредоточенной силы. Аналитический вид нагрузки задавался с помощью функции Хэвисайда. Для описания кинематики несимметричного по толщине трехслойного стержня приняты гипотезы ломаной линии: на границе предполагаются кинематические условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом:

$$\begin{aligned} & a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xxx} - a_5 u_{2,xxx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} = p, \\ & -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} = 0, \\ & -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\ & \quad + a_5 w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 = q - q_t, \\ & -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\ & \quad - a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 = q_t. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $w_1(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $w_2(x)$  и  $u_2(x)$  – прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоев; температурные добавки  $q_t$  и коэффициенты  $a_1, \dots, a_{17}$  определяются с учетом температуры.

Решение системы дифференциальных уравнений принимается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & u_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\ w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & w_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $U_{1m}$ ,  $U_{2m}$ ,  $W_{1m}$ ,  $W_{2m}$  – искомые амплитуды перемещений.

Поперечная нагрузка и температурные составляющие в слоях стержня также представляются в виде разложений в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & q_m &= \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx \\ q_t &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{tm} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & q_{tm} &= \frac{2}{l} \int_0^l q_t(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

После подстановки перемещений (2) и усилий (3) в уравнения равновесия (1) получим систему линейных алгебраических

уравнений для определения искомых амплитуд перемещений  $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ :

$$\begin{cases} b_1 U_{1m} + b_2 U_{2m} + b_3 W_{1m} + b_4 W_{2m} = p_m, \\ b_2 U_{1m} + b_5 U_{2m} + b_6 W_{1m} - b_7 W_{2m} = 0, \\ b_3 U_{1m} + b_6 U_{2m} + b_8 W_{1m} + b_9 W_{2m} = q_m - q_{tm}, \\ b_4 U_{1m} - b_7 U_{2m} + b_9 W_{1m} + b_{10} W_{2m} = q_{tm}, \end{cases} \quad (4)$$

где коэффициенты  $b_i$  зависят от параметра  $m$  и от температуры через коэффициенты  $a_n$ .

**3. Случай сосредоточенной силы.** Предварительно рассмотрим деформирование балки под действием поперечной поверхностной нагрузки  $q(x)$ , равномерно распределенной в интервале  $a \leq x \leq b$ .

Ее аналитический вид

$$q(x) = q_0 (H_0(b-x) - H_0(a-x)), \quad (5)$$

где  $H_0(x)$  – функция Хэвисайда,  $q_0$  – интенсивность нагрузки.

Коэффициенты разложения нагрузки (5) и температурной составляющей в ряд (3) будут

$$q_m = -\frac{2q_0}{\pi m} \left( \cos \frac{\pi m b}{l} - \cos \frac{\pi m a}{l} \right),$$

$$q_{tm} = -\frac{3\alpha_{03}}{cl} \int_0^l \int_{h_3} K_3(z) T_3(z) \sin \left( \frac{\pi m x}{l} \right) dz dx \quad (6)$$

Подставив коэффициенты (6) в систему (1) получим в результате ее решения искомые амплитуды перемещений  $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ .

Для решения задачи изгиба рассматриваемого трехслойного стержня сосредоточенной силой применим результат, полученный для распределенной на интервале  $a - c \leq x \leq a + c$  поверхностной нагрузки интенсивности  $q_0$  (рисунок 2). Предположим, что  $c$  мало и проведем в коэффициентах (12) замену  $q_0 = Q_0 / (2c)$ . После этого будем стягивать интервал нагрузки к сечению  $x = a$ , для чего устремим величину  $c$  к нулю, оставляя  $Q_0$  постоянной. После взятия соответствующего предела получим следующие коэффициенты разложения нагрузки в ряд:

$$q_m = \frac{2Q_0}{2c\pi m} \left( \cos \frac{\pi m(a+c)}{l} - \cos \frac{\pi m(a-c)}{l} \right) = \frac{2Q_0}{l} \sin \frac{\pi m a}{l}. \quad (7)$$

$$q_{im} = \frac{2}{l} \int_0^l q_t(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx = -\frac{3\alpha_{03}}{cl} \int_0^l \int_{h_3} K_3(z) T_3(z) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dz dx$$

Вычислив коэффициенты  $q_m$  по приведенной формуле (7), и внося их в систему (4), получим в результате ее решения искомые амплитуды перемещений  $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ . Полные перемещения после этого вычисляются суммированием рядов (3), деформации следуют из соотношений Коши, напряжения – из закона Гука.

*Численные результаты* получены при величине внешней силы  $Q_0 = 10^6$  Н. Материалы слоев: Д16-Т-фторопласт-4–Д16-Т. Термомеханические характеристики приведены в [14]. Относительные толщины слоев принимались:  $h_1 = 0,04, h_2 = 0,02, h_3 = 0,18$ . Теплота, ушедшая на нагревание внешнего металлического слоя, не учитывалась в силу его тонкости и малой теплоемкости. Температуры несущих слоев считались равными температуре заполнителя в местах их склейки:  $T^{(1)} = T^{(3)}(c, t), T^{(2)} = T^{(3)}(-c, t)$ . Температурное поле в заполнителе рассчитывалось по формуле, полученной в [22] для трехслойных элементов конструкций, при  $h_1 = 0, q_t = 5000$  Дж / (м<sup>2</sup> · с) в момент времени  $t = 60$  мин.

Рис. 1 показывает изменение вдоль оси стержня величины максимального различия между прогибами несущих слоев  $\varepsilon_{zz} = (w_1 - w_2) / (2c)$ , если сосредоточенная сила приложена в поперечном сечении с координатой  $x = 0,5$ : 1 – изотермическое деформирование, 2 – термосиловое. Максимум обжатия достигается в середине балки. На опорах обжатие отсутствует. Скачок посередине стержня обусловлен воздействием локальной силы, направленной вниз. При температурном воздействии обжатие в интервале  $0,4 < x < 0,6$  уменьшается, а в остальной части стержня заполнитель растянут.

На рис. 2 показано изменение прогибов несущих слоев  $w_1, w_2$  посередине стержня ( $x = 0,5$ ) в зависимости от координаты  $a$  места приложения сосредоточенной силы  $Q$ .

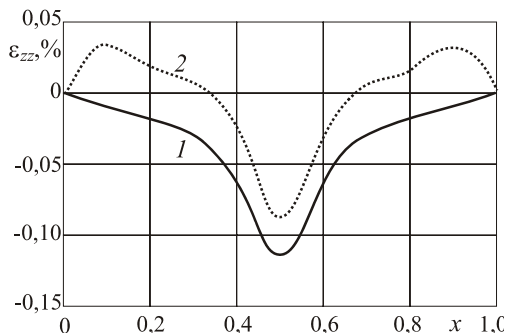


Рис. 1

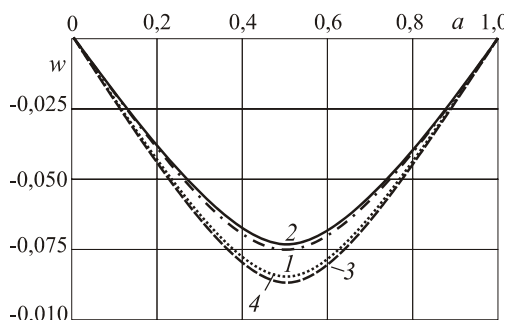


Рис. 2

По мере продвижения силы от левого края стержня прогибы возрастают и достигают максимума при  $a = 0,5$ , затем их величина убывает. Если сила приложена на опорах стержня, то прогибы нулевые. Температура увеличивает максимальные прогибы на 16 %.

Распределение соответствующих нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  вдоль оси стержня на поверхностях первого слоя показано на рис. 3: 1, 3 –  $z = c$  – внутренняя поверхность, 2, 4 –  $z = c + h_1$  – внешняя поверхность (3, 4 – с температурой). Значения напряжений в несущих слоях отнесены к интенсивности нагрузки  $q_1 = 10^9$  Па, в заполнителе – к  $q_3 = 10^8$  Па. Увеличение температуры слоя приводит к его сжатию и увеличению напряжений в 5 раз по модулю. Пики деформаций и напряжений наблюдаются в сечении стержня с сосредоточенной силой.

Интересно отметить, что график зависимости деформации  $\delta$  в сечении  $x = 0,5$  от координаты приложения силы  $b$  будет по форме и величине совпадать с графиком на рисунке 1. Это обу-



словлено тем, что, если в выражение для параметров (3) подставить в формулу разложения нагрузки в ряд (2), то в результате получим нагрузку, как функцию симметричную относительно аргументов  $x$  и  $a$  ( $f(x, a) = f(a, x)$ ).

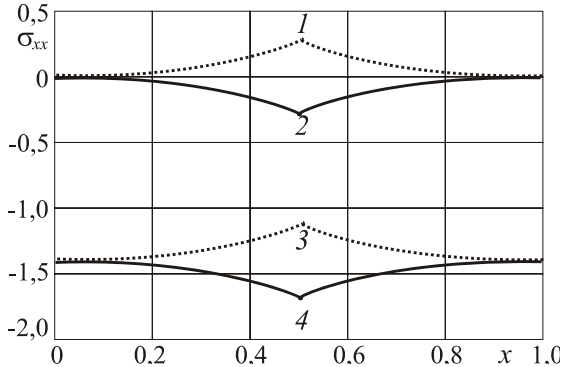


Рис. 3

Поэтому соответствующий график здесь не приводится. Следует отметить, что по сравнению со случаем локально распределенной нагрузки кривые на графиках отличаются по форме.

*Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T18P-090).*

**Список литературы:**

1. Горшков А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.
2. Ivañez I. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez, M.M. Moure, S.K. Garcia-Castillo [et. al.] // Composite Structures. – 2015. – №133. – P. 1127–1136.
3. Grover N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. – 2016. – №52. – P. 41–51.
4. Starovoitov E.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, – №4. – P. 346–352.
5. Starovoitov E.I. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39. – №12. – P. 1458–1463.
6. Горшков А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – №1. – С. 45–52.

7. Starovoitov É.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 46. – №1. – P. 86–93.

8. Старовойтов Э.И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. – 1980. – №2. – С. 92–96.

9. Москвитин В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1986. – №1. – С. 116–121.

10. Москвитин В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // *Механика композитных материалов*. – 1985. – №3. – С. 409–416.

11. Горшков А.Г. Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 2001. – №1. – С. 79–85.

12. Starovoitov E.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2007. – Vol. 43. – №4. – P. 451–459.

13. Leonenko D.V. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2011. – Vol. 46. – №2. – P. 291–298. doi: 10.3103/S002565441102018X.

14. Старовойтов Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2016. – №1. – С. 91–97.

15. Старовойтов Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2006. – №4. – С. 55–62.

16. Starovoitov É.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44. – №9. – P. 1032–1040.

17. Старовойтов Э.И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика композитных материалов*. – 2016. – 52. – №5. – С. 943–954.

18. Старовойтов Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2016. – №1. – С. 91–97.

19. Starovoitov E.I. Variable thermal-force bending of a three-layer bar with a compressible filler / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *Mechanics of Composite Materials*. – 2017. – Vol. 53. – №5. – P. 645–658. DOI: 10.1007/s11029-017-9693-5.

20. Starovoitov E.I. Thermoelastic Deformation of a Circular Sandwich Plate by Local Loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovski // *Mechanics of Composite Materials*. – 2018. – Vol. 54. – №3. – P. 299–312. DOI 10.1007/s11029-018-9740-x.

21. Starovoitov É.I. Effect of heat flow on the stressed state of a three-layer rod / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2019. – Vol. 92. – №1. – P. 60–72. DOI 10.1007/s10891-019-01907-9

22. Старовойтов Э.И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // *Пробл. прочности*. – 1988. – №4. – С. 11–15.

Старовойтов Эдуард Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта, Гомель, Беларусь. Адрес для переписки: 246653, Беларусь, Гомель, ул. Кирова 34, БелГУТ, кафедра «Строительная механика», e-mail: strmech@bsut.bi

*Starovojtov Eduard Ivanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the department «Structural Mechanics» of the Belarusian State University of Transport, Address for correspondence: 246653, Belarus, Gomel, Kirova street 34, BelSUT. e-mail: strmech@bsut.bi*

Для цитирования:

Старовойтов Э.И. Термоупругое деформирование трехслойной балки сосредоточенной силой // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 91–98.

Citation:

Starovojtov E.I. Thermoelastic deformation of a three-layer beam focused force // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 91–98.

УДК 624.131

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТОВ

*Е.Ю. Трацевская*

Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины  
г. Гомель, Беларусь

*Аннотация:* рассмотрено напряженно-деформированное состояние неводонасыщенных грунтов различного генезиса. Рассмотрено влияние предельного состояния супесчаных грунтов от состава и свойств твердой фазы. На основе экспериментальных данных получены характеристики деформируемости грунтов.

*Ключевые слова:* грунт, механические свойства, водонасыщенность, пластичность, деформации.

## DETERMINATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF UNSATURATED SOILS

*Abstract:* the stress-strain state of non-saturated soils of various genesis is considered. The influence of the limiting state of sandy loam soils on the composition and properties of the solid phase is considered. Based on experimental data, soil deformability characteristics are obtained.

*Keywords:* soil, mechanical properties, water saturation, ductility, deformation

Приложение к естественным грунтовым основаниям фундаментов нагрузок, превышающих их пределы упругости, приводит к возникновению необратимых пластических деформаций, в области которых исчезает пропорциональность между величиной деформации грунта и нагрузкой.

Под пластичностью грунта понимается его способность деформироваться без разрыва сплошности под воздействием внешних механических усилий и сохранять полученную форму после их снятия. К изучению пластичности в современном грунтоведении сложился двойкой подход. С одной стороны, она характеризуется способностью грунта к необратимым (пластическим) деформациям под действием определенного внешнего механического усилия, а с другой – способностью грунта пере-

ходить в пластическую консистенцию в определенных интервалах его влажности при неопределенной величине нагрузки. Первый параметр является прямой характеристикой пластичности грунта, второй – косвенной [1].

По результатам штамповых испытаний выделяют стадии уплотнения и сжатия грунта, у которых зависимость «напряжение – деформация» принимается линейной. Дальнейшее увеличение давления приводит к началу развития в грунте сдвигов, осадка штампа резко интенсифицируется, происходит *нарушение линейной зависимости между напряжением и деформацией*. На этой стадии существенно преобладают необратимые деформации, которые обусловлены, главным образом, проявлением пластичности грунта. Несмотря на постоянство нагрузки, деформирование на этой стадии прогрессирует. Величина нагрузки, при которой происходит разрушение грунта ( $P''$ ) называется пределом несущей способности грунта [1; 2].

Ранее особенности формирования и свойства дисперсных грунтов исследовались в работах [3–7]. Здесь объектом исследований служили супесчаные неводонасыщенные грунты различного генезиса: ледниковые, аллювиальные – второй и первой надпойменных террас и поймы р. Сож. Особенностью этих грунтов является резкое изменение деформируемости и прочности при увлажнении.

Пластичность связных грунтов рассматривается с точки зрения ее обусловленности составом и свойствами твердой фазы, а также той стадии литогенеза, на которой сформированы свойства супесчаных грунтов. Были установлены гидрофильность, коллоидная активность и уплотненность при определенном минеральном и гранулометрическом составе.

Были изучены супеси различного генезиса, образовавшиеся в четвертичном периоде, которые широко распространены в юго-восточной части Беларуси: днепровские ледниковые и флювиогляциальные; поозерские (валдайские) озерно-аллювиальные и аллювиальные – второй и первой надпойменных террас, а также голоценовые отложения поймы реки Сож.

Для анализа выбраны результаты, полученные при испытании супесей штампами с плоской подошвой площадью  $600 \text{ см}^2$  с приблизительно одинаковой глубиной заложения. Испытания были проведены различными изыскательскими организациями.

У отложений моренных и второй надпойменной террасы при приложении давления ( $P$ ) больше бытового ( $P_{\text{быт}}$ ) проявляется линейная зависимость между давлением и деформацией.

В определенных интервалах давления эти грунты ведут себя как квазитвердые тела, что соответствует их твердой консистенции.

При давлениях 0,20; 0,25 и 0,30 МПа соответственно супеси второй надпойменной террасы твердой консистенции и моренные – скрытопластичной и твердой консистенции переходят в пластичное состояние. Этим значениям давления соответствуют осадки 2,5; 4,7 и 1,95 мм. Связанные с этими давлениями напряжения, возникающие в грунтах, определяют их структурную прочность. Супеси первой надпойменной террасы скрытопластичной консистенции практически сразу же при приложении нагрузки равной бытовой переходят в пластичное состояние и структурной прочностью не обладают.

По деформационным кривым определены интервалы давлений ( $\Delta P_{пл}$ ) и соответствующих осадок ( $\Delta S_{пл}$ ), в которых грунт проявляет свойство пластичности:  $\Delta P_{пл} = 0,1; 0,1$  МПа и  $\Delta P_{пл} > 0$ ;  $\Delta S_{пл} = 4,3; 7,3$  мм и  $(\Delta S_{пл}) > 4,5$  мм для моренной супеси скрытопластичной консистенции, аллювиальной супеси второй надпойменной террасы твердой консистенции и аллювиальной первой надпойменной террасы скрытопластичной консистенции (*a<sub>1</sub>IIIpz*).

### Выводы

Общие закономерности влияния генезиса, состава и свойств твердой фазы супесчаного грунта на его пластичность в напряженном состоянии следующие:

- повышенная пластичность аллювиальных грунтов первой и второй надпойменной террас связана с формированием свойств на стадии позднего диагенеза и незавершенностью процесса консолидации, а также их большей гидрофильностью;
- пластичность и деформируемость моренных супесей заметно снижены, что обуславливается повышением степени лифтикации грунтов.

Полученные характеристики деформируемости грунтов были использованы при исследовании элементов конструкций, связанных с упругом основанием [8–11].

### Список литературы:

1. Трацевская Е.Ю. Особенности формирования техногенного подтопления дисперсных грунтов // Природные ресурсы. –2008. – №2. – С. 106–112.
2. Трацевская Е.Ю. Экспериментальное исследование динамических характеристик неустойчивости трехфазных грунтов // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. –2017. – №2. – С. 57–64.

3. Трацевская Е.Ю. Геологическая опасность развития подтопления грунтов и оценка экономических рисков при ее реализации // Природные ресурсы. – 2009. – №1. – С. 102–109.

4. Трацевская Е.Ю. Влияние развития техногенного подтопления в дисперсных грунтах на надежность системы «основание-фундамент-здание» // Экология урбанизированных территорий. 2011. – №2. – С. 71–76.

5. Трацевская Е.Ю. Динамическая неустойчивость квазитекстурных моренных грунтов // Литосфера. – 2017. – №1 (46). – С. 107–111.

6. Трацевская Е.Ю. Современное динамическое состояние геологической среды г. Гомеля и его влияние на инженерно-геологические условия / Е.Ю. Трацевская, О.К. Абрамович // Литосфера. – 2008. – №2 (29). – С. 129–137.

7. Трацевская Е.Ю. Особенности освоения техногенных грунтов г. Гомеля в современных условиях / Е.Ю. Трацевская, А.Н. Галкин // Многообразие грунтов: морфология, причины, следствия. Тр. Международной научной конференции / под ред. В.Т. Трофимова и В.А. Королева. – 2003. – С. 123–124.

8. Старовойтов Э.И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1980. – №2. – С. 92–96.

9. Старовойтов Э.И. Термосиловое нагружение пологих трехслойных оболочек // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1989. – №5. – С. 114–119.

10. Старовойтов Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – №3. – С. 91–98.

11. Старовойтов Э.И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Проблемы прочности. – 1988. – №4. – С. 11–15.

Трацевская Елена Юрьевна, доцент, канд. геолого-минералогических наук, заведующая кафедрой «Геология и разведка полезных ископаемых» Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. e-mail: [Tratsevskaya@gsu.by](mailto:Tratsevskaya@gsu.by)

*Tratsevskaya E. Associate Professor, Candidate of Geological and Mineralogical Sciences, Head of the Department of Geology and Mineral Exploration Gomel State University named after F. Skorina. e-mail: [Tratsevskaya@gsu.by](mailto:Tratsevskaya@gsu.by)*

Для цитирования:

Трацевская Е.Ю. Определение механических свойств неводонасыщенных грунтов // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 99–102.

Citation:

*Tratsevskaya E.Yu. Determination of mechanical properties of unsaturated soils // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 99–102.*

## РАЗДЕЛ 2. МЕХАНИКА НЕСУЩИХ СИСТЕМ

УДК 721.011:551.5

### ВОПРОСЫ И ПУТИ РЕШЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ ОСВОЕНИЯ АКВАТОРИИ СЕВЕРНОГО ЛЕДОВИТОГО ОКЕАНА

*А.Н. Жиренков*

Сургутский государственный университет  
г. Сургут, Россия

*И.И. Масленникова*

Нижегородский строительный техникум  
г. Н. Новгород, Россия

*Аннотация:* в статье рассматривается принятая технология строительства взаимосвязанной системы сооружений, находящейся частично как в акватории моря, так и в прибрежной зоне северного ледовитого океана. Грунтами основания такой системы служат многолетние мерзлые породы; их длительная – заданная во времени эксплуатация, в настоящее время недостаточно изучена. В подобных условиях, актуальными вопросами проектирования становятся: правильный выбор материала строений обеспечивающий надежную эксплуатацию сооружений и выбор рационального способа передачи нагрузок от сооружений на мерзлые грунты основания с ледяными таликами, обеспечивающий их заданную во времени работоспособность. Для предохранения строений от оползневых разрушений, в подобных условиях эксплуатации, предложен способ закрепления оснований на основе устройства буроинъекционных свай.

*Ключевые слова:* акватория моря, плавучая система колебание моря, свайное поле, оползневые процессы.

### ISSUES AND WAYS TO SOLVE CONSTRUCTION PROBLEMS OF DEVELOPMENT OF THE AQUATORIA OF THE NORTHERN ARCTIC OCEAN

*Abstract:* the article considers the adopted technology for the construction of an interconnected system of structures, located partly both in the water area of the sea and in the coastal zone of the Arctic Ocean. Grounds of the basis of such a system are perennial frozen rocks; their long-term operation, specified in time, is currently insufficiently studied. In such conditions, the actual design issues are: the



*correct choice of construction material ensuring reliable operation of structures and the choice of a rational way of transferring loads from structures to frozen base grounds with ice tali, providing their specified performance in time. To protect buildings from landslide destruction, under similar operating conditions, a method for fixing the bases based on the device for drilling injections piles is proposed.*

**Keywords:** water area of the sea, floating system, sea fluctuations, pile field, landslide processes.

Приоритетные задачи освоения Севера РФ, в настоящее время основаны на направлениях более эффективного использования восполняемых источников энергии используемых и при добыче природных ресурсов, и при освоении труднодоступной территории Севера с учетом выполнения требования обеспечения комфортных условий пребывания там жителей страны.

Преимущества атомных электростанций (АЭС) перед другими альтернативными источниками энергии, выражено в их мобильности и возможности вторичного использования, следовательно, их активное внедрение в практику освоения северных территорий, имеющих значительные объемы полезных ископаемых, особенно важно в настоящее время. В настоящее время АЭС широко используется и на поверхности земли, и в водах мирового океана, при этом конструктивное решение непрерывно совершенствуется, повышается эксплуатационная надежность, мобильность и способность маневрирования в зависимости от требуемых условий местности их назначения. Применение мобильных АЭС, в суровых климатических условиях северных территорий, позволяет оперативно внедрять самые передовые технологии добычи полезных ископаемых и реализовывать новаторские – грандиозные конструктивные строительные решения по возведению зданий и сооружений на вечномерзлых грунтах акватории Северного ледовитого океана, направленные на создание комфортных условий проживания для покорителей северных территорий страны. Применение традиционных (устаревших) технологий освоения территории Севера часто приводит к значительному удорожанию выполняемых работ по добыче ископаемых и строительным работам освоения территории, поэтому, в рыночных условиях производства работ необходим учет (разработка) новых подходов решения проблем, основой их являются достижения в области науки и техники. Примером такого подхода служат работы по дальнейшему совершенствованию АЭС, представленные в трудах И.С. Кроль, Р.О. Красновского [1] и др. авторов. Реальным, ныне осуществляемым примером строительства плавучего энергоблока, как гидротехнического сооружения может служить АЭС в проливе Певек в Чаун-

ской губе Восточно-Сибирского моря Чукотского автономного округа РФ (рис. 1).

Отличительной особенностью подобных сложных инженерных систем сооружений, имеющих высокий уровень ответственности (повышенного класса сооружения – 1) является: необходимость обеспечения всех заданных требований нормальной эксплуатации включая и требование обеспечение удержания энергоблока на месте стоянки при экстремальных внешних воздействиях повторяемостью один раз в 10000 лет. Наиболее существенными, из внешних агрессивных факторов силовых воздействий на строения являются – ветровые [2]. Полный учет всех внешних действующих силовых факторов воздействия на строения комплекса ПАТЭС и строения береговой зоны, работающих совместно: затруднителен. Причиной этого является то, что часть рассматриваемой работающей совместно системы эксплуатируется на море, другая в береговой зоне, расположенной на вечномёрзлых (ММП) грунтах основания, которые имеют сплошное распространение под слоем сезонного оттаивания.



Рис. 1. Плавающая атомная теплоэлектростанция (ПАТЭС) и ее расположение на береговой зоне г. Певек

Мощность залегания ММП с поверхности, на площадке строительства, составляет: на побережье от 50 до 70 м., ниже находятся охлажденные породы с криопэгами с температурой от  $-2^{\circ}\text{C}$  до  $-4^{\circ}\text{C}$ . К характерной особенностью рельефа местности, в зоне подхода к ПАТЭС – в шельфовой зоне, относится и большой перепад высот, затрудняющей производство строительно-монтажных работ береговой зоны местности. Следовательно, необходим большой объем выполнения земляных работ для выравнивания площадки строительства. Выполняемая вертикальная планировка площадки строительства основана на возведении насыпей для возводимых сооружений в береговой зоне, и строительства подхода к мосту с опорой в зоне расположения ПАТЭС – искусственных сооружений, возводимых на береговой зоне моря. Подобная технология строительного решения моста обеспечивает нормальное функционирование инфраструктуры: ПАТЭС – г. Певек (рис. 2, 3).



Рис. 2а. Расположение системы обеспечения функциональных связей (ПАТЭС – г. Певек). Благоустроенная зона города Певек

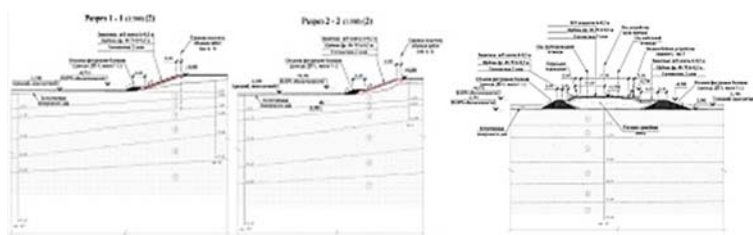


Рис. 2б. Расположение системы обеспечения функциональных связей (ПАТЭС – г. Певек). Подходы к мосту

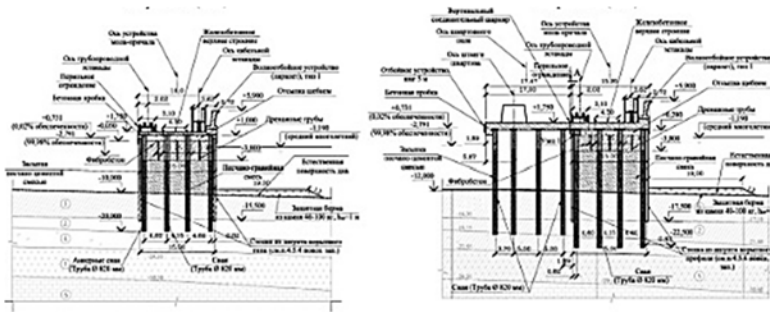


Рис. 2в. Расположение системы обеспечения функциональных связей (ПАТЭС – г. Певек). ПАТЭС

Рассматривая совместную работу – подвижной системы ПАТЭС (плавучая система) и моста с подходами (устойчивая система), видно: для повышения надежности совместной работы системы, при внешних силовых воздействиях, необходима стабилизация подвижности ПАТЭС; таким решением являются принятые меры повышения их устойчивости (рис. 3).

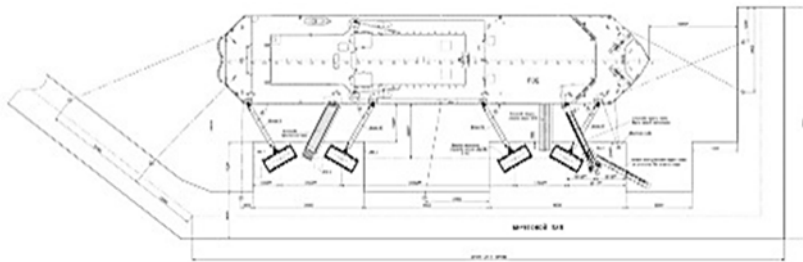


Рис. 3. Крепление ПАТЭС к оградительному молу и швартовным палам

Крепление выполнено на основе использования устройств береговой амортизации и устройств крепления транспортного въезда с использованием как вантовых систем, так и других приспособлений, обеспечивающих надежность эксплуатации системы исходя из расчета крепления швартовных тумб с ПЭБ. В расчетных схемах учитывались не только традиционно учитываемые нагрузки (постоянные и полезные), но и специфические: сгонно-нагонные колебания моря на материк обусловленные ветрами (с моря на материк – нагонные, с материка на

море – сгонные), усиливаемыми при штормах и волнениях из-за значительной ледовитости и мелководности Восточно-Сибирского моря (здесь максимальная высота воли достигает 4 м).

Также в расчетах учитывалась и тяжелая ледовая обстановка в районе порта Певек, так как в отдельные годы, очищение ото льда на входе в Чаунскую губу, не происходит в течении всего лета. К специфическим особенностям расчета относится и учет явления рефракции и донного трения, возникающего при волновом давлении в зоне песчаных кос (глубина пролива Певек до 30 м), так как там волны могут проникать к порту, создавая дополнительные нагрузки. Береговая зона порта Певек расположена на многолетнемерзлых породах (ММП) грунтов основания, глубиной залегания – от 50 до 70 м.; способы освоение этой территории для целей строительства и впоследствии надежной эксплуатации сооружений являются предметом глубокого изучения. В этой зоне возможно проявление оползневых явлений так как под слоем сезонного оттаивания ММП создается прослойка сливающегося типа в грунтах основания, по которой возможно проявление сдвига сооружений, приводящее к разрушению, в случаях, когда конструктивное решение фундаментов строений не учитывает подобную ситуацию.

Традиционно, в условия северных территорий на заболоченных территориях, при слабых грунтах основания (территория ХМАО–ЮГРА), предпочтение отдается свайным фундаментам. Однако, в устье реки Обь (район порта Певек) на крутых прибрежных зонах, внедрение аналогичных строительных решений требует более глубокой дополнительной проработки, учитывающей и ранее накопленный опыт проектирования и новые научные достижения в области фундаментостроения, отличающиеся от предлагаемых в нормативных документах [3]. Согласно накопленному – положительному опыту строительства различных зданий и сооружений в условиях наличия подобных грунтов в основании как в обычных условиях, так и в условиях ММП с слоями сливающегося типа, на территории с значительными уклонами местности требуется учет явлений оползневого характера, часто проявляющийся в подобных ситуациях [4, рис. 4.].

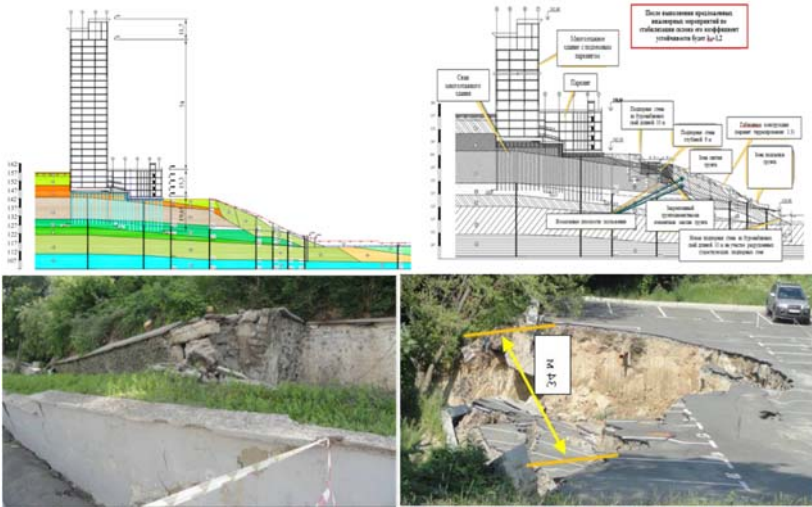


Рис. 4. Проявление оползневых процессов и их последствий

При выборе способа передачи нагрузок от зданий и сооружений на основание, в условиях нахождения их на грунтах ММП, необходимо учитывать требования обеспечения надежной эксплуатации как самих сооружений, так и оснований в течение требуемого срока эксплуатации. Оптимальным путем выполнения поставленных условий могут быть принятые меры, направленные на: во-первых, снижение массы применяемых материалов в сооружениях, во-вторых, выбор способа устройства фундаментов с минимально-возможным силовым (динамическим) воздействием на ММП основания при возведении фундаментов, в-третьих, рациональный выбор вида фундамента, обеспечивающего передачу внешних нагрузок на грунты основания в зоне наибольшей несущей способности грунтов. Примером принятия мер подобных решений, выполняемых перед началом строительства, служит укрепление оползневой зоны (возможное и для грунтов ММП) строительства, на основе применения буроинъекционных свай [5, рис. 5].



Рис. 5. Устройство стенки на основе буроинъекционных свай стабилизировало разрушение стены Кафедрального Собора (1651 г., в г. Чебоксары)

Расчет всей системы, включающей: комплекс гидротехнических сооружений ПАТЭС – береговая зона строительства, и зону инфраструктуры г. Певек, выполнен на экстремальные климатические, гидрогеологические и сейсмические условия. С учетом гидрогеологических условий назначена и высота надводных строений сооружений, принятая при сильном волнении моря с максимальной высотой воли до 4 м. Исходя из этого, отметка верха берегоукрепления и береговых строений (БС) принята: + 4,500, что и определило высоту опор надводной зоны строений в г. Певек. Конструктивное решение расположения свайного поля основания швартовного пала представлено на рис. 6–8.

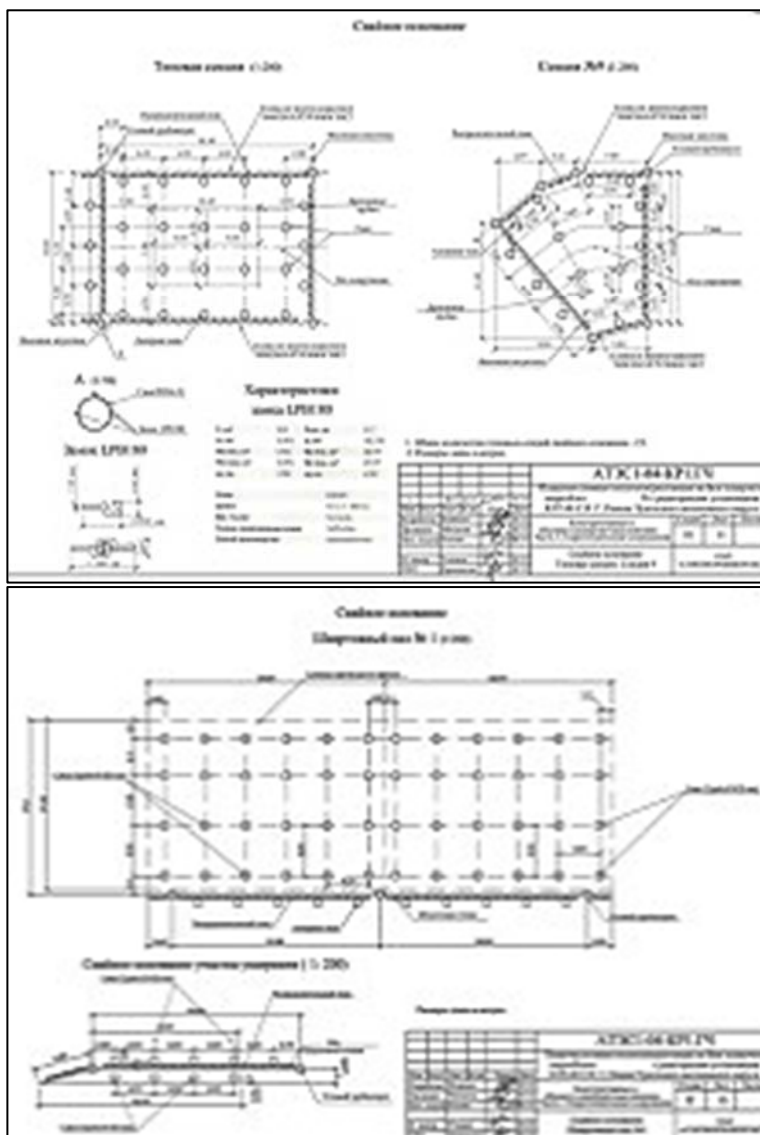


Рис. 6. Швартовый пал: Свайное поле



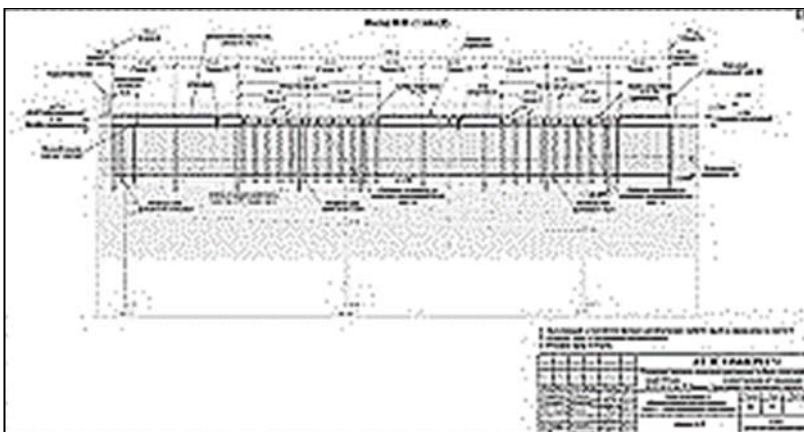


Рис. 7. Швартовый пал: Поперечный разрез

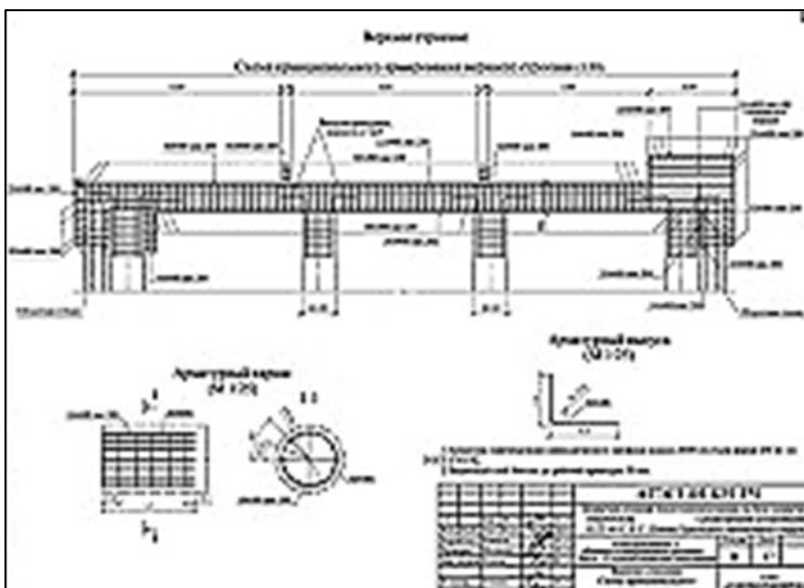


Рис. 8. Швартовый пал: Устройство ростверка

При назначении глубины погружения свай в ММП следует учитывать, что в суровых климатических условиях возможно, в отдельных местах, распространение талых пород – таликов, тогда (в зоне таликов) несущая способность свай, особенно свай-

стоек резко снижается. Талики имеют распространение в руслах крупных рек-подрусловые талики. Они могут быть подрусовыми и сквозными, т.е. пронизывать всю толщу мерзлых пород [6; 7], их распространение, особенно в зоне строительства, необходимо учитывать при проведении специальной мерзлотной разведки.

При назначении глубины погружения свай в ММП следует учитывать, что в суровых климатических условиях возможно, в отдельных местах, распространение талых пород – таликов, тогда (в зоне таликов) несущая способность свай, особенно свай-стоек резко снижается. Талики имеют распространение в руслах крупных рек-подрусловые талики. Они могут быть подрусовыми и сквозными, т. е. пронизывать всю толщу мерзлых пород [6; 7], их распространение, особенно в зоне строительства, необходимо учитывать при проведении специальной мерзлотной разведки.

Учитывая, что оттайка ММП является причиной разупрочнения грунтов, предпочтительнее строительство сооружений выполнять сохраняя мерзлое состояние пород используя свай-стойки заглубленных в грунты ММП на длину от 5 до 10 м., и имеющих аналогичную высоту надводной части строений (в зависимости от рельефа местности в районе г. Певек, рис. 2). В конструкции оградительного мола, передающего внешние нагрузки, конструктивно предусмотреть металлический шпунт корытного типа с усилением в виде углового трубошпунта  $d = 820 \times 10$  мм, с опиранием на анкерные сваи  $d = 820 \times 10$  мм. Затем сваи, до отметки верха трубы, следует заполнить тяжелым бетоном во избежание льдообразования. Исходя из задач предотвращения явлений оползневого характера, на склонах г. Певек, в качестве фундаментов строящихся сооружений также целесообразны свайные фундаменты, работа которых ориентирована на передачу внешних воздействий на ММП работающих по подобию работы свай-стоек.

В качестве материала стен строений рекомендованы «легкие» – стальные конструкции, обладающие высокой несущей способностью, утепленные негорючими минераловатными плитами. Для обеспечения сохранности ММП в проектируемых сооружениях, в уровнях планировочной отметки земли, предусматривается продуваемая зона (на высоте 1-го этажа строений), что способствует уменьшению высоты зоны сезонного оттаивания ММП. Примеры конструктивных решений строительства строений, рекомендованных в грунтах ММП на акватории пролива г. Певек приведены на рис. 9–11.

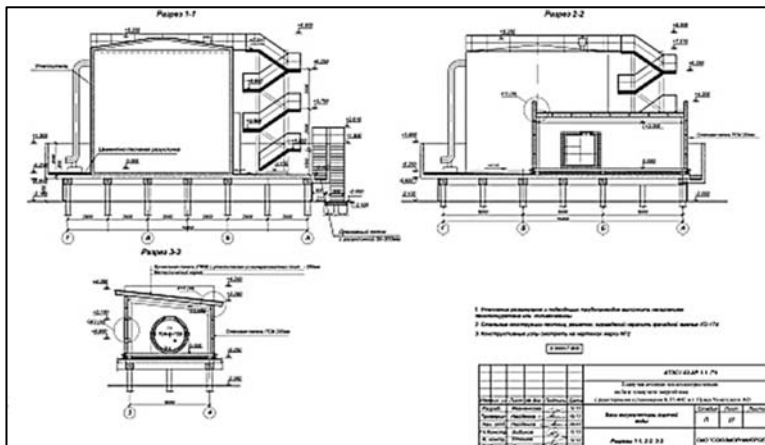


Рис. 9. Пример конструктивного решения строительства эстакады для хранения емкостей и способ передачи нагрузок от нее, через сваи, установленные в многолетнемерзлые породы (ММП), включающие: грунты основания, талики и слои льда

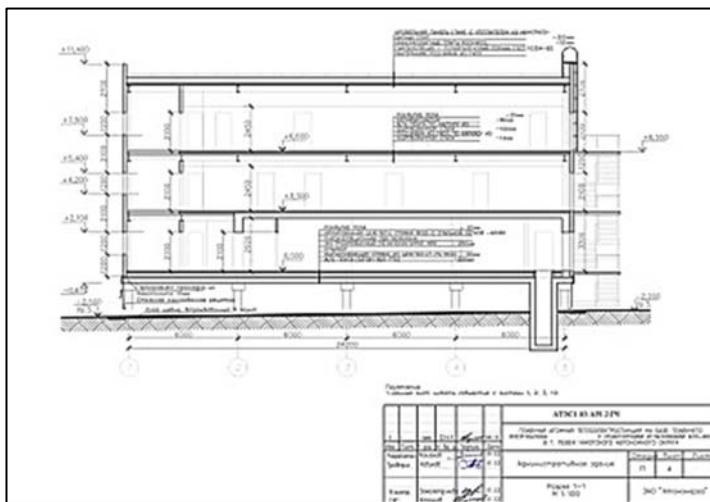


Рис. 10. Пример конструктивного решения строительства здания промышленного назначения с опиранием его на ММП. (Для сохранения физико-механических характеристик ММП предусмотрена открытая, продуваемая зона между ММП и 1-м этажом здания)

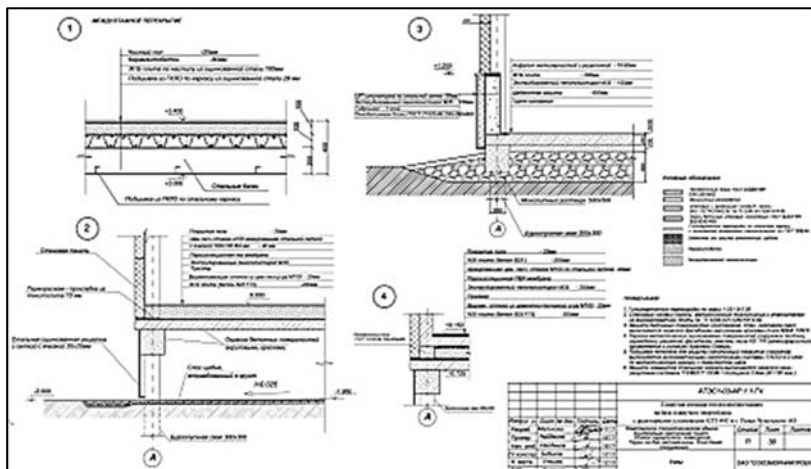


Рис. 11. Узлы сопряжений строительных сооружений с МПП на основе дополнительного устройства продуваемых сопряжений, обеспечивающих сохранение их естественного – вечномерзлого состояния. Конструктивное решение использования легких систем теплозащиты стен, значительно снижающих нагрузки от зданий на основания

**Список литературы:**

1. Дорф В.А. Сборно-монолитная технология строительства зданий с несъемной сталефибробетонной опалубкой / В.А. Дорф, Р.О. Красновский, И.С. Кроль [и др.] // Материалы II Всероссийской научно-практической конференции «Север России: стратегии и перспективы развития». – Сургут, 2016. – С. 77–82.
2. Ефремова И.И. Архитектурные решения эксклюзивных сооружений и их адаптация на Севере РФ / И.И. Ефремова, А.Н. Жиренков // Материалы II Всерос. науч.-практ. конф. «Север России: стратегии и перспективы развития». – Сургут, 2016. – С. 83–86.
3. Соколов Н.С. Подходы к увеличению несущей способности буроинъекционных свай усиления / Н.С. Соколов // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материалы III Междунар. (IX Всерос.) конф. НАСКР–2016. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2016. – С. 304–315.
4. Зоценко Н.Л. Инженерные мероприятия по стабилизации оползневого склона / Н.Л. Зоценко, Ю.Л. Винников, М.А. Харченко [и др.] // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материалы VIII Всероссийской (II Международной) конф. НАСКР–2014. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2014. – С. 359–363.
5. Соколов Н.С. Случай восстановления аварийного памятника истории и культуры федерального значения в г. Чебоксары / Н.С. Соколов, С.Н. Соколов, А.Н. Соколов // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материалы VIII Всерос. (II Междунар.) конф. НАСКР–2014. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2014.–С. 328–335.

6. Потемкин С.В. Оттайка мерзлых пород: учеб. для вузов. – М.: М «НЕДРА», 1991. С. 160.

7. Зайцев С.В. Спецоборудование амфибийных транспортных средств специального назначения. Наплавные мосты и паромы: учеб. пособие / С.В. Зайцев, М.Ю. Тимофеев. – М.: МАДИ, 2015. – 100 с

Жиренков Александр Николаевич, Сургутский государственный университет, e-mail: girenkov-an@surgu.ru

Масленникова Ирина Игоревна, Нижегородский строительный техникум, e-mail: hart1994bhbyf@mail.ru

*Zhirenkov Alexander Nikolaevich Surgut State University. e-mail: girenkov-an@surgu.ru*

*Maslennikova Irina Igorevna, Nizhny Novgorod Construction College, e-mail: hart1994bhbyf@mail.ru*

Для цитирования:

Жиренков А.Н. Вопросы и пути решения строительных проблем освоения акватории северного ледовитого океана / А.Н. Жиренков, И.И. Масленникова // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 103–116.

Citation:

Zhirenkov A.N. Issues and ways to solve construction problems of development of the aquatoria of the northern arctic ocean / A.N. Zhirenkov, I.I. Maslennikova // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 103–116.

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ СИСТЕМОЙ АРМИРУЮЩИХ СТЕРЖНЕЙ

**В.А. Иванов**

Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова  
г. Чебоксары, Российская Федерация

**Л.И. Вуцин**

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского  
г. Нижний Новгород, Российская Федерация

**М.В. Скобеева**

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского  
г. Нижний Новгород, Российская Федерация

***Аннотация:** рассматривается нестационарное деформирование пространственных конструкций, выполненных из изотропных материалов (матрицы), подкрепленных системой стержней. Определяющая система уравнений формулируется в переменных Лагранжа. В качестве уравнений состояния для металлов и сплавов применяются соотношения теории течения Бетон и кирпичная кладка рассматриваются как разномодульная среда. Для решения задачи применяется метод конечных элементов и явная конечно-разностная схема интегрирования по времени типа «крест».*

***Ключевые слова:** матрица, армирование, дискретный, пластичность, накопление повреждений, метод конечных элементов, балка, изгиб.*

## NUMERICAL MODELING OF THE DYNAMICS OF STRUCTURES, STRETCHED BY ARM REIN- FORCEMENT SYSTEMS

***Abstract:** the non-stationary deformation of spatial structures made of isotropic materials (matrix), supported by a system of rods, is considered. The defining system of equations is formulated in La-*

*grange variables. As equations of state for metals and alloys, the flow theory relations are used. Concrete and masonry are considered as a multi-modular medium. To solve the problem, the finite element method and an explicit finite-difference time integration scheme of the «cross» type are used.*

**Keywords:** *matrix, reinforcement, discrete, plasticity, damage accumulation, finite element method, beam, bending*

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №17-08-00986-а.*

В [1; 2] разработаны конечно-элементные модели деформирования конструкций из изотропного материала, армированного стержнями при статическом нагружении. В настоящей работе изложенный в [1; 2] подход развит для решения трехмерных задач динамики.

Определяющая система уравнений формулируется в переменных Лагранжа с позиций механики сплошных сред [3; 4]. Гипотезы, принятые в теории стержней, вводятся на этапе дискретизации задачи, что позволяет упростить их стыковку с основным материалом. Движение деформируемой конструкции будем описывать уравнением, следующим из вариационного принципа баланса мощности виртуальной работы [5]. Связь между скоростями деформаций и скоростями перемещений описывается соотношениями Коши в текущей метрике. В качестве уравнений состояния для металлов и сплавов применяются соотношения теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением [6], а для бетона или кирпичной кладки соотношения разномодульной среды, учитывающие накопление повреждений [7–11].

Решение задачи при заданных начальных и граничных условиях основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» [12–15]. Для учета подкрепляющих стержней разработан конечный элемент, описывающий взаимодействие сплошной среды и арматуры. Осевые линии подкрепляющих стержней могут не совпадать с линиями конечно-элементной сетки матрицы. Криволинейные в общем случае стержни разбиваются на отрезки прямых, положение в пространстве которых определяется координатами точек их пересечения с гранями конечных элементов сетки основного материала [1]. Проскальзывание между арматурой и связующим материалом не рассматривается. Деформации и напряжения в стержне аппроксимиру-

ются в локальной системе координат, отслеживающей смещение его оси [16]. Перерезывающими силами, крутящим и изгибающими моментами в стержнях пренебрегаем. Напряжения в стержне заменяются статически эквивалентными силами узлов конечного элемента матрицы, которые проецируются в общую систему координат и суммируются с узловыми силами от напряжений в основном материале и внешней нагрузки. Результирующие узловые силы подставляются в дискретный аналог уравнения движения конечно-элементной сетки расчетной области, который интегрируется по явной конечно-разностной схеме типа «крест». Таким образом, выражая компоненты скорости перемещений и скорости деформаций в подкрепляющих стержнях через узловые скорости перемещений КЭ сетки основного материала можно учесть влияние армирующей системы, не вводя дополнительных степеней свободы в дискретную модель конструкции. Изложенная выше методика расчета дискретно армированных конструкций реализована в рамках вычислительной системы «Динамика-3» [17].

Рассмотрена задача динамического изгиба жестко закрепленной на торцах балки под действием давления, приложенного к верхней лицевой поверхности. Исследовались два варианта задачи: бетонная балка и железобетонная балка с продольным армированием стальными стержнями. Достоверность результатов расчета по предлагаемой методике, подтверждается результатами конечно-элементного расчета с выделением и дискретизацией арматуры (их расхождение не превышает 3%). Анализ результатов расчетов показал, что применение армирования снижает в рассматриваемой задаче уровень продольных растягивающих напряжений в бетоне в 1,5 раза. Предлагаемая методика позволила сократить время решения задачи, примерно, в 2 раза. Экономия достигнута в основном за счет увеличения шага интегрирования по времени уравнений динамики армирующих стержней.

Разработанная конечно-элементная методика исследования прочности армированных конструкций может быть применена для оценки сейсмостойкости сооружений [18; 19], усиленных железобетонным аппликациями [20–23].

### *Список литературы:*

1. Паймушин В.Н. Численное моделирование общего напряженно-деформированного состояния трехмерных тел с дискретными нерегулярными включениями в виде стержней / В.Н. Паймушин, А.А. Пискунов, А.И. Голованов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1998. – №58. – С. 3–10.



2. Ботенкова Л.Г. Исследование процессов деформирования и разрушения конструкций, подкрепленных системой армирующих элементов / Л.Г. Ботенкова, С.А. Капустин, Н.А. Гланева // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика. Вып. 2. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. – С. 57–61.
3. Поздеев А.А. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения / А.А. Поздеев, П.В. Трусов, Ю.И. Няшин. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
4. Belytschko T. Nonlinear finite elements for continua and structures / T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran. – New York: John Wiley & Sons, 2000. – 600 p.
5. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
6. Волков И.А. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями / И.А. Волков, Ю.Г. Коротких. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
7. Капустин С.А. Численный анализ поведения конструкций из кусочнооднородных материалов, имеющих блочно-периодическую структуру / С.А. Капустин, С.Ю. Лихачева // Проблемы прочности и пластичности. – 2000. – Вып. 62. – С. 93–100.
8. Качанов Л.М. Основы теории разрушения. – М.: Наука, 1974.
9. Bazhenov V.G. Finite element analysis of 3-d problems of deformation and failure of masonry under explosive loading / V.G. Bazhenov, A.I. Kibetz, L. Kruszka // International Journal of Protective Structures. – 2012. – Т. 3. – №4. – С. 449–456.
10. Баженов В.Г. Моделирование деформирования и разрушения конструкций из кусочно-однородных материалов с регулярной структурой при взрывном нагружении / В.Г. Баженов, А.В. Гордиенко, С.В. Зефирова [и др.] // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18. – №8. – С. 86–92.
11. Иванов В.А. Методика численного исследования динамической прочности кирпичной кладки с учетом фрагментации / В.А. Иванов, А.И. Кибец, Ю.И. Кибец // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – Т. 80. – №1. – С. 98–108.
12. Голованов А.И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А.И. Голованов, О.Н. Тюленева, А.Ф. Шигабутдинов. – М.: Физматлит, 2006. – 391 с.
13. Баженов В.Г. Математическое моделирование развития запроектной аварии внутри корпуса реактора на быстрых нейтронах / В.Г. Баженов, М.Н. Жестков, В.А. Замятин [и др.] // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – №3. – С. 5–14.
14. Баженов В.Г. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях / В.Г. Баженов, Е.Г. Гоник, А.И. Кибец [и др.] // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т.55. – №1. – С. 13–22.
15. Баженов В.Г. Особенности численного моделирования упругопластического выпучивания полусферических оболочек при нагружении жестким индентором / В.Г. Баженов, А.В. Демарева, М.Н. Жестков [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – №2. – С. 22–33.
16. Баженов В.Г. Расчет нестационарного упругопластического деформирования пространственных стержней / В.Г. Баженов, А.И. Кибец, Ю.И. Кибец // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1998. – №58. – С. 122–128.

17. Вычислительный комплекс «Динамика-3». Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС №325 от 18.04.2013.

18. Дюкина Н.С. Анализ сейсмических колебаний заглубленных сооружений с учетом трансверсально-изотропного основания / Н.С. Дюкина, А.И. Кибец, М.Н. Жестков // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – Т. 75. – №1. – С. 40–46.

19. Баженов В.Г. Разработка численной методики оценки сейсмостойкости заглубленных объектов атомной энергетики для предупреждения чрезвычайных ситуаций техногенного характера / В.Г. Баженов, Н.С. Дюкина, А.И. Кибец [и др.] // Материалы XIX Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС–2015) (23–31 мая 2015 г. Алушта, Крым). – М.: Изд-во МАИ, 2015. – С. 202–203.

20. Джабаров М. Исследование прочности поврежденной кирпичной кладки, усиленной армированными штукатурными слоями // Динамика и сейсмостойкость зданий и сооружений. – Душанбе: Дониш, 1980. – С. 168–174.

21. Вуцин Л.И. Конечно-элементная методика исследования деформирования и накопления повреждений в армокаменных конструкциях при динамических воздействиях / Л.И. Вуцин, А.В. Демарева, В.А. Иванов [и др.] // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии–2017. – №4–1 (324). – С. 15–22.

22. Демарева А.В. Вычислительная модель поведения армокаменных конструкций при сейсмических колебаниях с учетом контактного взаимодействия с многослойным грунтовым основанием / А.В. Демарева, В.А. Иванов, А.И. Кибец [и др.] // Материалы X Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела (18–22 сентября 2017 г., Самара, Россия): в 2-х т. Т. 1 / под ред. Н.Ф. Морозова, А.В. Манжирова, В.П. Радченко. – Самара: СамГТУ, 2017. – С. 198–200.

23. Плотников А.Н. Несущая способность каменной кладки, армированной сетками из базальтопластиковой арматуры / А.Н. Плотников, А.Б. Антаков, В.М. Поздеев // Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия. Сборник Междунар. научной конф., посв. 85-летию кафедры железобетонных и каменных конструкций и 100-летию со дня рождения Н.Н. Попова (Москва, 19–20 апреля 2016 г.). – М.: Изд-во Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т, 2016. – С. 15–21.

Иванов Виктор Анатольевич, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия, e-mail: 2605viktor@mail.ru

Вуцин Леонид Игоревич, аспирант, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия, e-mail: vucleonid@mail.ru

Скобеева Мария Владимировна, аспирант, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия, e-mail: Sarov\_727@inbox.ru

*Ivanov Viktor Anatolyevich – senior lecturer of the «Chuvash state University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: 2605viktor@mail.ru*

*Vucin Leonid Igorevich graduate student of the National Research Nizhny Novgorod State University. N.I. Lobachevsky, e-mail: vucleonid@mail.ru*

*Skobeeva Maria Vladimirovna graduate student of the National Research Nizhny Novgorod State University. N.I. Lobachevsky, e-mail: Sarov\_727@inbox.ru*

Для цитирования:

Иванов В.А. Численное моделирование динамики конструкций, подкрепленных системой армирующих стержней / В.А. Иванов, Л.И. Вучин, М.В. Скобеева // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 117–122.

Citation:

Ivanov V.A. Numerical modeling of the dynamics of structures, stretched by arm reinforcement systems / V.A. Ivanov, L.I. Vucin, M.V. Skobeeva// Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 117–122.

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ В КОМПОЗИТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

*Р.А. Каюмов*

*Д.Е. Страхов*

КГАСУ

г. Казань, Россия

*Аннотация:* в настоящее время значительно возросла потребность применения несущих элементов конструкций из полимерных композитных материалов, что обуславливает необходимость исследования механизмов развития повреждений, влияющих на несущую способность и долговечность элементов и их соединений.

**Ключевые слова:** композит, накопления повреждений, конструкции пултрузия, стеклопластик, термостойкость, прочность, долговечность.

### STUDY OF ACCUMULATION OF DAMAGE IN COMPOSITE ELEMENTS OF CONSTRUCTIONS

*Abstract:* at present, the need for the use of load-bearing structural elements made of polymer composite materials has increased significantly, which necessitates the study of mechanisms for the development of damage affecting the carrying capacity and durability of elements and their joints.

**Keywords:** composite, damage accumulation, structures, pultrusion, fiberglass, heat resistance, strength, durability.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-08-00349).*

Недостаток методик расчета таких элементов и соединений состоит в отсутствии точных опытных данных, а также многообразия составов модифицированных композитов, имеющих различные эксплуатационные свойства. Расчет полимерных композитных материалов на прочность и долговечность, описание их реологических свойств, оценка характеристик длительного разрушения на сегодняшнее время неоспоримо является актуальной задачей.

Технологичным и наиболее универсальным получением различных стеклопластиковых элементов несущих конструкций

является процесс пултрузии. Получаемые изделия имеют армирование стекловолокном в одном направлении, в котором происходит вытягивание массы. Данный материал получается ортотропным.

Полным комплексом воздействий на полимерный композитный материал в процессе эксплуатации является температура, водяная, щелочная либо кислая среда, влияние атмосферы различные биоповреждения, приводящие к климатическому и естественному старению.

Работоспособность материала характеризуется тремя качественными характеристиками – термостойкостью, прочностью и долговечностью, каждая из которых определяется набором физических констант, где изменение одного параметра работоспособности можно добиться изменением двух других. Таким образом, экспериментально определив величины физических констант можно прогнозировать долговечность материала. (Мамонтов С.А. Разработка методики прогнозирования долговечности древесных композитов с учетом их старения: дис. канд. техн. наук: 05.23.05 / С.А. Мамонтов. – Тамбов, 2016. – 179 с.).

В данной работе исследуется полимерный композитный материал, в виде плоских протяженных элементов, армированных стекловолокном. Выбраны среды для исследования: воздушная среда, дистиллированная вода и водные растворы щелочи. Первый водный раствор щелочи, моделирующий жидкую фазу бетона принят согласно (ГОСТ 31938-2012 Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Общие технические условия. – М.: Стандартинформ, 2014.), второй водный раствор щелочи удвоенной концентрации принят согласно методу испытания, описанного в (ГОСТ 31938-2012 Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Общие технические условия. – М.: Стандартинформ, 2014.).

Проведено деформирование исследуемых образцов в виде трехточечного (рис. 1), механическая деформирование принято 20, 30, и 60% от разрушающей деформации. Температура испытаний принята  $18 \pm 3$  градусов. Образцы выдерживались в выбранных средах (рис. 2) в течение 540 дней с проведением промежуточных замеров. Изготовленные образцы имели шарнирное закрепление концов элементов (рис.1), при проведении промежуточных измерений оснастку разбирали и после выполнения контрольных замеров вновь собирали. Замеры проводили катетометрами КМ-8.

Выявлены значительные дефекты полимерных матриц в растворе щелочи удвоенной концентрации в виде сквозных трещин шириной до 0.4 мм (рис. 3), срок испытания 540 дней. В растворе щелочи согласно выявлено разрушение полимерной матрицы в виде трещин шириной до 0.3мм, срок испытания 540 дней. После испытаний в течение 540 дней в водной и воздушной среде разрушения полимерной матрицы не выявлено.

В процессе испытания, в удвоенной концентрации щелочной среды, произошло разрушение образца, деформированного на 30% от разрушающей деформации



Рис. 1. Общий вид исследуемых образцов (величины прогибов 30 мм, 25 мм и 15 мм) и вид разрушения полимерной матрицы, щелочной состав по ГОСТх2, 530 дней

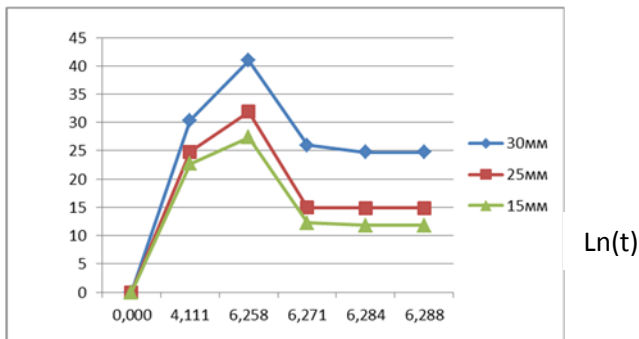


Рис. 2. Зависимости остаточных деформаций от времени, щелочной состав по ГОСТ

Таблица 1

Испытание	Величина прогиба $v_{\max}$ (см)	Нагрузка $F$ (кг)
ГОСТх2	3	14,45
	1,5	15,32
ГОСТ	3	16,36
	2,5	16,68
	1,5	17
Вода	3	56
	2,5	56,4
	1,5	58
Воздух	3	58
	2,5	60,1
	1,5	65

Максимальная деформация на поверхности образца вычисляется по соотношению

$$\varepsilon_{\max} = \frac{v_{\max} h}{4L^2} \quad (1)$$

Обозначим через  $R_0$  – начальный предел прочности, а через  $F_0$  – значение разрушающей нагрузки, полученное в эксперименте без выдержки. Тогда для каждого варианта агрессивной среды можно получить зависимость предела прочности от деформации через 540 дней из условия

$$\frac{R}{R_0} = \frac{F}{F_0} \quad (2)$$

В результате выражение для  $R$  может быть представлено в виде

$$R = R_0 (1 + \varepsilon \cdot k_1 + \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_1) \cdot k_2 + \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2) \cdot k_3) \quad (3)$$

Коэффициенты  $k_1, k_2, k_3$  можно получить из условия (2) при разных значениях  $F$ . Это дает систему уравнений, решение которой можно записать в виде

$$k_1 = \frac{F_1 - F_0}{F_0 \varepsilon_1}, \quad k_2 = \frac{F_2 - F_0(1 + \varepsilon_2 k_1)}{F_0 \varepsilon_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)},$$

$$k_3 = \frac{F_3 - F_0(1 + \varepsilon_3 k_1 + \varepsilon_3(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) k_2)}{F_0 \varepsilon_3 (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)} \quad (4)$$

Здесь  $F_1, F_2, F_3$  – значения разрушающей нагрузки, полученные в первом, втором и третьем экспериментах,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – соответствующие этим нагрузкам деформации, найденные по формуле (1). Вместо деформации  $\varepsilon$  можно приближенно подставлять напряжения, выразив их через  $\varepsilon$  по закону Гука.

Полученные соотношения (3), (4) позволяют прогнозировать долговечность элементов конструкций, изготовленных из стеклопластика.

Р.А. Каюмов – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Механика» КГАСУ, e-mail: kayumov@rambler.ru

*R.A. Kayumov – doctor of physical and mathematical sciences, professor, e-mail: kayumov@rambler.ru*

Для цитирования:

Каюмов Р.А. Исследование накопления повреждений в композитных элементах конструкций/ Р.А. Каюмов, Д.Е. Страхов // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 123–127.

Citation:

Kayumov R.A. Study of accumulation of damage in composite elements of constructions / R. A. Kayumov, D.E. Strakhov // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 123–127.



УДК 624.94.012.45

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ ПАНЕЛЬНЫХ ЗДАНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ НА ПРОГРЕССИРУЮЩЕЕ ОБРУШЕНИЕ

*А.Г. Николаева*

*Н.В. Иванова*

*И.С. Горбунова*

ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И.Н. Ульянова»

г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* в данной работе проведен анализ моделирования расчетных схем панельных зданий при расчете на прогрессирующее обрушение.

*Ключевые слова:* панель, метод конечных элементов, железобетон.

## SIMULATION OF CALCULATED SCHEMES OF PANEL BUILDINGS WHEN CALCULATING FOR PROGRESSIVE DECAY

*Annotation:* this article analyzes the modeling of the design schemes of panel buildings in the calculation of the progressive collapse.

*Keywords:* plate, finite element method, reinforced concrete.

Цель работы на данном этапе – анализ опыта создания расчетных схем крупнопанельных зданий при расчете на прогрессирующее обрушение;

Процесс формирования расчетной модели требует перехода от реальной конструкции к идеализированной расчетной схеме, которая отражает фактическую работу конструкций панельных зданий только с определенной долей приближения. Решение по выбору расчетных схем, формируемых в конечно-элементных программных комплексах, принимаются пользователями и являются индивидуальными. Проблема выбора адекватной расчетной схемы сооружения является одной из самых основных и сложных задач, возникающих при расчете панельных зданий.

Бескаркасные сборные здания составляют сегодня значительную часть в общем объеме жилищного строительства. В связи с возросшей этажностью этих зданий, развитием вычислительной техники и пакетов прикладных программ, созданных

на базе метода конечных элементов, инженеры опираются в своей работе на расчетные схемы здания в виде пространственных пластинчатых систем [1], элементы которых соединены между собой тем или иным способом. Однако если системой оболочных элементов можно достаточно точно описать работу отдельной стеновой панели или плиты перекрытия, то моделирование платформенного или иного стыка здания требует более сложных приемов [2].

Современные расчетные программные комплексы, используя аналитическую модель здания, позволяют точно формировать расчетную модель с ее физическими и геометрическими свойствами для различных расчетных ситуаций. Особенно это важно для прочностного анализа панельных зданий. Он сложнее, чем для монолитных, по причинам необходимости учета особенностей сопряжений панелей между собой и влияния жесткости сопряжений на общую устойчивость и надежность здания. [3; 4]

В настоящий момент существует несколько методик учета работы контактного (платформенного) стыка в расчетной схеме крупнопанельного здания:

1) модель эквивалентного столба, когда локальная податливость растворных швов и плиты перекрытия равномерно «размазывается» по высоте стеновой панели (этот способ упрощает построение КЭ-модели, но привносит в расчетную схему ряд неточностей, что показано в [1]);

2) модель дискретных связей конечной жесткости (описано, например, в [2] – данный подход уточняет поведение стыка в расчетной схеме здания, но существенно усложняет создание модели, поскольку ведет к значительному увеличению типов жесткостей дискретных связей – для каждого типа стыка и шага КЭ отдельная жесткость, что влечет за собой и большое количество вычислений «вручную», и усложняет контроль заданных исходных данных).

Среди существенных недостатков данных моделей – невозможность корректного учета нелинейного поведения стыка в первом случае, и крайняя сложность учета нелинейности во втором (фактически, учет нелинейных эффектов для уточнения жесткостей стыка сводится к серии последовательных расчетов с ручной корректировкой жесткостей на каждой итерации).

Согласно всем современным нормативным актам требуется лишь расчет по первой группе предельных состояний, определение максимальных перемещений и прогибов не требуется. Подбор наиболее опасного с точки зрения разрушения элемента

осуществляется путем анализа конструктивной схемы и результатов расчета для нескольких вариантов аварийной ситуации. В нормативной документации нет указаний, касающихся необходимости учета нелинейной работы конструкции, что может оказать сильное влияние на корректность результатов расчета, поскольку при прогрессирующем разрушении элементы конструкции зачастую имеют существенные по модулю перемещения, способные повлечь за собой значительные изменения в работе конструкций [5]. Учет нелинейности резко увеличивает трудоемкость расчетной схемы и сроки ее создания и расчета, поэтому он должен оправдываться ценностью получаемых результатов.

В последнее время существуют как минимум два расчетных комплекса ЛИРА-САПР и STARK ES, которые позволяют выполнять расчеты крупнопанельных зданий с получением более достоверных результатов. Что расширяет круг возможных для решения задач.

В данной работе при моделировании расчетной схемы панельного здания использовался программный комплекс ЛИРА-САПР (рис. 1). Для выполнения расчетов была создана пространственная конечно-элементная модель крупнопанельного здания, представляющая собой совокупность плоских оболочек, моделирующих его сборные несущие элементы, и связей, соединяющие эти сборные элементы. Для этого использовалась система «Панельные здания» [6], специальный инструмент для эффективного моделирования стыков крупнопанельных зданий. В препроцессоре САПФИР в местах сопряжения панелей задавались информационные объекты «стык панелей», которые обладают «интеллектом», позволяющим автоматически моделировать и назначать конфигурацию стыка. Вручную определялся способ его представления в расчетной схеме, задавался шаг размещения узлов разбивки на конечные элементы, тип опирания, тип конечных элементов, которыми представлен стык, назначались характеристики элементов. К тому же использовалась возможность моделирования новых типов стыков.

Соединительные элементы в виде точечной связи задавались конечным элементом КЭ-55 – локальной связью конечной жесткости. Платформенные стыки в виде двух рядов, а контактные стыки одним рядом специальных пластинчатых конечных элементов КЭ-58-59 для учета линейного поведения стыка и КЭ-258-259 для учета физически нелинейной работы.

Учет прогрессирующего обрушения требуется для всё большего числа зданий, но по-прежнему нет четкого алгоритма рас-

чета, конкретных рекомендаций по выбору зоны аварий. Аналогично, вопросы возникают по выбору необходимого количества разрушаемых несущих элементов. Все эти вопросы освещены в широком круге рекомендаций по проектированию. Данные рекомендации схожи в части алгоритма расчета строительных конструкций, существенные различия появляются лишь в части рекомендаций по мероприятиям конструктивного усиления каркаса [5].

В настоящее время в России нет четкой нормативной документации, строго регламентирующей необходимость и состав расчета.

А значит, можно утверждать, что, для достижения точных результатов, алгоритм расчета и программные средства будут постоянно совершенствоваться. Актуальность изучения прогрессирующего обрушения подтверждает и широкое внимание современных ученых к вопросам обеспечения прочности и живучести строительных конструкций в условиях запредельных воздействий, работой инженерных конструкций в упруго-пластической стадии.

Многие авторы занимались изучением российской и зарубежной законодательной базы. Обзоры можно найти у В.Ю. Грачева, Т.А. Вершининой, А.А. Пузаткина, Ж.С. Джумагуловой и А.К. Стамалиева, А.В. Перельмутера, В.О. Алмазова [5]. Ученые утверждают, что требуется дальнейшая работа над нормативной базой: ее уточнение и расширение.

Компьютерный расчет модели на лавинообразное разрушение осложнен невозможностью использования метода конечных элементов ввиду отсутствия точных данных о поведении конструкции при прогрессирующем обрушении и недостаточного опыта построения структурных комплексных моделей и интерпретации результатов вычислений. Необходимы разработки по развитию усовершенствованной методики оценки уязвимости конструктивных систем и их совершенствования для смягчения прогрессирующего обрушения при различных вариантах опасности. Инженеры нуждаются в методах проектирования и расчетов, способных предотвратить потенциальную опасность прогрессирующего обрушения зданий. Разработка таких методов активно ведется многими учеными [7; 8].

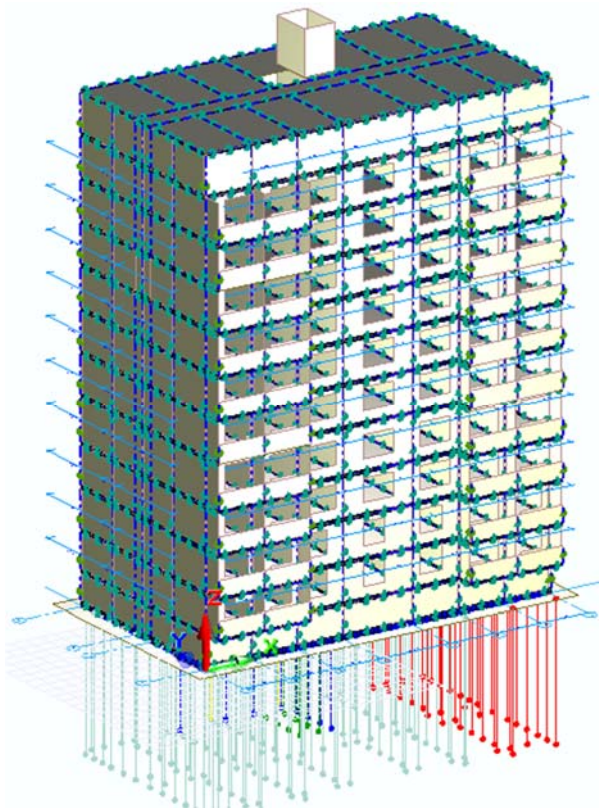


Рис. 1. Аналитическая схема здания

При аварийных ситуациях материалы работают вне стадии упругих деформаций, необходим и учет значительных перемещений, возникающих в несущих конструкциях. Значительные по модулю деформации способны повлечь за собой перераспределение нагрузок, а значит, изменение всей расчетной схемы. Таким образом, при расчете на прогрессирующее обрушение требуется учет геометрической и физической нелинейностей работы несущего каркаса здания. В этой сфере ведется работа [7; 8].

Одним из эффективных алгоритмов расчетного анализа крупнопанельного здания может стать расчет с использованием трехуровневых расчетных схем [9; 10]. Результатами расчета на первом уровне являются усилия и перемещения от заданных

нагрузок. Использование расчетной схемы второго уровня позволяет выполнить расчетный анализ напряженно-деформированного состояния вырезанного характерного фрагмента здания в зоне выключаемого элемента. Результатом расчетного анализа расчетных схем третьего уровня являются схемы и характер разрушения несущих элементов каркаса здания в запроектных состояниях.

Постоянное совершенствование компьютерной техники позволяет строить все более детализированные модели сооружений и способствует все более широкому распространению решения задач в нелинейной постановке. Оценка корректности расчетных моделей, проверка результатов компьютерных расчетов, искусство интерпретации полученных результатов — одна из центральных проблем не только расчетов на прогрессирующее обрушение, но и всего строительства в целом. В работе над этими проблемами принимают участие и проектные и научно-исследовательские институты и разработчики современных расчетных программ, что способствует постоянно совершенствованию программных комплексов [3; 6]. Анализ возможностей метода конечных элементов, примеры расчета моделей зданий и новые вычислительные алгоритмы тоже находят отражение в работах российских и зарубежных ученых.

### *Список литературы:*

1. Рекомендации по предотвращению прогрессирующих обрушений крупнопанельных зданий. – М., 1999.
2. Шапиро Г.И. К вопросу о построении расчетной модели панельного здания / Г.И. Шапиро, Р.В. Юрьев // Промышленное и гражданское строительство. – 2004. – №12.
3. Водопоьянов Р.Ю. Моделирование и расчет крупнопанельных зданий в ПК ЛИРА-САПР 2017 // Жилищное строительство. – 2017. – №3. – С. 42–48.
4. Жук Ю.Н. Особенности проектирования крупнопанельных зданий с применением программных платформ для информационного моделирования (BIM) и программных комплексов расчета конструкций / Ю.Н. Жук, В.В. Курнавин, Ю.В. Панасенко // Жилищное строительство. – 2017. – №5. – С. 20–25.
5. Горбунова И.С. Исследование причин возникновения прогрессирующего обрушения крупнопанельных зданий / И.С. Горбунова, А.Г. Николаева // Студенческая наука: современные реалии: материалы VI Междунар. студ. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 11 дек. 2018 г.) / редкол.: О.Н. Широков [и др.] – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2018. – С. 46–48.
6. Губченко В.Е. Работа с инструментом «Стык» ПК ЛИРА-САПР // Жилищное строительство. – 2018. – №3. – С. 30–35.
7. Шапиро Г.И. Численное решение задачи устойчивости панельного здания против прогрессирующего обрушения / Г.И. Шапиро, А.А. Гасанов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2016. – Vol. 12. – Is. 2.

8. Зенин С.А. Расчеты крупнопанельных зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения методами предельного равновесия и конечного элемента / С.А. Зенин, Р.Ш. Шарипов, О.В. Кудинов [и др.] // Academia. Архитектура и строительство. – 2016. – №4. – С. 109–113.

9. Колчунов В.И. Вопросы Расчетного анализа и защиты крупнопанельных зданий от прогрессирующего обрушения / В.И. Колчунов, С.Г. Емельянов // Жилищное строительство. – 2016. – №10. – С. 17–20.

10. Плотников А.Н. Несущая способность наружных стеновых панелей из конструкционного керамзитобетона со стальной и композитной арматурой / А.Н. Плотников, Н.А. Гафиятулин, П.А. Васильев // Жилищное строительство. – 2017. – №3. – С. 52–57.

Николаева Анастасия Георгиевна – ст. преподаватель ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия, e-mail: nag\_sf@mail.ru

Иванова Наталья Васильевна – ст. преподаватель ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия, e-mail: sus-a@mail.ru

Горбунова Ирина Сергеевна – магистрант ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия. e-mail: irino4kmoon@mail.ru

*Nikolaeva Anastasia Georgievna – senior lecturer of the «Chuvash state University named I. N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: nag\_sf@mail.ru*

*Ivanova Natalia Vasilevna – senior lecturer of the «Chuvash state University named I. N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: sus-a@mail.ru*

*Gorbunova Irina Sergeevna – master student of the «Chuvash state University named I. N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: irino4kmoon@mail.ru*

Для цитирования:

Николаева А.Г. Моделирование расчетных схем панельных зданий при расчете на прогрессирующее обрушение / А.Г. Николаева, Н.В. Иванова, И.С. Горбунова // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 128–134.

Citation:

Nikolaeva A.G. Simulation of calculated schemes of panel buildings when calculating for progressive decay / A.G. Nikolaeva, N.V. Ivanova, I. S. Gorbunova // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 128–134.

УДК 624.94.012.45

## АНАЛИЗ НЕСУЩИХ СИСТЕМ ЗДАНИЙ С КРУПНОГАБАРИТНЫМИ КВАРТИРАМИ

*А.Н. Плотников*

*А.Г. Николаева*

*Н.В. Иванова*

*Д.В. Андрианов*

ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И.Н. Ульянова»

г. Чебоксары, Чувашская Республика

*Аннотация:* в данной работе уделено внимание расчёту трёх разновидностей каркаса жилого здания для устройства двухуровневых квартир с возможностью свободной планировки. Расчёт произведен с помощью систем автоматизированного проектирования, опирающихся на метод конечных элементов, для получения достоверных данных и точной информации о проектируемом объекте. В данном случае обычного линейного расчета для анализа работы элементов каркасов недостаточно, поэтому требуется учитывать нелинейную зависимость напряженно-деформированного состояния

*Ключевые слова:* крупногабаритная квартира, колонны, пилоны, несущая система

## ANALYSIS OF CARRYING SYSTEMS OF BUILDINGS WITH LARGE-SIZED APARTMENTS

*Annotation:* this article focuses on the calculation of the three types of the frame of a residential building for the construction of two-level apartments with the possibility of free planning. The calculation was performed using computer-aided design systems based on the finite element method to obtain reliable data and accurate information about the designed object. In this case, the usual linear calculation for the analysis of the work of the elements of the frames is not enough, therefore, it is necessary to take into account the nonlinear dependence of the stress-strain state

*Keywords:* large apartment, columns, pylons, building support system.

Актуальность данной работы заключается в составлении рекомендаций по расчету и более экономичному и безопасному проектированию каркасов жилых зданий с крупногабаритными



квартирами, выполненных из монолитного железобетона [1; 2]. Рассмотрение различных вариантов планировок квартир при применении того или иного варианта каркаса для жилого здания.

За основу разработки модели каркаса был взят существующий двухсекционный жилой дом с улучшенной планировкой квартир, доработан и видоизменен в соответствии с тематикой (рис. 1–2)

В ходе работы было построено три расчетные модели в монолитном каркасе с кирпичными ограждающими конструкциями и перегородками: первая – с применением монолитных колонн с сечением 500 x 500 мм, вторая – с применением монолитных пилонов с сечением 1200 x 300 мм, третья – с применением порталов с проемами 5500 мм, 5100 мм, 2900 мм. Толщина монолитного железобетонного перекрытия во всех вариантах 300 мм.

Архитектурные модели для расчета были выполнены в среде Autodesk Revit 2019, далее модели были импортированы в программу САПФИР, расчет всех моделей производился в среде ЛИРА-САПР.



Рис. 1. Общий вид существующего здания



Рис. 2. Планировка этажа двухуровневых квартир существующего здания

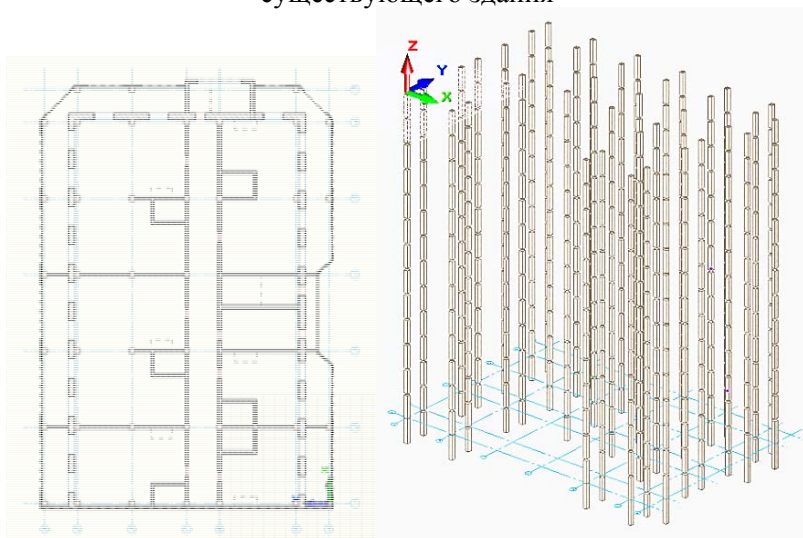


Рис. 3. Вариант с колоннами

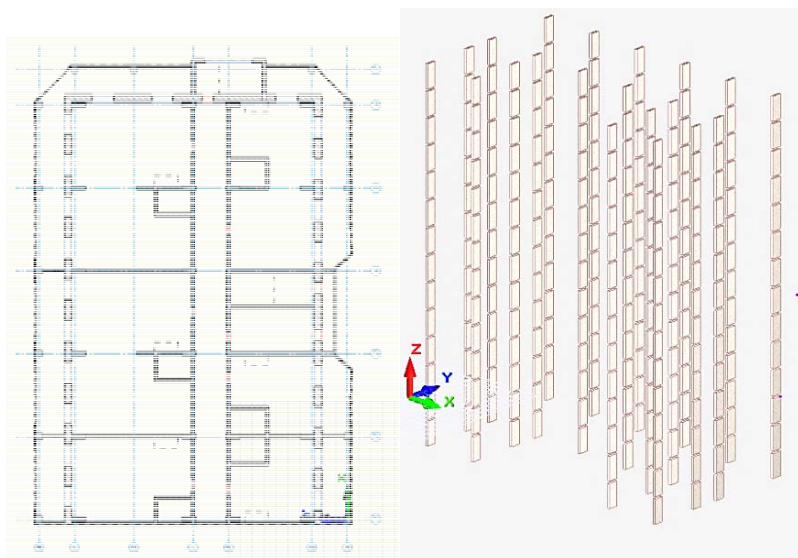


Рис. 4. Вариант с пилонами

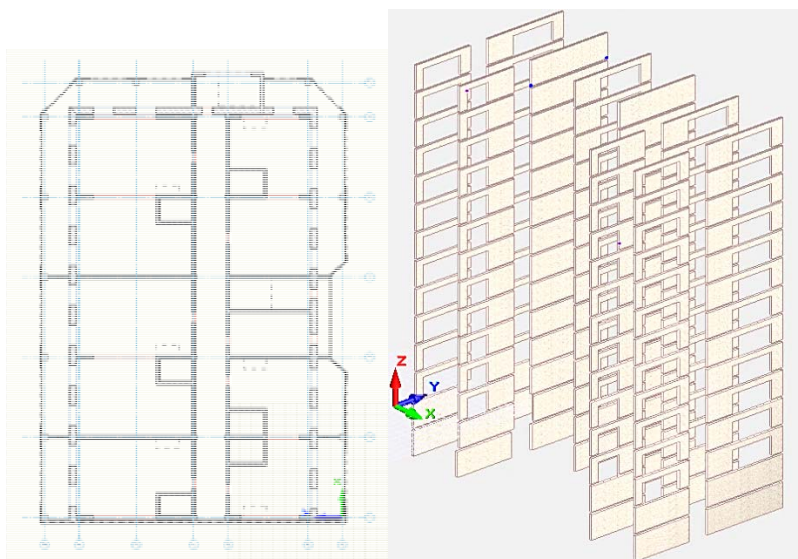


Рис. 5. Вариант с порталами

Анализ результатов первоначального расчета общих перемещений по трем осям от нелинейного нагружения показал следующее:

– по оси  $Z$  для варианта с колоннами максимальное значение 22,1 мм, для варианта с пилонами 25,5 мм, для варианта с порталами 11,8 мм;

– по оси  $Y$  для варианта с колоннами максимальное значение 7,55 мм, для варианта с пилонами 14 мм, для варианта с порталами 4,98 мм;

– по оси  $X$  для варианта с колоннами максимальное значение 10,7 мм, для варианта с пилонами 11,3 мм, для варианта с порталами 6,85 мм.

В данном случае применение порталов в каркасе расчетной модели жилого здания более приемлемо в связи с меньшими величинами общих перемещений [3].

Анализ результатов напряжений  $N$  и  $N_y$  (что обусловлено различиями между заданием колонн (в виде стержней) и пилонов с порталами (в виде пластин) в среде ЛИРА-САПР) от нелинейного нагружения показал следующее:

– вариант с колоннами имеет максимальное значение усилия в 6590 кН;

– вариант с пилонами имеет максимальное значение усилия в 9250 кН;

– вариант с порталами имеет максимальное значение усилия в 4740 кН в аналогичном сечении.

В данном случае применение порталов в каркасе расчетной модели жилого здания более приемлемо в связи с наименьшей максимальной величиной продольных усилий.

Анализ результатов напряжений  $Q_z$  и  $Q_y$  (что обусловлено различиями между заданием колонн (в виде стержней) и пилонов с порталами (в виде пластин) в среде ЛИРА-САПР) от нелинейного нагружения показал следующее:

– вариант с колоннами имеет максимальное значение усилия в 325 кН;

– вариант с пилонами имеет максимальное значение усилия в пересчете на пластину в 43,5 кН;

– вариант с порталами имеет максимальное значение усилия в пересчете на пластину в 39 кН.

В данном случае применение порталов в каркасе расчетной модели жилого здания более приемлемо в связи с наименьшей максимальной величиной поперечных усилий.

Анализ результатов моментов  $M_x$  от нелинейного нагружения показал следующее:

- вариант с колоннами имеет максимальное значение момента в  $3,82 \text{ кН*м}$ ;
- вариант с пилонами имеет максимальное значение момента  $35,76 \text{ кН*м}$ ;
- вариант с порталами имеет максимальное значение момента  $49,68 \text{ кН*м}$ .

В данном случае применение пилонов в каркасе расчетной модели жилого здания более приемлемо в связи с наименьшей максимальной величиной момента

Анализ результатов моментов  $M_y$  от нелинейного нагружения показал следующее:

- вариант с колоннами имеет максимальное значение момента в  $225 \text{ кН*м}$ ;
- вариант с пилонами имеет максимальное значение момента  $59,4 \text{ кН*м}$ ;
- вариант с порталами имеет максимальное значение момента  $22,68 \text{ кН}$ .

В данном случае снова применение порталов в каркасе расчетной модели жилого здания более приемлемо в связи с наименьшей максимальной величиной момента [4].

Далее рассмотрена одна и та же плита перекрытия для трех вариантов построения каркаса (монолитное перекрытие 1 уровня 2 этажа)

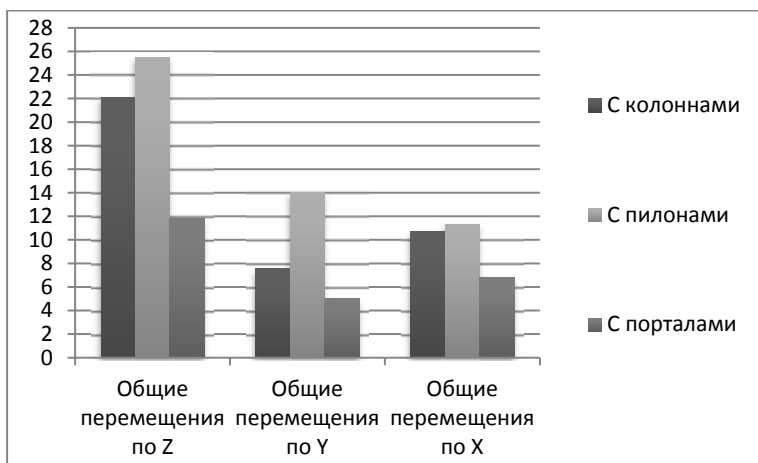


Рис. 6. Диапазон изменения величин общих перемещений

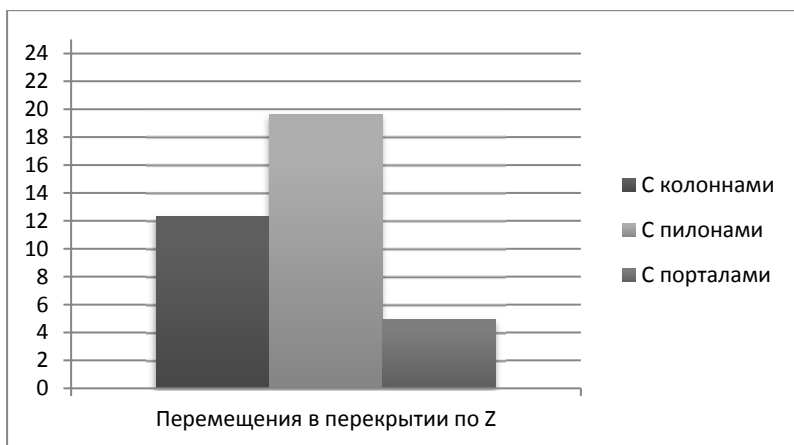


Рис. 7. Диапазон изменения величин перемещений в перекрытии

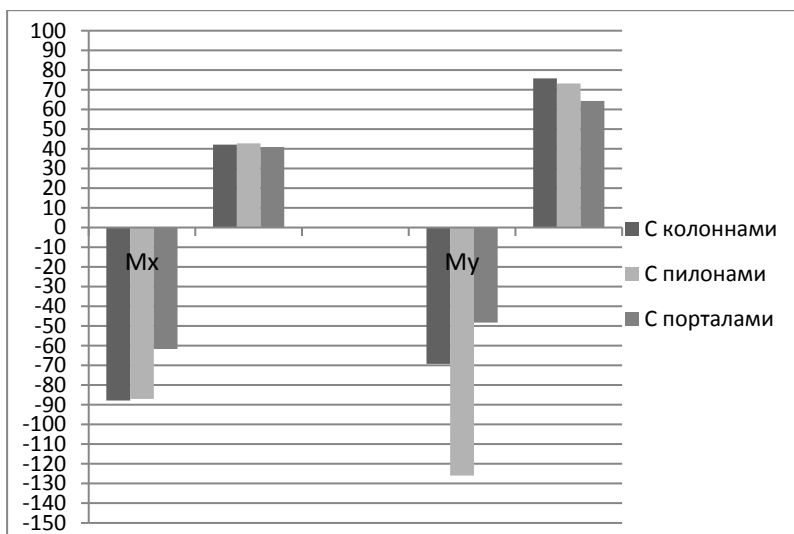


Рис. 8. Диапазон изменения величин моментов в перекрытии

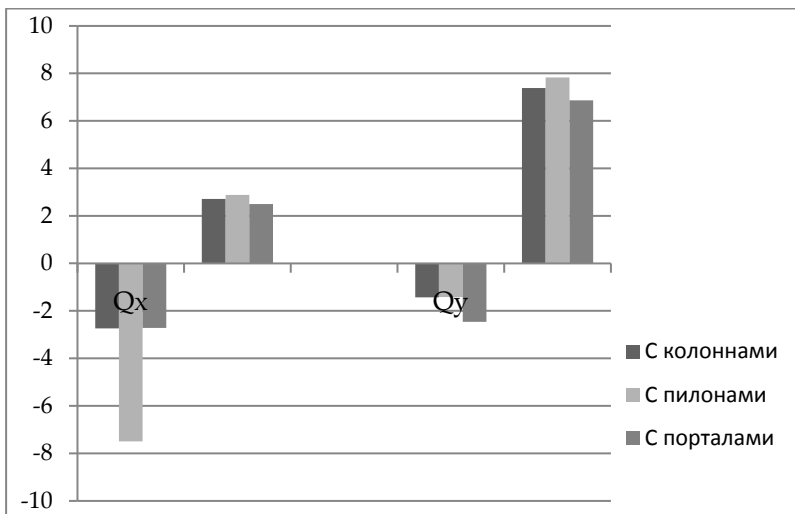


Рис. 9. Диапазон изменения величин усилий в перекрытии

В результате составления трех расчетных моделей каркаса одного жилого здания был проведен нелинейный расчет всех моделей. Сопоставительный анализ результатов расчета, полученных для перекрытия первого уровня второго этажа моделей здания показал, что каркас с применением монолитных железобетонных порталов в большинстве признаков более приемлем, так как общие перемещения значительно меньше, перемещения в перекрытии меньше, усилия в основном также имеют меньший диапазон изменения [3]. Замена колонн и пилонов на порталы помогает добиться снижения уровня деформаций в перекрытии, но значительно увеличивает расход материалов, используемых для несущих конструкций.

**Список литературы:**

1. Иванова Н.В. Влияние процента армирования на напряженно-деформированное состояние вертикальных элементов рамных каркасов / Н.В. Иванова, А.Г. Николаева // Актуальные направления научных исследований: перспективы развития: материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 10 дек. 2017 г.) / редкол.: О. Н. Широков [и др.]. – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2017. – С. 269–272.
2. Иванова Н.В. Влияние процента армирования колонн на НДС элементов рамных каркасов многоэтажных зданий при расчете с учетом возведения / Н.В. Иванова, А.Г. Николаева // Современные вопросы механики сплошных сред–2017: сборник статей по материалам конференции (круглого стола) с международным участием. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2017. – С. 38–42.

3. Плотников А.Н. Влияние несущей системы на НДС перекрытий зданий с крупногабаритными квартирами / А.Г. Николаева, Д.В. Андрианов // Сборник тезисов 53 студенческой конференции. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2019.

4. Плотников А.Н. Выбор эффективной несущей системы для здания с улучшенной планировкой/ А.Г. Николаева, Д.В. Андрианов // Человек. Гражданин. Учёный. Сб. тр. Регион. фестив. науки студен. и молодежи. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2019.

Плотников Алексей Николаевич, канд. техн. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», e-mail: plotnikovan2010@ya.ru

Николаева Анастасия Георгиевна – ст. преподаватель ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия, e-mail: nag\_sf@mail.ru

Иванова Наталья Васильевна – ст. преподаватель ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия, e-mail: sus-a@mail.ru

Андрианов Дмитрий Владимирович – магистрант ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия. e-mail: ccreek@bk.ru

*Alexei Plotnikov, Ph.D., Cand.Sc., Chuvash State University, e-mail: plotnikovan2010@ya.ru*

*Nikolaeva Anastasia Georgievna – Chuvash state University named I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia, e-mail: nag\_sf@mail.ru*

*Ivanova Natalia Vasilevna – senior lecturer of the «Chuvash state University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: sus-a@mail.ru*

*Andrianov Dmitry Vladimirovich – master student of the «Chuvash state University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: ccreek@bk.ru*

Для цитирования:

Плотников А.Н. Анализ несущих систем зданий с крупногабаритными квартирами / А.Н. Плотников, А.Г. Николаева, Н.В. Иванова [и др.] // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 135–143.

Citation:

Plotnikov A.N. Analysis of carrying systems of buildings with large-sized apartments / A.N. Plotnikov, A.G. Nikolaeva, N.V. Ivanova [et al.] // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 135–143.



УДК 624.15

## РАСЧЕТ ОСАДОК ОСНОВАНИЙ БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ ФУНДАМЕНТОВ

*Соколов Н.С.*

ООО НПФ «ФОРСТ»

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова»

г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* большой опыт эксплуатации и результаты длительных наблюдений за осадками большеразмерных фундаментов при повышенных на них нагрузках показывают, что фактические осадки оказались значительно больше расчетных величин, определенных по формуле расчета осадки, основанной на модели линейно-деформируемого слоя конечной толщины. Материал фактических осадок построенных объектов показывает, что кривые осадок состоят из линейного и нелинейного участков. Линейный участок имеет место для среднесжимаемых грунтов в первой половине среднего давления  $P_{lmt}$ . При  $P_{lmt}$  больше 250÷300 кПа начинается возрастание скорости осадки в процессе роста нагрузки до полной ее расчетной величины. Затем скорость осадки переходит в стадию стабилизации. Возрастание скоростей осадок на нелинейном участке следует объяснить возрастанием роли горизонтальных перемещений в общей деформации основания.

*Ключевые слова:* неравномерность деформаций, горизонтальные перемещения, скорость осадок, линейно-деформируемый слой конечной толщины.

## CALCULATION OF SEDIMENTS OF FOUNDATIONS OF BIG-SIZED BASES

*Annotation:* the large operational experience and the results of long-term observations of the sediments of large-sized foundations, with increased loads, show that the actual precipitation is much larger than the calculated values determined by the calculation formula for the sediment based on the model of a linearly - deformed layer of finite thickness. The material of the actual sediment of the constructed objects shows that the sediment curves consist of linear and nonlinear sections. The linear section takes place for medium-compressible soils in the first half of the mean pressure  $P_{lmt}$ . With

*$P_{lim}$  greater than 250 ÷ 300 kPa, the precipitation velocity begins to increase as the load increases to its full calculated value. Then the precipitation velocity passes to the stabilization stage. The increase in speed of sediments in a nonlinear region should be explained by the increase in the role of horizontal displacements in the general deformation of the base.*

**Key words:** non-uniformity of deformations, horizontal displacements, sediment velocity, linearly - deformed layer of finite thickness.

Наблюдения за осадками большегабаритных фундаментов при повышенных нагрузках показывают, что деформации грунтов, залегающих в их основаниях, имеют две стадии осадок во времени с ростом нагрузки на основание. Первая стадия осадки основания относится к уплотнению грунтов при нагрузке до  $P_{lim} = 250 \div 300$  кПа, когда кривая осадки прямо пропорциональна росту среднего давления  $P_{lim}$  на основание. Вторая стадия деформации основания происходит за счет горизонтальных перемещений грунтов основания, при этом нагрузка на основание превышает  $P_{lim} = 250 \div 300$  кПа. На этой стадии осадка фундаментной плиты резко возрастает. Об этом свидетельствуют также исследования в стендовых условиях с моделями фундаментов, проведенных М.Н. Окуловой и М.Н. Балюрой [3–9], а также в полигонных и натуральных условиях, проведенных Л.А. Шелест [10; 11]. Наиболее ценные исследования в натуральных условиях проведены в основаниях для случаев резервуаров и насыпей резервуаров и насыпей.

Так, например, Роберт Дар [12] провел натурные исследования в основаниях трех резервуаров диаметром  $D = 38,0$  м и высотой  $h = 14,6$  м с целью выявления роли горизонтальных перемещений в общей осадке этих сооружений. В основаниях этих резервуаров залегают плотные пески толщиной 4,8 м, супеси и суглинки мощностью около 6 м. Ниже подстилаются и плотные глины. Нагрузки на основание прикладывались ступенями и измерялись осадки по периметру и горизонтальные перемещения грунтов на различной глубине по вертикали, проходящей в непосредственной близости от резервуара. Усилия на основание создавались при помощи нагрузки от веса столба воды.

Анализируя результаты исследований Р. Дар [12] пришел к выводу о том, что при увеличении нагрузки на основание резервуара наблюдается значительный рост горизонтальных перемещений грунтов. Максимальные величины зафиксированы на

глубине  $z = 5$  м от поверхности и составили на конец испытаний  $S = 19,5$  см (рис. 1) при максимальной величине осадки  $S = 27,5$  см.

Отмеченное выше явление наблюдается и в экспериментах Белони [13], который также исследовал деформации основания резервуара диаметром  $\varnothing 13$  м и высотой  $h = 14,7$  м. Как и в натуральных экспериментах, проведенных Р. Даром [12], максимальные горизонтальные перемещения при тех же значениях давлений составили  $y = 19,2$  см при максимальной осадке резервуара  $S = 73,8$  см. Правда, при опорожнении этого резервуара горизонтальные перемещения грунтов в основании продолжали увеличиваться и достигли в конечном счете величины  $y_{max} = 25$  см (рис. 2).

Исследованиями П.А. Коновалова и Р.А. Усманова [14] выявлено значительное влияние горизонтальных перемещений грунтов оснований на величину общей осадки моделей и натуральных резервуаров. Величины пределов пропорциональности определенных по графикам «осадки – нагрузка» указывают, что криволинейность графика  $S = f(P)$  обуславливается все более возрастающими величинами горизонтальных перемещений грунтов оснований.

На тесную связь горизонтальных перемещений грунтов с вертикальными осадками указывают графики их взаимной зависимости. Линейная зависимость между ними наблюдается лишь на первых ступенях нагрузки, после чего горизонтальные перемещения начинают резко возрастать. На последних ступенях нагрузки приращение осадки определяется в значительной степени приращениями горизонтальных перемещений. Об этом убедительно свидетельствуют результаты наблюдений за осадками насыпей Cubzak-les-Ponts [15], Каликса [16], Кинг Лина и Тиктона [17], которые приведены на рис. 3.

Нами получены результаты аналогичные с результатами исследований Р. Дара [12], Белони [13], П.А. Коновалова и Р.А. Усманова [15] и др. Наблюдения за горизонтальными перемещениями в основании одного из объектов показали, что ордината максимального горизонтального перемещения  $y_{max} \approx 4$  см (рис. 4) находится примерно на глубине  $Z \approx 0,2b$ . При этом средняя осадка составляет около  $S = 8$  см. Среднее давление на момент исследований составило  $P_{lmt} = 300$  кПа.

Весь процесс деформации основания происходит за счет преимущественного сжатия верхних слоев основания. Об этом наглядно свидетельствуют результаты наблюдений за послойными деформациями оснований рассмотренных объектов [1, 2],

так и большеразмерных фундаментов, и других сооружений. Следовательно, основания фундаментов [1, 2] работают по схеме линейно-деформируемого слоя конечной толщины. Поэтому согласно СП 22.13330.2011 для расчета средней осадки фундамента толщину сжимаемого слоя рекомендуется определять по формуле:

$$H=(H_0+tb)K_p, \quad (1)$$

где  $H_0$  и  $t$  – параметры, разные для глинистых и песчаных грунтов соответственно  $H_0 = 9$  м,  $t = 0,15$  и  $H_0 = 6$  м и  $t = 0,1$ ;  $b$  – ширина фундамента.

В случае разнородных грунтов в пределах сжимаемой толщи основания следует принимать средние значения  $H_0$  и  $t$ . Значение множителя  $K_p$  принимается в зависимости от среднего давления  $P_{lmi}$  на основание.

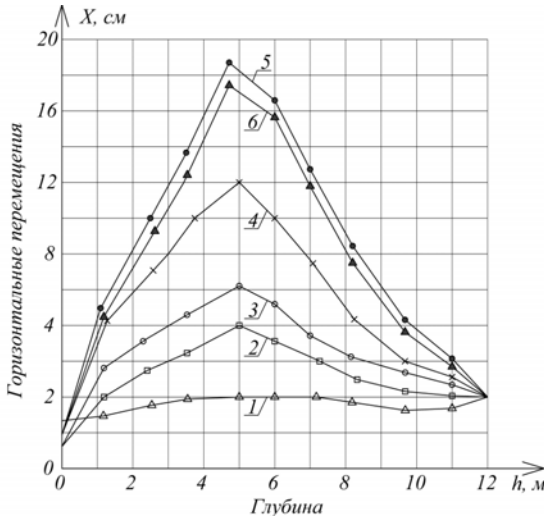


Рис. 1. Графики развития горизонтальных перемещений по глубине в основании резервуара диаметра  $\varnothing = 38,0$  м и высотой  $h = 14,6$  м при различных средних давлениях:

- 1 –  $P_{lmi} = 73$  кПа; 2 –  $P_{lmi} = 98$  кПа; 3 –  $P_{lmi} = 110$  кПа;  
 4 –  $P_{lmi} = 122$  кПа; 5 –  $P_{lmi} = 140$  кПа; 6 – разгрузка

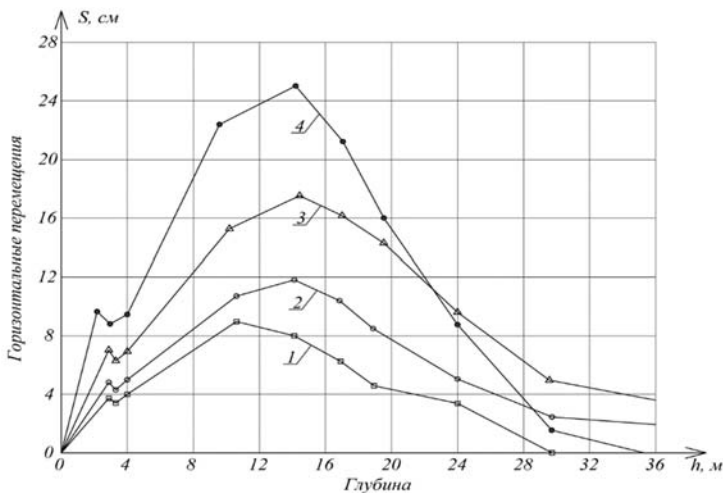


Рис. 2. Графики развития горизонтальных перемещений при различных средних давлениях  $P_{IIml}$  на основание резервуара диаметром  $\varnothing = 67,0$  м и высотой  $h = 14,7$  м: 1 –  $P_{IIml} = 75$  кПа; 2 –  $P_{IIml} = 83$  кПа; 3 –  $P_{IIml} = 140$  кПа; 4 – разгрузка

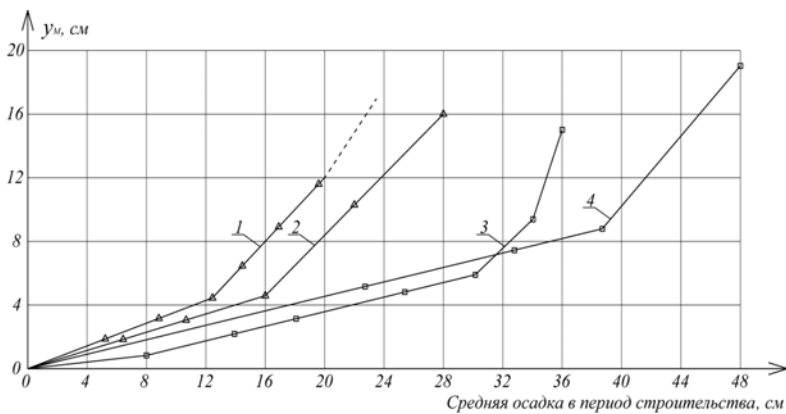


Рис. 3. Графики зависимости максимальных горизонтальных перемещений – «средняя осадка» для насыпей: 1 – Subzak-les-Ponts [15]; 2 – Каликса [16]; 3, 4 – Кинг Лина и Тиктона [17]

Для фундаментов рассмотренных объектов №1÷5 [1, 2] значение коэффициента  $K_p = 1,5$ , который определен эмпирически

на основе результатов натуральных исследований осадок и сжимаемости оснований большеразмерных фундаментов.

Приведем пример определения  $K_p$ .

Результаты наблюдений осадок фундаментов объектов №1 и 2 [1; 2] позволяют заключить следующее. В основаниях этих объектов залегают пески толщиной 20 метров которые подстилаются глинами. Результаты этих наблюдений двух объектов показывают, что после окончания приложения нагрузок на основания скорости осадок резко уменьшаются. Резкое затухание деформации основания свидетельствует о том, что осадки фундаментов в основном происходят за счет сжатия толщи песков. Решая уравнение (1) определяем  $K_p \approx 1,5$ .

Подставляя  $K_p = 1,5$  в формулу (1) определим толщину сжимаемого слоя  $H = 21$  м для оснований фундаментов этих объектов. Результаты послойных перемещений свидетельствуют об удовлетворительной сходимости расчетной и фактической величин толщины сжимаемого слоя.

Существующие методы расчета осадок включают в себя горизонтальные перемещения только в рамках теории упругости, где их роль невелика в общей осадке. Результаты наблюдений за горизонтальными перемещениями (опыты М.В. Балюры и М.Н. Окуловой [4–6] наглядно показывают, что они превосходят теоретические значения в 1,5–2 раза (рис. 5). Из анализа результатов, приведенных на рис. 2, произведена оценка влияния горизонтального расширения грунта на общую осадку штампа. Для исследованных грунтов доля горизонтальных перемещений в общей осадке штампа составляет от 45 до 60%.

Исходя из вышесказанного заключаем, что учет горизонтальных перемещений за пределами теории упругости позволит приблизить расчетные осадки к фактическим.

Формула расчета осадок большеразмерных фундаментов имеет вид

$$S = \left[ Pb \sum_{i=1}^n \frac{K_i - K_{i-1}}{E_i} \right] M, \quad (2)$$

где  $M$  – коэффициент, учитывающий концентрацию деформаций в пределах сжимаемой толщи (для определения деформации упругого полупространства следует принять  $M = 1$ ).

При больших нагрузках на грунты возникает уплотненная зона в центральной части основания. В результате появляется возможность значительных горизонтальных перемещений грун-

тов и увеличения осадок фундаментов. На этот процесс оказывает влияние пластическая деформация грунтов за пределами фундаментов (рис. 4).

Для того, чтобы учесть в практических расчетах увеличение осадки за счет горизонтальных перемещений, рекомендуется ввести коэффициент  $A$ , равный для глинистых и песчаных грунтов соответственно 1,3 и 1,2. Для смешанных грунтов  $A$  равен 1,25. Аналогичное предложение имеется у проф. А.К. Бугрова [18] для упругопластической модели основания.

Итак, формула расчета осадок большегабаритных фундаментов при повышенных нагрузках представится в виде

$$S_{\kappa} = AS = A \left[ Pb \sum_{i=1}^n \frac{K_i - K_{i-1}}{E_i} \right] M, \quad (3)$$

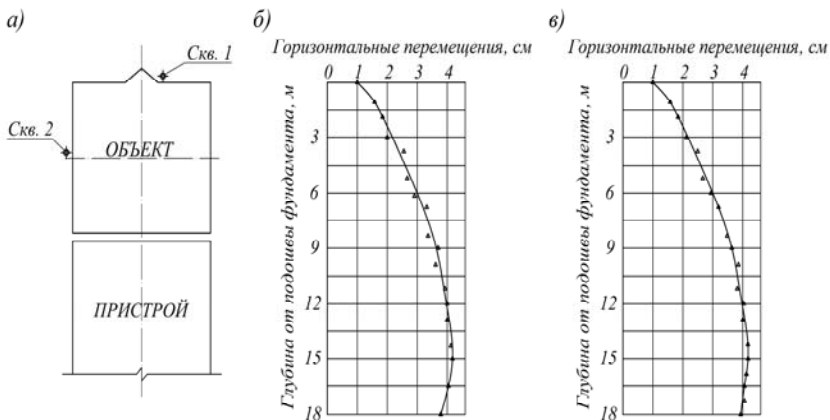


Рис. 4а. Схема расположения инклинометрических скважин №1, 2, б и в – эпюры горизонтальных перемещений по глубине

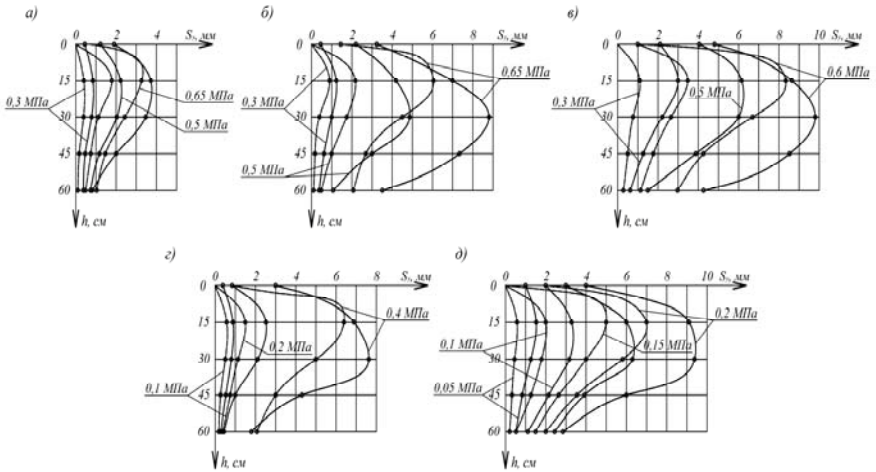


Рис. 5. Экспериментальные и теоретические эпюры горизонтальных перемещений при различных средних давлениях на штамп  $P_{Плт}$  для суглинков различной влажности: а –  $w = 0.144$  д.е.; б –  $w = 0.172$  д.е.; в –  $w = 0.198$  д.е.; г –  $w = 0.212$  д.е.; д –  $w = 0.229$  д.е. Пунктирно – по К.Е. Егорову; Сплошные – по экспериментам [4–6]

В таблице 1 приведены результаты сопоставлений фактических осадок с расчетными по предлагаемой формуле (3) и по формуле (2). Анализируя табл. 1 следует заключить, что формула (2) дает заниженные значения осадок примерно в 1,5 раза по сравнению с фактическими. Осадки же по предлагаемой формуле наиболее полно согласовываются с фактическими осадками. Расхождение составляет порядка 5–10%.

На рис. 5 приведены графики сопоставления фактических и расчетных осадок фундаментов различными методами. Опять же расчетные осадки по предлагаемому методу наиболее полно согласовываются с фактическими. В то же время расчеты по формуле (3) наиболее близко совпадают с расчетами по методу упругопластической модели [18].



Таблица 1

## Характеристики фундаментов, их фактические и расчетные осадки

Наименование объекта наблюдений	Размеры фундамента, м	Среднее давление под подошвой фундамента, кПа	Средняя фактическая осадка, см	Средняя расчетная осадка по формуле 2, см	Средняя расчетная осадка по формуле 3, см
Объект №1	48,8	680	34,0	25,7	33,8
Объект №2	48,8	680	30,0	25,7	33,8
Объект №3	68,2 × 68,2	520	40,0	30,9	45,1
Объект №4	68,2 × 68,2	520	45,0	33,8	48,0
Объект №5	68,2 × 68,2	520	47,5	33,8	48,0

**Список литературы:**

1. Соколов Н.С. Длительные исследования процессов деформирования оснований фундаментов при повышенных нагрузках / Н.С. Соколов // Жилищное строительство. – 2017. – №5. – С. 3–8.
2. Соколов Н.С. Прогноз осадок большегабаритных фундаментов при повышенных давлениях на основания / Соколов, Н.С. // Жилищное строительство. – 2017. – №4. – С. 3–8.
3. Балюра М.В. Горизонтальные перемещения в глинистых основаниях / М.В. Балюра // Исследования по строительной механике и строительным конструкциям. – Томск: Изд-во Томского университета, 1983. – С. 45–51.
4. Балюра М.В. Экспериментальное исследование горизонтальных перемещений в основании жесткого квадратного штампа. Автореф. дис. ... канд. техн. наук / М.В. Балюра. – Новочеркасск, 1975. – 23 с.
5. Балюра М.В. О влиянии некоторых факторов на деформируемость грунтов в горизонтальном направлении / М.В. Балюра, М.Н.Окулова // Основания и фундаменты зданий и сооружений в условиях строительства Томска. – Томск: Изд-во Томского университета, 1977. – С. 36–41.
6. Окулова М.Н. Исследование НДС грунтов вблизи загруженного штампа / М.Н. Окулова // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1966. – №4. – С. 5–8.
7. Окулова М.Н. Экспериментальное исследование боковых деформаций в нагруженных песчаных основаниях и их роль в общей осадке // Сборник трудов Томского университета. – Т. II. – Томск, 1967.

8. Окулова М.Н. Экспериментальное исследование работы нагруженного песчаного основания в горизонтальном направлении. Автореф. дис. ... канд. техн. наук / М.Н. Окулова. – Свердловск, 1967. – 30 с.

9. Окулова М.Н. Боковой распор и его роль в осадке фундамента / М.Н. Окулова, М.В. Балюра // Исследование НДС оснований и фундаментов. Межвузовский сборник. – Новочеркасск, 1971. – С. 88–92.

10. Шелест Л.А. Вертикальные и горизонтальные деформации грунта при штамповых испытаниях / Л.А.Шелест // Труды НИИОСП. – 1972. – Вып. 63.

11. Шелест Л.А. Исследование НДС основания конечной толщины при действии круглого жесткого штампа. Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Л.А. Шелест. – М., 1975. – 20 с.

12. Darragh R.D. Controlled Water Tests to Pre-load Tank Foundations / R.D. Darragh // Pros. A.S.C.E. – 1964. – Vol. 90. – P. 303–329.

13. Belloni L.A. Differential Settlements of Petroleum Steel Tanks / L.A. Belloni, L.A. Garassini, M. Jamiolkowaki // Proc. Conference on Settlements of Structures. – Cambridge. – P. 323–328.

14. Коновалов П.А. Исследование деформаций сильносжимаемых оснований гибких штампов и резервуаров / П.А. Коновалов, Р.А. Усманов // Доклады к Дунайско-Европейской конференции по механике грунтов и фундаментостроению. – Кишинев, 1983. Т. 3. – С. 107–112.

15. Magnan J.P. Comportments du rembal experimental B a Cubzak-les-Ponts / J.P. Magnan, C. Mieussens, D. Queyroi // Revue Francaise de Geotechnique. – 1978. – №5. – P. 23–26.

16. Holtz R.D. Belastningaforsok pa svartmoka / R.D. Holtz, G. Holm // Swedish Geotechnical Institute, Internal Report to the National Swedish Road Board. – 1973. – 64 p.

17. Wilkes P.F. An induced failure at a trial embankment at King's Lynn Norfolk / P.F. Wilkes // England. Proc. ASCE Specialty Conference on Performance of Earth and Earth Supported Structures, Purdue University, Lafayette. IN. – 1972. – Vol. 1 (1). – P. 29–63.

18. Бугров А.К. Напряженно-деформированное состояние анизотропных оснований с областями предельного равновесия грунта / А.К. Бугров, А.И. Голубев // Труды Дунайско-Европейской конференции по механике грунтов и фундаментостроению. – Кишинев, 1983. – С. 203–207.

Для цитирования:

Соколов Н.С. Метод расчета осадок большеразмерных фундаментов при повышенных нагрузках // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 144–153.

Citation:

Sokolov N.S. Method of calculation of the sediments of the large-dimensional foundations with excessive loads // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 144–153.

УДК 532.51.031

## ОБТЕКАНИЕ ГИБКОЙ ДУГИ БЕЗГРАНИЧНЫМ ПОТОКОМ

*Н.А. Федоров*

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова»  
г. Чебоксары, Россия

***Аннотация:** в линейной постановке рассматривается плоская задача обтекания гибкой дуги безграничным потоком идеальной жидкости. Жидкость считается несжимаемой и невесомой, течение безвихревым. Отыскивается форма дуги и гидродинамическая сила на дугу для различных значений силы натяжения. Показано влияние натяжения на форму дуги и гидродинамическую силу.*

***Ключевые слова:** обтекание гибкой дуги, гидротурбина, натяжение, подъемная сила, гибкие лопасти, форма дуги.*

## FLOW AROUND A FLEXIBLE ARC IN THE ANLIMITLESS FLOW

***Abstract:** in the linear formulation, the plane problem of flow around a flexible arc by a limitless flow of an ideal fluid is considered. The liquid is considered incompressible and weightless, the current is vortex-free. The form of an arc and hydrodynamic force on an arc for various values of force of a tension is found. The influence of tension on the arc shape and hydrodynamic force is shown.*

***Keywords:** flow around a flexible arc, hydraulic turbine, tension, lifting force, flexible blades, arc shape.*

### Введение

Существующие гидротурбинные установки, которые преобразуют кинетическую энергию рек, имеют в своей конструкции жесткие лопасти определенной кривизны, что приводит к сложности изготовления и удорожанию гидротурбины. Предлагается конструкция гидротурбин с гибкими лопастями [1], которые под действием набегающего потока принимают оптимальную форму. В развертке кольцевого сечения такой гидротурбины, не учитывая малые искривления, получаем течение через гибкие дуги. Без учета влияния соседних дуг, покажем влияние формы гибкой дуги на гидродинамическую силу. Для этого рассмотрим

аналитическую задачу обтекания изолированной гибкой дуги безграничным потоком.

**Постановка задачи**

Пусть на тонкую гибкую дугу  $OA$ , форма которой  $y = f(x)$  неизвестна, натекает идеальная несжимаемая и невесомая жидкость со скоростью  $U$ . Положим равными единице плотность жидкости  $\rho = 1$ , скорость набегающего потока  $U = 1$  и длину дуги  $l = 1$ , т. е. все размерные переменные отнесены к размерным параметрам. Система координат в физической плоскости показана на рис. 1.

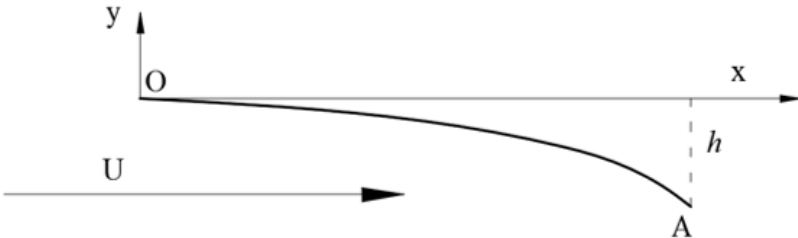


Рис. 1. Система координат в физической плоскости для гибкого контура

Натекание потока горизонтальное. Передняя кромка гибкой дуги располагается в начале системы координат, а задняя – в точке с координатами  $x = l, y = -h$ , при  $h/l \ll 1$ .

Тогда задача об обтекании контура гибкой дуги сводится к определению аналитической функции с кинематическим условием для функции тока  $\psi = 0$  на обеих сторонах дуги при дополнительном выполнении условия Лапласа

$$Tf''(x) = -(p - p_\infty), \tag{1}$$

где  $p$  – давление под гибким контуром;  $p_\infty$  – давление над гибким контуром;  $T$  – сила натяжения гибкого контура;  $f(x)$  – форма дуги.

Из линейризованного уравнения Бернулли:

$$p^+ = p^- + \rho U^2 u, \tag{2}$$

следует краевое условие для аналитической функции возмущенной скорости  $\omega(z) = u - iv$  при условии, что,  $\rho=1, U=1, l=1$

$$\text{Re } \omega(z) = u = Tf''(x), y=0, 0 \leq x \leq l \tag{3}$$

Кроме того, вдоль контура должно выполняться кинематическое условие непроницаемости

$$\operatorname{Im} \omega(z) = v = f'(x), \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4)$$

Решение смешанной краевой задачи для аналитической функции  $\omega(z)$  следует отыскивать в классе функций ограниченных в точке  $O(z) = 0$  и неограниченных в точке  $A(z) = l$  [2, 3]:

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z-1}{z}} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{f'(t)}{t-z} dt \quad (5)$$

### Нахождение формы гибкой дуги и вычисление подъемной силы

Для нахождения формы гибкой дуги подставим выражение (5) в условие (3) и для действительной части аналитической функции  $\omega(z)$  получим:

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{f'(t)}{t-x} dt = Tf''(x) \quad (6)$$

Проинтегрировав равенство по  $x$  в интервале  $(0,1)$  и в правой части изменив порядок интегрирования, то оно преобразуется к виду:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} F(x) f'(x) dx = T \int_0^1 f''(x) dx \quad (7)$$

где

$$F(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} \frac{1}{x-t} dt \quad (8)$$

Приравняв подинтегральные выражения получим:

$$Tf''(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{t}{1-t}} F(x) f'(x) \quad (9)$$

Краевые условия,  $f(0) = 0$   $f(1) = -h$ .

Понизив порядок интегрирования, найдем форму гибкой дуги

$$f'(x) = C e^{\frac{1}{\pi T} \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1-t}} F(t) dt} \quad f(x) = C \int_0^x e^{\frac{1}{\pi T} \int_0^\tau \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}} F(\tau) d\tau} d\tau \quad (10), (11)$$

где константа  $C$  определяется по условию  $f(1) = -h$ :

$$C = \frac{-h}{\int_0^1 e^{\frac{1}{\pi T} \int_0^\tau \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}} F(\tau) d\tau} d\tau} \quad (12)$$

Решение аналитической задачи для определения формы гибкой дуги для различных сил натяжения  $T$  находилось средства-

ми программного комплекса Mathcad. Результат решения представлен на рис. 2. Значение величины  $h$  принималось равным  $0,1l$ .

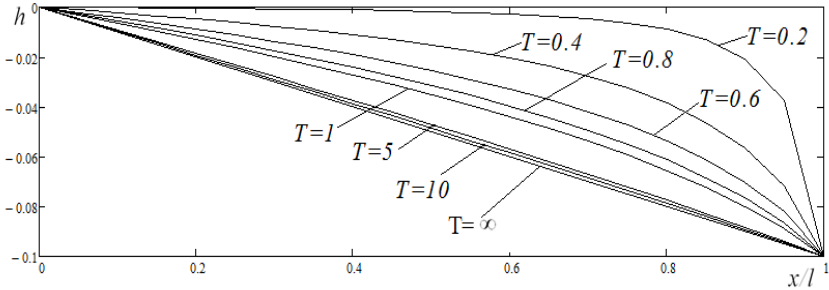


Рис. 2. Форма гибкой дуги от натяжения  $T$

Для того чтобы найти подъемную силу гибкого контура проинтегрируем вдоль контура гибкой дуги разности давлений под и над гибкой дугой:

$$Y = \int_0^1 (p - p_\infty) dx \quad (13)$$

С учетом равенств (1) и (6) находим

$$Y = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{f'(t) dt}{t-x} dx \quad (14)$$

или

$$Y = -T \int_0^1 f''(x) dx \quad (15)$$

где функция  $f'(t)$  может быть вычислена по формуле (10). Значения подъемной силы в зависимости от натяжения  $T$  представлены на рис. 3.

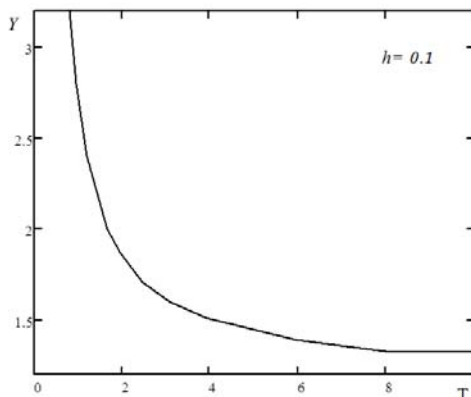


Рис. 3. Влияние натяжения на подъемную силу

Результаты расчетов показывают, что при уменьшении натяжения  $T$  прогиб гибкого контура увеличивается, а подъемная сила  $Y$  возрастает. При  $T \rightarrow \infty$  форма контура приобретает форму прямолинейной пластины, а результаты вычислений подъемной силы полностью согласуются с известными значениями для пластины.

### Выводы

Показано, что форма гибкой дуги влияет на подъемную силу, увеличение натяжения приводит к сглаживанию гибкой дуги до пластины. Таким образом, применение гидротурбин с гибкими лопастями позволит добиться увеличения эффективности работы гидротурбин, не прибегая к сложным конструкциям жестких лопастей.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Кабинета Министров Чувашской Республики в рамках научного проекта № 17-48-210286.*

### Список литературы:

1. Федоров Н.А. Обтекание гидротурбины с лопастями простой формы // Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение: сб. тр. Междунар. летней научной школы-конференции, посв. 155-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. гос. ун-та, 2018. С. 127–132.
2. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1966.
3. Терентьев А.Г. К линейной теории кавитационного обтекания препятствий // Вопросы прикладной математики и механики. – 1971. – Вып. I.

Федоров Николай Анфимович, старший преподаватель, ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И.Н. Ульянова», e-mail niknadin@yandex.ru

Для цитирования:

Федоров Н.А. Обтекание гибкой дуги безграничным потоком // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 154–159.

Citation:

Fedorov N.A. Flow around a flexible arc in the anlimitless flow // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 154–159.

УДК 539.3: 624.012(075)

**МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИОННО-ПРОЧНОГО  
РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕСУЩЕЙ  
СИСТЕМЫ МНОГОЭТАЖНОГО ЗДАНИЯ  
ИЗ МОНОЛИТНОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОНА**

*А.А. Трещев  
В.Г. Теличко  
Н.В. Золотов*

Тульский государственный университет  
г. Тула, Россия

***Аннотация:** рассмотрена конечно-элементная модель для определения НДС многоэтажного здания из монолитного железобетона. Модель основана на гибридных КЭ, учете разносопротивляемости бетона, трещинообразования в нем и развития пластических деформации в арматуре. Продемонстрированы отдельные решения в сопоставлении с результатами расчета с использованием известных ППП.*

***Ключевые слова:** гибридные конечные элементы, железобетон, пространственная несущая система здания, разносопротивляемость, нормированные пространства, трещинообразование.*



## A MODEL OF DEFORMATION-RESISTANT CALCULATION OF THE SPATIAL LOAD-BEARING SYSTEM HIGH-RISE BUILDINGS OF REINFORCED CONCRETE

***Abstract.** the finite element model for determining the SSC of a multi-storey building made of monolithic reinforced concrete is considered. The model is based on hybrid FE, taking into account the resistance of concrete, cracking in it and the development of plastic deformation in the reinforcement. Individual solutions are demonstrated in comparison with the results of the calculation using the known application program.*

**Key words:** hybrid finite elements, reinforced concrete, spatial load-bearing system of the building, resistivity, normalized space, cracking.

Современное развитие материаловедения и механики позволяют в настоящее время повысить требования к надёжности и экономичности несущих систем зданий и сооружений. Давно установлено, что деформационные и прочностные характеристики бетонов серьезно зависят от вида напряжённого состояния. Зависимости между напряжениями и деформациями бетонов при эксплуатационных нагрузках существенно нелинейны. Однако, до настоящего времени в инженерных расчетах зависимость от вида напряженного состояния учитывается, в основном, только для пределов прочности, а жесткостные характеристики, в лучшем случае, трактуются как разнсопротивляемость только при одноосных растяжении и сжатии, что совершенно некорректно. В данной работе используются уравнений состояния для бетонов, основанные на методике нормированных пространств напряжений [1].

Известно, что в процессе нагружения ЖБК развиваются упругопластические деформации бетона и арматуры, происходит образование и раскрытие трещин. Для учета всего этого сложного процесса деформирования необходимо совершенствовать расчетную базу, так как, распространенные компьютерные пакеты и реализованные в них математические модели зачастую грешат заметными погрешностями [1; 2]. Поэтому здесь использован вариант слоистого гибридного конечного элемента (КЭ), с учетом физически нелинейной разнсопротивляемости (в самом широком диапазоне изменения видов напряженного состояния)

бетона, его трещинообразование и развития упругопластических деформаций арматуры, который детально рассмотрен в публикациях авторов [2; 3]. Создание новых математических моделей расчета конструкций из железобетона с максимальным учетом его специфических свойств несомненно является актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела [4].

Как показано в работах [2–4] достаточно эффективными для расчета железобетонных конструкций являются гибридные КЭ [2; 3]. Для расчета ЖБК специально была разработана модификация гибридных КЭ с пятью степенями свободы в узле и матрицей жесткости, полученной для произвольного плоского треугольного элемента, позволяющего просто и эффективно исследовать НДС конструкций произвольной геометрии. Все процедуры получения и сами матрицы этого КЭ детально описаны и приведены в работах [2; 3]. При этом были учтены гипотезы Тимошенко об учете поперечных сдвигов и пренебрежимой малости нормальных напряжений на площадках перпендикулярных направлению изгиба пластинок и плит  $\sigma_{33}$ .

В основу модели положены зависимости между деформациями и напряжениями  $\{e\} = [A]\{\sigma\}$ , вытекающие из потенциала  $W_1$  [1]. Здесь  $\{e\} = \{e_{11} \ e_{22} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{23}\}^T$ ;  $\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \tau_{12} \ \tau_{13} \ \tau_{23}\}$ ;  $[A] = [A(\xi, \eta, \varphi, \sigma, \tau)]$  – матрица податливостей размером  $5 \times 5$  (с учетом принятых гипотез), с компонентами, нелинейно зависящими от нормированных напряжений  $\xi = \sigma/S_0$ ,  $\eta = \tau/S_0$ , фазы напряжений  $\varphi$  и уровня напряженного состояния  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ ,  $\tau = (S_{ij}S_{ij}/3)^{0,5}$ ,  $S_0 = (\sigma^2 + \tau^2)^{0,5}$ ,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ .

При этом связь между напряжениями и деформациями представим в виде [2; 3]:

$$\{\sigma\} = [B]\{e\}; \quad [B] = [A]^{-1}. \quad (1)$$

Усилия в сечении элемента определяются известным способом [2; 3]:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3; \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3; \quad Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{i3} dx_3, \quad (i, j = 1, 2). \quad (2)$$

Связь между вектором обобщенных сил и вектором обобщенных деформаций срединной поверхности примет вид:

$$M = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix}; [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & K_{14} & K_{15} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ & D_{22} & D_{26} & K_{24} & K_{25} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ & & D_{66} & K_{64} & K_{65} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{14} & C_{24} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{15} & C_{25} & C_{65} \\ & & & & & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & & & & & & C_{22} & C_{26} \\ & & & & & & & C_{66} \end{bmatrix}; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \psi_{2,1} \\ -\psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} - \psi_{1,1} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

где  $C_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} dx_3$ ;  $K_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3 dx_3$ ;  $D_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3^2 dx_3$  – интегральные

жесткости, зависящие от вида и уровня напряженного состояния.

Очевидно, что математическая модель определения НДС армированных плит и диафрагм жесткости из которых состоит здание должна достаточно точно учитывать специфические особенности взаимодействия сложной среды «бетон-арматура» на различных стадиях, быть вполне обозримой и практически реализуемой. Данная модель не может быть полностью свободной от дополнительных технических гипотез, в частности, считается справедливым следующее [3; 4]: 1) нагружение простое, деформация активная; 2) размеры плит и диафрагм сооружения в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями, а поэтому арматура моделируется размазанным слоем с учетом коэффициентов армирования слоя; 3) в виду неоднородности конструкции по толщине, плиты и диафрагмы расчленяются на ряд фиктивных слоев: а) бетонные слои без трещин; б) железобетонные слои без трещин; в) бетонные слои с трещинами; г) железобетонные слои с трещинами; д) железобетонные слои с пересекающимися трещинами. 4) напряжения в пределах армированных слоев элемента определяются как сумма напряжений в бетоне и арматуре, а за условие совместности бетона и арматуры принимается равенство деформаций этих двух материалов; 5) срединные поверхности плит и диафрагм представляется сетью гибридных конечных элементов с учетом разбиения по толщине на ряд фиктивных слоев; 6) жесткостные характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространяются на весь слой; 7) критерий прочности бетона в каждом фик-

тивном слое принимается согласно условию П.П. Баландина [1; 3]; 8) трещины в области треснувшего фиктивного слоя в пределах конечного элемента считаются сквозными и параллельными друг другу. Влияние растянутого бетона учитывается коэффициентом В.И. Мурашева и характеристикой поврежденности бетона [3; 5]; 9) при наличии трещин бетон в пределах фиктивного слоя моделируется трансверсально-изотропным телом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин.

Рассмотрим моделирование фиктивных слоев. Бетонные слои без трещин. Связь деформаций и напряжений имеет вид (1).

Железобетонные слои без трещин. С учетом принятых гипотез получаем матрицу «упруго-пластичности» для железобетонных слоев без трещин:

$$[B] = [A]^{-1} + [B_s], \quad (4)$$

где  $B_{s11} = E_s \mu_1 / (1 - \nu_s^2)$ ;  $B_{s22} = E_s \mu_2 / (1 - \nu_s^2)$ ;  $B_{s33} = E_s [1 / (1 + \mu_1 \nu_s) + 1 / (1 + \mu_2 \nu_s)]$ ;  $B_{s44} = E_s / (1 + \mu_1 \nu_s)$ ;  $B_{s55} = E_s / (1 + \mu_2 \nu_s)$ ;  $B_{sij} = 0$  – для остальных компонентов матрицы  $[B_s]$ ;  $E_s$  – модуль упругости арматуры,  $\nu_s$  – коэффициент Пуассона арматуры;  $\mu_1 = A_{s1} / S_{i11} h_s$ ,  $\mu_2 = A_{s2} / S_{i22} h_s$  – коэффициенты армирования вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$  исходной системы координат;  $A_{s_i}$  – площадь сечения арматурного стержня;  $S_{i11}$ ,  $S_{i22}$  – шаг стержней параллельных осям  $x_1$  и  $x_2$ ;  $h_s$  – суммарная толщина армированных слоев.

Компоненты матрицы  $[A]^{-1}$  в уравнении (4) вычисляются по тем же формулам, но в них вместо полных напряжений  $\sigma_{ij}$  фигурируют напряжения в бетонной матрице –  $\sigma_{Bij}$ .

Бетонные слои с трещиной. В соответствии с принятым критерием трещины появляются при:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3 \cdot (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) - (\sigma_{11} \sigma_{22}) - (R_{bt} - R_b)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - R_{bt} R_b > 0, \quad (5)$$

где  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{23}$  – напряжения в бетоне при трещинообразовании;  $R_{bt}$ ,  $R_b$  – временное сопротивление бетона осевому растяжению и сжатию.

При срабатывании условия (5) в бетонном слое появляется трещина на площадках, ортогональных к максимальному глав-

ному растягивающему напряжению, которое (ввиду малости фиктивного слоя) определяется по правилам плоского напряженного состояния. Ориентация трещин фиксируется углом  $\chi_1$  от нормали к трещине до оси  $x_1$ .

После появления трещин в фиктивном слое конечного элемента бетон становится ортотропным, из-за чего применимость в «чистом виде» потенциала  $W_1$  [1], характеризующего нелинейный дилатирующий разнсопротивляющийся изотропный материал, сводится к минимуму. В этом случае применимость потенциала деформаций сохраняется для направлений вдоль трещин, где целостность бетона сохраняется. В этих направлениях деформационные свойства бетона можно представить секущим модулем  $E_B$  и секущим коэффициентом  $\nu_B$ :

$$e_{22}^* = A_{12}^* \sigma_{11}^* + A_{22}^* \sigma_{22}^* = (\sigma_{22}^* - \nu_B \sigma_{11}^*) / E_B; \quad E_B = 1 / A_{22}^*; \quad \nu_B = -A_{12}^* / A_{22}^*,$$

где  $A_{12}^*$ ,  $A_{22}^*$  – элементы матрицы податливостей, вычисленные по уравнениям для не треснувших бетонных слоев;  $\sigma_{ij}^*$  – напряжения в бетоне, вычисленные в повернутой системе координат  $x_1^* \text{оx}^* 2$ , в соответствии с углом ориентации трещин  $\chi_1$  относительно системы  $x_1 \text{оx} 2$ .

Тогда в повернутой системе координат имеем  $\{e^*\} = [A^*] \{\sigma_B^*\}$ . Очевидно, что  $[B^*] = [A^*]^{-1}$ . Выполнив преобразование координат из системы  $x_1^* \text{оx}^* 2$  в исходную, определим матрицу жесткости для бетона с трещинами  $[B^c] = [A^c]^{-1}$ .

Железобетонные слои с трещиной. Образование трещин фиксируется по выполнению критерия Баландина в фиктивном слое КЭ, но в условии (5) должны фигурировать напряжения в бетонной матрице  $\sigma_{Bij}$  армированного слоя.

Ориентация трещин как и в бетонных слоях определяется углом  $\chi_1$ , но при его определении используются напряжения в бетонной матрице. Уравнения связи деформаций и напряжений в бетоне с учетом поврежденности матрицы в повернутой системе координат определяется по аналогии с бетонными треснувшими слоями –  $\{e^*\} = [A^*] \{\sigma_B^*\}$ , но здесь ненулевые компоненты повернутой матрицы податливостей определяются иначе:

$$A_{11}^* = 1/(E_B \omega); \quad A_{12}^* = -\nu_B / E_B; \quad A_{22}^* = 1/E_B; \\ A_{44}^* = A_{66}^* = 2(1 + \nu_B)/(E_B \omega); \quad A_{55}^* = 2(1 + \nu_B)/E_B, \quad (6)$$

где вдоль оси  $x_1$  секущий модуль (модуль деформации бетона) устанавливается по величине  $E_B \omega$  ( $\omega$  – параметр поврежденности бетона  $0 < \omega \leq 1$ ).

В исходной координатной системе матрица «упруго-пластичности» для бетона с трещинами железобетонного слоя по виду аналогична бетонным слоям  $[B_B^c] = [A^c]^{-1}$ , но с учетом соотношений (6).

Матрица «упруго-пластичности» для армирующих компонентов железобетонного слоя с трещинами в исходной системе координат  $x_1 o x_2$  формально сохраняет свой вид по типу (7), но вместо модулей упругости  $E_S$  вводятся  $E_{s_{kk}}$  – секущие модули деформаций арматуры вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$  и  $\nu_{s_{kk}}$  – переменные коэффициенты Пуассона ( $k=1,2$ ):

$$B_{S11}^c = E_{S11} \mu_{11} / (1 - \nu_{S11}^2); \quad B_{S22}^c = E_{S22} \mu_{22} / (1 - \nu_{S22}^2); \quad B_{S44}^c = E_{S11} / (1 + \mu_{11} \nu_{S11}); \\ B_{S33}^c = E_{S11} / (1 + \mu_{11} \nu_{S11}) + E_{S22} / (1 + \mu_{22} \nu_{S22}); \quad B_{S55}^c = E_{S22} / (1 + \mu_{22} \nu_{S22}), \quad (7)$$

где с целью учета развития пластических деформаций в арматуре, введенные характеристики арматуры определяются следующим образом:

$$E_{s_{kk}} = \begin{cases} E_S; \nu_S \text{ при } \sigma_{s_{kk}} < \sigma_p \mu_{kk}; \\ \sigma_p / e_{kk}; 0,5 \text{ при } \sigma_{s_{kk}} \geq \sigma_p \mu_{kk}; \end{cases}$$

$\sigma_p$  – предел текучести арматурной стали.

Для детализации модели армированного слоя с трещинами введенную функцию поврежденности  $\omega$  необходимо определить с помощью функции В.И. Мурашева:

$$\psi_S = E_{sn} / (E_B \omega + E_{sn}), \quad (8)$$

где  $E_{sn}$  – модуль упругости арматуры по нормали к трещине.

Функция  $\psi_S$  вычисляется по эмпирической формуле Г.А. Генниева, В.Н. Киссюка и Г.А. Тюпина [5]. В результате получаем нелинейное уравнение относительно  $\omega$ , решаемое последовательными приближениями.

Железобетонные слои с пересекающимися трещинами.  
После появления первичных трещин по мере роста нагрузки могут возникать трещины в других направлениях. В этом случае

матрица «упруго-пластичности» в фиктивном слое приобретает вид:  $[B]=[B_S^c]$

Особенности представленной модели покажем на примере задачи о НДС монолитного здания из 7 этажей (рис. 1, 2.1, 2.2). Для решения принято: а) толщина перекрытий 250 мм; б) толщина пилонов 350 мм; в) влияние основания не учитывается при жестком защемлении пилонов в фундаменте и основании; г) к зданию приложены вертикальные нагрузки на перекрытия и горизонтальные – по двум взаимно перпендикулярным сторонам.

Бетон принят с пределом прочности на сжатие  $R^c = 28,4 \text{ МПа}$  [1; 3]. Армирование плит сетками из стержней  $\varnothing 14 \text{ мм А400}$  (защитный слой 35 мм, предел текучести  $\sigma_p = 400 \text{ МПа}$ ), армирование пилонов симметрично двумя сетками из стержней  $\varnothing 12 \text{ мм А400}$  (защитный слой 30 мм). Нагрузки приведены на рис. 3.

На рис. 4, 5 представлены прогибы  $W$  (м) перекрытий в характерных точках (рис. 2.1). Расчеты проведены в сравнении с аналогичными вычислениями по пакетам STARK ES, ANSYS и LIRA-SAPR.

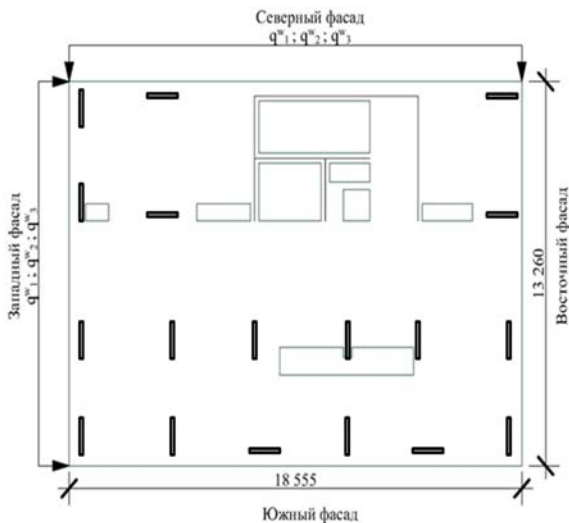


Рис. 1. План расчетной схемы здания

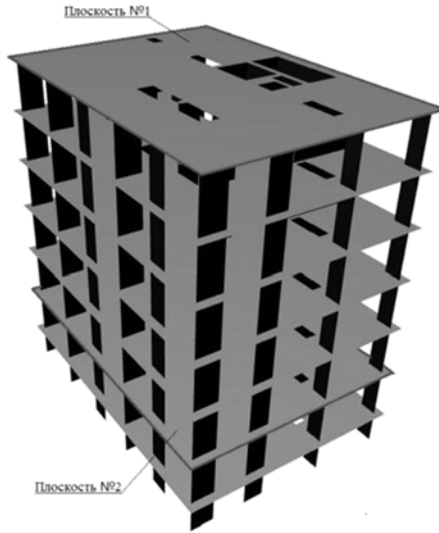


Рис 2.1. Аксонометрия здания

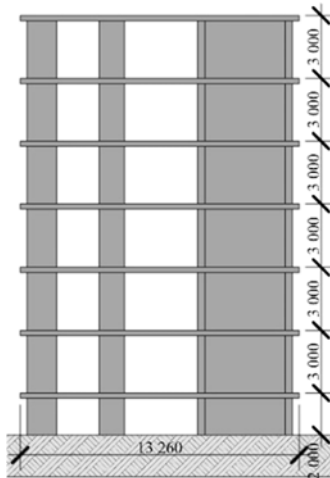


Рис. 2.2. Южный фасад здания

Установлено, что разработанная модель показала хорошие результаты. Полученные перемещения отличаются от данных нелинейного расчета в ANSYS, который не учитывает разносо-



противляемость бетона, в точке экстремума на 19%. Различия по максимальным напряжениям находятся в диапазоне от  $-25\%$  до  $+45\%$ . Выполненные расчеты здания позволяют утверждать, что разработанная модель обладает рядом преимуществ перед известными САПР. Модель учитывает разнсопротивляемость бетона, образование трещин, упругопластические деформации арматуры, а конечный элемент сформулирован в удобной форме для цифровой реализации.

Очевидно, что не учет явления разнсопротивляемости бетона при сложных видах напряженного состояния, трещинообразования в железобетонной несущей системе, приводит к существенным погрешностям в основных характеристиках НДС конструкций. Поэтому для обеспечения достоверности результатов расчетов и для предотвращения аварийных ситуаций современных сооружений необходимо учитывать влияние усложненных свойств материалов в более полном объеме.

Нагрузка	Шаг нагрузки		Максимальная величина нагрузки	
	кПа	кН/м	кПа	кН/м
Единицы измерения:	кПа	кН/м	кПа	кН/м
На покрытие - $q_f$	7	-	70	-
На этаж - $q_d$	6,8	-	68	-
Ветровая - $q^w_1$	1,4	0,35	14	3,5
Ветровая 2 - $q^w_2$	1,8	0,45	18	4,5
Ветровая 3 - $q^w_3$	0,9	0,225	9	2,25

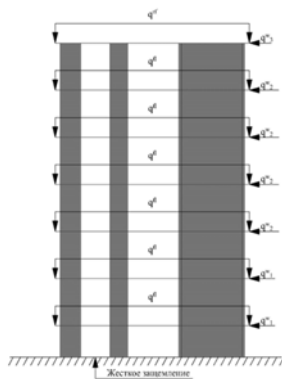


Рис. 3. Нагрузки и восточный фасад здания

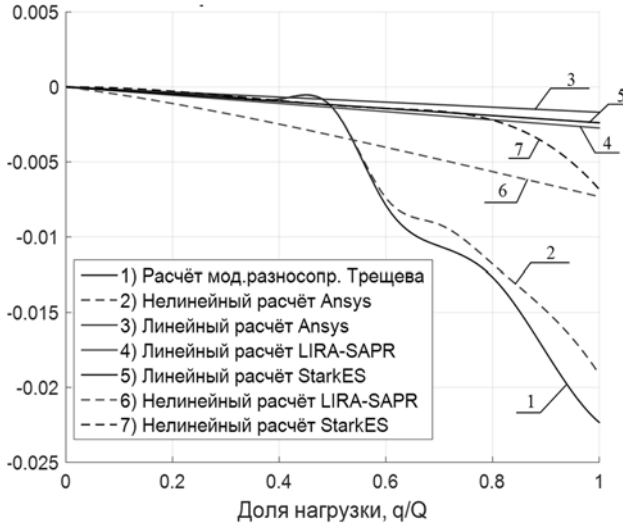


Рис. 4. Вертикальные перемещения точки 1 в плите 1, м –

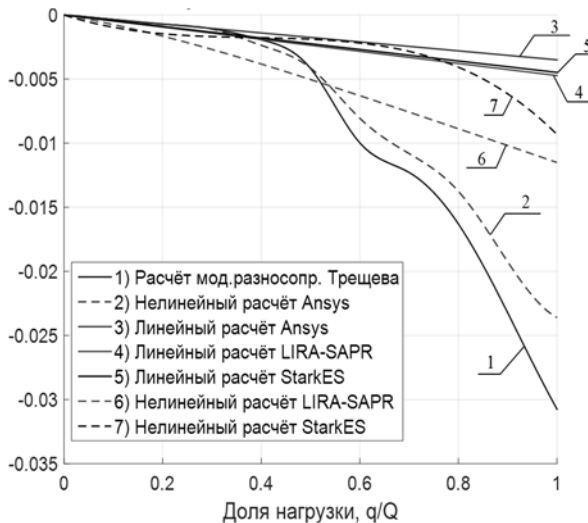


Рис. 5. Вертикальные перемещения в точке 1 плоскости 2, м  
*Список литературы:*

1. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной и наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А.А. Трещев. – М.: РААСН; Тула: ТулГУ, 2016. – 326 с.

2. Теличко В.Г. Гибридный конечный элемент для расчета плит и оболочек с усложненными свойствами / В.Г. Теличко, А.А. Трещев // Известия вузов. Строительство. – 2003. – №5 – С. 17–23.

3. Артемов А.Н. Поперечный изгиб железобетонных плит с учетом трещин / А.Н. Артемов, А.А. Трещев // Изв. вузов. Строительство. – 1994. – №9–10. – С. 7–12.

4. Jendele L. On the solution of multi-point constraints – application to FE analysis of reinforced concrete structures / L. Jendele, J. Červenka // Computers & Structures. – 2009. – Vol. 87. – P. 970–980.

5. Гениев Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А.Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.

Трещев Александр Анатольевич – д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент РААСН, зав. каф. «Строительство, строительные материалы и конструкции», Тульский государственный университет. E-mail: taa58@yandex.ru

Теличко Виктор Григорьевич – канд. техн. наук, доцент каф. «Строительство, строительные материалы и конструкции», Тульский государственный университет.

Золотов Никита Владимирович – аспирант каф. «Строительство, строительные материалы и конструкции», Тульский государственный университет.

*Treschev Alexander Anatolyevich – doctor of technical Sciences, Professor, corresponding member of RAABN, head of the department «Construction, building materials and structures», Tula state University. e-mail: taa58@yandex.ru*

*Telichko Victor Grigorievich – candidate of technical Sciences, associate Professor of the department «Construction, building materials and structures», Tula state University.*

*Zolotov Nikita Vladimirovich – postgraduate student the department «Construction, building materials and structures», Tula state University*

Для цитирования:

Трещев А.А. Модель деформационно-прочного расчета пространственной несущей системы многоэтажного здания из монолитного железобетона / А.А. Трещев, В.Г. Теличко, Н.В. Золотов // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конф. с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 159–170.

Citation:

Treschev A.A. A model of deformation-resistant calculation of the spatial load-bearing system high-rise buildings of reinforced concrete / A.A. Treschev, V.G. Telichko, N.V. Zolotov // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 159–170.

## РАЗДЕЛ 3. МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 655.28.022.11

### ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

*Л.А. Максимова*

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова»  
г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* в статье рассматривается актуальность требований к публикации результатов научного исследования.

*Ключевые слова:* исследователь, плагиат

### BASIC PRINCIPLES OF SCIENTIFIC RESEARCH

*Abstract:* the article discusses the relevance of the requirements for the publication of the scientific research results

*Keywords:* researcher, plagiarism.

Научный работник, исследователь, ученый, преподаватель вуза – все эти должности неотъемлемо предполагают занятия научной деятельностью. Критерии этой деятельности – работы, опубликованные в открытой печати.

#### 1. Введение. Общие принципы. Плагиат

В настоящее время публикуемые в открытой печати научные работы: статьи, квалификационные работы, диссертации, монографии – обязательно проходят проверку на антиплагиат. С одной стороны, этот процесс является некоторым критерием для отбора действительно оригинальных работ от копирования и заимствования части исследования, но не дает полной гарантии оригинальности статьи. С другой стороны, использование в работах формул, определений, цитат является зачастую необходимым компонентом работы, что указывает на некоторый процент плагиата. Таким образом, проверка на плагиат имеет как свои плюсы, так и свои минусы. Для квалификационных работ последнее время усилились требования по публикации полученных результатов исследования, как их число, так и категоричность издания. Эти требования также являются порой необходимыми для того, чтобы статья была хорошей: научной, краси-

вой, полной, оригинальной, удобно читаемой, понятной и так далее. Статьи, монографии; тезисы; выступления на конференции, должны удовлетворять основным условиям прописанных в этих изданиях – журналах, их суть и выполнение говорят не только об авторе, но и о статусе журнала. Таким образом, если хотите напечататься в хорошем журнале следуйте всем предписаниям этого издания. И, наоборот, прежде чем печататься в неизвестном Вам издании, прочитайте несколько статей из этого журнала, и если в них увидите непрофессиональность авторов, – бегите от этого издания (кстати, такие издания нечасты в последнее время)!

## **2. Аннотация. Актуальность**

Необходимые условия для понимания исследования стороннему читателю является актуальность, постановка задачи, методы и методика решения задачи, выводы, а также обзор задач близким к рассматриваемой задаче. Научному работнику необходимо быть в курсе новейших результатов, полученных в области его исследований, для этого необходимо лишь изучить постановки задач других исследователей и сравнить их со своими. Зачастую название работы не дает точную характеристику исследуемой задачи в полной ее постановке, с уточненными начальными и граничными условиями, а также модели одной и той же задачи могут существенно отличаться. Вспоминается случай, имевший место более 20 лет назад в нашей научной школе под руководством моего учителя Д.Д. Ивлева [1]. Несколько аспирантов подготовили к защите свои работы и наш Учитель послал их в командировку в Москву, Институт Проблем Механики РАН, позаниматься в библиотеке, выяснить нет ли новых результатов близким к их. Это было достаточно давно, интернет в этом вопросе тогда был не помощник, а об антиплагиате и не слышали. Через пару дней они позвонили и сообщили о предварительных результатах: нашлись несколько работ по названию очень схожих с тематикой наших аспирантов. Эта новость вначале посеяла небольшую панику, но при более детальном ознакомлении с этими работами, выяснилось, что задачи в схожих по названию статьях по сути описывают решения совершенно различных задач.

## **3. Основной текст. Выбор метода и методики исследования**

Постановка задачи, выбор метода решения играют существенную роль для оценки сути исследования и его результатов. Так, например, сила, приложенная к одному из концов балки, может быть постоянной и тогда задача решается в классической постановке достаточно элементарно. Если же сила представляет собой динамическую или импульсную функцию, то решение

такой задачи усложняется во много раз. Отдельно необходимо отметить исследования по устойчивости процессов. При этом зачастую ищутся особые решения, которые сложно «поймать». Выбор метода решения определяет исследователь и здесь он имеет полную свободу действий [2]. Но получение решения с математической точки зрения не является обычно самоцелью (по крайней мере для механики, физики, инженерных наук). Необходимо не просто найти решение, а найти адекватное решение. Выбор из полученных решений годных решений для объяснения рассматриваемых процессов является достаточно сложным занятием. Зачастую огрубленная модель или избыток не очень хороших данных не помогает правильно описать полученные результаты. Здесь возможны различные причины: недостаточно изучен метод, с помощью которого решается задача, взята неверная выборка из генеральной совокупности, изначально метод не дает выводов по данной проблеме, и так далее [3; 4].

#### 4. Выводы и литература

Выводы являются основной целью решения задачи. Они базируются не только на вычислениях, но и на доказательствах-обоснованиях. При постановке задачи, должны быть указаны и основные трудности. Решение, полученное одним методом, должно быть сравнено (указанно отличие этого метода от других (в области применения), результаты желательно представить в виде графиков. В выводах необходимо указать для каких типов задач может применяться данное решение, а также перспективы использования или распространение данного решения для будущих исследований.

Литература, используемая для ссылок, должна быть доступна читателю. Например, если статья издается в иностранном журнале, то основная часть ссылок должна быть на английском языке и может быть найдена в электронных ресурсах этих изданий. Если исследователь публикуется в каком-либо журнале первый раз, то необходимо просмотреть архив этого журнала и найти статьи схожие по тематике данного исследователя и сделать на них ссылки. Обозначение и понятия должны быть общедоступными и общепринятыми. Ссылки желательно делать не на учебники, а на монографии и оригинальные статьи.

#### *Список литературы:*

1. Максимова Л.А. Мой учитель – ученый и педагог (воспоминания о Д.Д. Ивлеве) // Парадигмы университетской истории и перспективы университетологии (к 50-летию Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова): сборник статей. В 2 т. Т. 1 / редкол.: О.Н. Широков, Т.Н. Иванова, Н.Н. Агеева, М.Н. Краснова. – Чебоксары: ИД «Среда», 2017. – С. 98–102.

2. Николаева А.Г. О методике использования мультимедийных средств преподавания в технических вузах // Парадигмы университетской истории и перспективы университетологии (к 50-летию Чувашского государственного университета имени И.Н. Ульянова): сборник статей. В 2 т. Т. 1 / редкол.: О.Н. Широков, Т.Н. Иванова, Н.Н. Агеева [и др.]. – Чебоксары: ИД «Среда», 2017. – С. 371–373.

3. Нигматулин Р. Об оптимальной доле государственных расходов в ВВП и темпах экономического роста // Вопросы экономики. – 2003. – №3.

4. Михайлов Б.В. К обоснованию некоторых коэффициентов при расчете элементов конструкции методом сил/ Б.В. Михайлов, С.Б. Михайлов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2016. – №1 (27). – С. 150–156.

Максимова Людмила Анатольевна, профессор кафедры строительных конструкций ЧГУ им. И.Н. Ульянова, д-р физ.-мат. наук, e-mail: maximova\_ng@mail.ru

*Maksimova Ludmila Anatolievna, Professor, Department of building structures of CHGU named by I. N. Ulyanov, doctor of physico-mathematical Sciences, e-mail: maximova\_ng@mail.ru*

Для цитирования:

Максимова Л.А. Основные принципы научного исследования // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 171–174.

Citation:

Maksimova L.A. Basic principles of scientific research// Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 171–174.

УДК 624.014.2

## ПРИМЕНЕНИЕ САПР В ПРОЕКТИРОВАНИИ МНОГОЭТАЖНЫХ СТАЛЬНЫХ КАРКАСОВ

*А.Г. Николаева*

*Н.В. Иванова*

ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И.Н. Ульянова»

г. Чебоксары, Россия

*Аннотация:* в статье приведены результаты анализа расчета пространственного стального каркаса промздания с раскреплениями изгибаемых элементов и без раскреплений. Произведен анализ напряженно-деформированного состояния и конструирования несущих элементов.

*Ключевые слова:* метод конечных элементов, стальной каркас, раскрепления.

### APPLICATION OF CAD IN THE DESIGN OF MULTILEVEL STEEL FRAMES

*Abstract:* the article presents the results of the analysis of the calculation of the spatial steel framework of the building with fastenings of flexible elements and without fastenings. The analysis of the stress-strain state and design of the bearing elements.

*Keywords:* finite element method, steel frame, detachment

В связи с интеграцией средств автоматизированного проектирования в образовательном процессе [1–3], при выполнении расчетно-проектировочной работы по дисциплине «САПР в строительстве» студентам, обучающимся по направлению 08.03.01 «Строительство», была предложена задача расчета многоэтажного стального каркаса производственного здания. Высота этажа, пролет ригелей и этажность здания варьировалась по заданию. Наружные стены – ненесущие.

Нагрузка от ограждения и нагрузка на перекрытия задавались индивидуально. Размеры сечения колонн и второстепенных балок назначались в виде прокатных двутавров, сечение главных балок – в виде составного двутавра, элементы связей – из замкнутых прямоугольных и квадратных профилей (рис. 1).

Узлы сопряжения главных балок с колонной по условию задачи – шарнирные. Опираие второстепенных балок (ВБ) на главные балки (ГБ) – шарнирное, колонн на фундамент – жесткое. Требовалось выполнить расчет каркаса в программном комплексе (ПК) Лира-САПР, запроектировать несущие элемен-



ты каркаса, рассмотрев влияние раскреплений на результат подбора сечений несущих элементов.

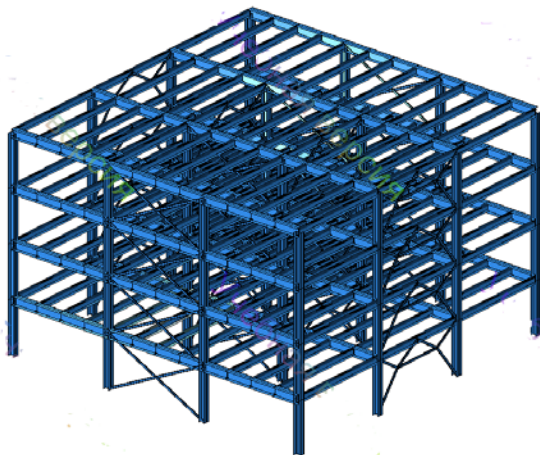


Рис. 1. Расчетная схема каркаса

Условные раскрепления разбивают элемент на участки. Прогиб сечений элемента такого участка определяется относительно линии, соединяющей раскрепления на его концах. В программе Лира-САПР предусмотрена возможность определять не чистые перемещения (относительно локальных осей  $Y$  и  $Z$  в недеформированной схеме), а прогиб относительно двух выбранных условно неподвижных точек (точек раскрепления) (рис. 2). Если раскрепления не наложены, то прогиб принимается равным полному расстоянию до оси  $X$  [4].

Рассматривалось два варианта расчетной схемы: с раскреплениями изгибаемых элементов (рис. 3) и без раскреплений.

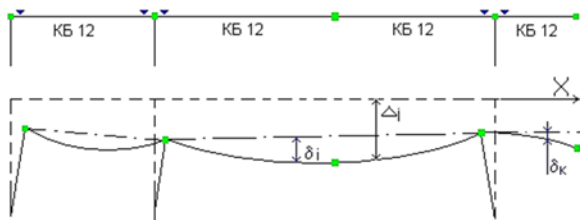


Рис. 2. К определению прогибов при раскреплениях

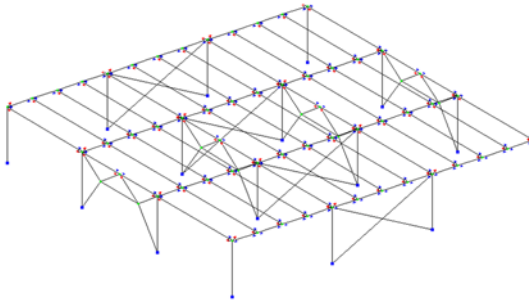


Рис. 3. Раскрепления изгибаемых элементов (фрагмент на один этаж)

Каркас нагружался постоянной нагрузкой, временной полезной, снеговой и ветровой нагрузками. По результатам расчета рам были получены следующие результаты (рис. 4).

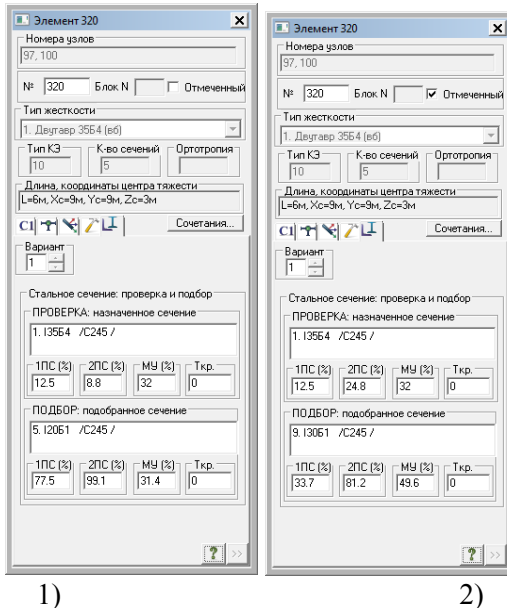


Рис. 4. Результаты конструирования для элемента второстепенной балки с раскреплениями (1) и без раскрепления (2)

Как видно из рисунка, результаты проверки по 2-му предельному состоянию существенно разнятся для первого и второго вариантов. В первом варианте (с раскреплениями) процент исчерпания несущей способности составляет 8,8%, а во втором варианте, без раскреплений он составляет уже 24,8%.

Аналогичное сравнение в главных балках дало следующие результаты (рис. 5): в варианте с раскреплениями процент исчерпания несущей способности составляет 17%, а для варианта без раскреплений – 19,9%.

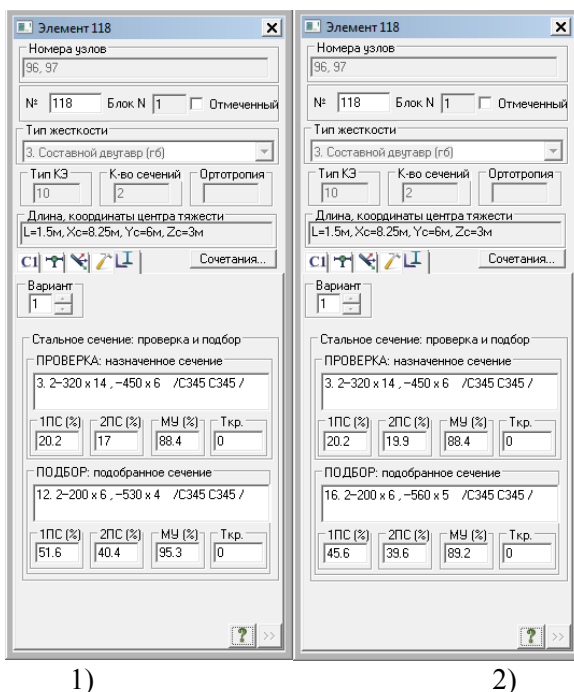


Рис. 5. Результаты конструирования для элемента главной балки с раскреплениями (1) и без раскреплений (2)

Результаты подбора сечений элементов выглядят следующим образом: для второстепенной балки при наличии раскреплений требуется прокатный двутавр профиль 20Б1, а для балки при отсутствии раскреплений – профиль 30Б1. Для главной балки сечение подобранных элементов составного двутавра тоже отличаются – для стенки первого варианта (с раскреплениями)

требуется листовой прокат – 530 x 4, а для второго варианта (без раскреплений) – 560 x 5.

При всем при том, перемещения узлов и усилия в изгибаемых элементах каркаса одинаковы в обоих вариантах.

Полученные результаты говорят о том, что при расчете пространственных стальных каркасов установка раскреплений в изгибаемых элементах дает существенную экономию материалов почти в 1,5 раза для второстепенных балок и в 1,3 раза для главных балок.

Итоги данного исследования можно использовать при выполнении курсового или дипломного проектирования по дисциплине «Металлические конструкции».

#### **Список литературы**

1. Иванова Н.В. Интеграция САПР в образовательном процессе подготовки специалистов строительной области / Н.В. Иванова, А.Г. Николаева // Развитие современного образования: от теории к практике: материалы III Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 23 дек. 2017 г.) / редкол.: О.Н. Широков [и др.]. – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2017.

2. Николаева А.Г. О методике использования мультимедийных средств преподавания в технических вузах / А.Г. Николаева // Парадигмы университетской истории и перспективы университетологии (к 50-летию Чувашского государственного университета имени И.Н. Ульянова): сборник статей. В 2 т. Т. 1 / редкол.: О.Н. Широков, Т.Н. Иванова, Н.Н. Агеева [и др.] – Чебоксары: ИД «Среда», 2017. – С. 371–373.

3. Николаева А.Г. Использование средств САПР при расчете поперечной рамы железобетонного каркаса / Н.В. Иванова, А.Г. Николаева // Наука, образование, общество: тенденции и перспективы развития: материалы X Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 21 мая 2018 г.) / редкол.: О. Н. Широков [и др.]. — Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2018.

4. Медведенко Д. Золотые струны ЛИРЫ–САПР / Д. Медведенко, Р. Водопьянов // САПР и графика. – 2013. – №2 (196). – С. 10–18.

Николаева Анастасия Георгиевна – ст. преподаватель ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия, e-mail: nag\_sf@mail.ru

Иванова Наталья Васильевна – ст. преподаватель ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия, e-mail: sus-a@mail.ru

*Nikolaeva Anastasia Georgievna – senior lecturer of the «Chuvash state University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: nag\_sf@mail.ru*

*Ivanova Natalia Vasilevna – senior lecturer of the «Chuvash state University named I. N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: sus-a@mail.ru*

Для цитирования:

Николаева А.Г. Применение САПР в проектировании многоэтажных стальных каркасов / А.Г. Николаева, Н.В. Иванова // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конф. с междунар. участием – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 175–180.

Citation:

Nikolaeva A.G. Application of cad in the design of multilevel steel frames / A.G. Nikolaeva, N. V. Ivanova // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 175–180.

УДК 372.862

## **АНАЛИЗ РАСЧЕТОВ ПРОГИБОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ**

***М.В. Петров  
Б.В. Михайлов  
Е.Г. Гоник  
Н.Н. Аринина  
О.С. Яковлева***

Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова  
г. Чебоксары, Россия

***Аннотация:** в статье рассмотрено решение задачи студентами по определению прогибов методом начальных параметров. Приводится два варианта решения с помощью универсального уравнения для определения прогибов и решение с использованием интеграла Мора. Учитывая треугольную нагрузку по-разному, студенты получают разные значения прогиба. Сравнивая результаты решения с результатом решения с использованием интеграла Мора, находится наиболее верное решение.*

***Ключевые слова:** сопротивление материалов, метод начальных параметров, треугольная нагрузка, интеграл Мора, погрешность вычислений.*

## ANALYSIS OF CALCULATIONS OF DEFLECTIONS OF STRUCTURAL ELEMENTS BY THE METHOD OF INITIAL PARAMETERS

**Abstract:** *the article discusses the students solution to the problem of determining deflections by the method of initial parameters. Two solutions are given using the universal equation for determining the deflections and a solution using the Mohr integral. Given the triangular load in different ways, students get different deflection values. Comparing the results of the solution with the result of the solution using the Mohr integral, the most correct solution is found.*

**Keywords:** material resistance, initial parameter method, triangular load, Mohr integral, calculation error.

Одной из основных задач высшего образования является подготовка квалифицированных специалистов, бакалавров и магистров соответствующего уровня, конкурентных на рынке труда, компетентных, ответственно и свободно владеющих своими профессиональными знаниями, способных к эффективной работе на уровне мировых стандартов.

Решение таких задач невозможно без самостоятельной работы студентов над учебным материалом, если это особенно касается при изучении фундаментальных дисциплин, например, физики, математики, теоретической механики, сопротивления материалов, теории упругости и пластичности.

При подготовке к занятиям, зачетам и экзаменам современные студенты информацию получают не только на занятиях, но и в большинстве случаев из интернета.

Рассмотрим один из случаев выполнения контрольной работы по дисциплине «Сопротивление материалов» студентами при определении прогиба в точке методом начальных параметров и какие частые ошибки совершают студенты при этом.

Для решения задачи, представленной на рис. 1 методом начальных параметров необходимо в начале определить реакции опор в точках А и В. Обычно выполнение данной операции не вызывает затруднений у средне подготовленных студентов.

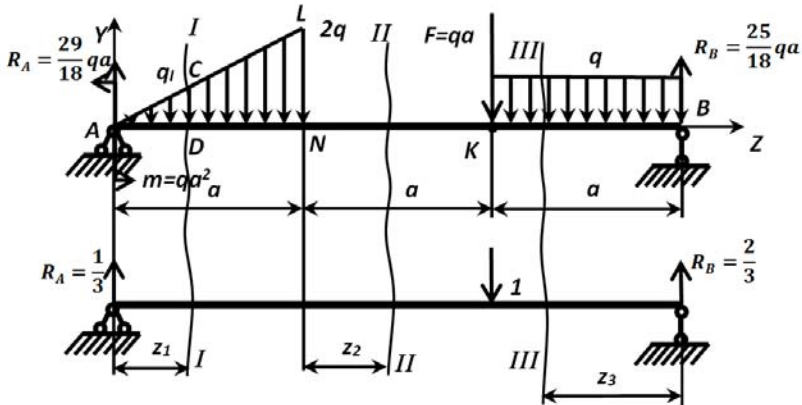


Рис. 1. Расчетная схема балки

Затруднения начинаются при составлении уравнения прогибов методом начальных параметров, в частности при учете треугольной нагрузки и нагрузки в виде трапеции. В наиболее распространенных электронно-библиотечных системах IPRbooks, издательства «Лань» и в электронной библиотеке ЮРАЙТ много изданий по сопротивлению материалов [1–18]. В этих изданиях уравнение прогибов методом начальных параметров в основном приводится в следующей редакции в виде выражения (1).

$$EI_X \cdot y_Z = EI_X \cdot y_0 + EI_X \cdot \theta_0 \cdot z + \frac{\sum m_i(z-a_i)^2}{2} + \frac{\sum F_i(z-b_i)^3}{6} + \frac{\sum q_i(z-c_i)^4}{24} \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $I_X$  – момент инерции,  $y_Z$  – определяемый прогиб,  $y_0$  – прогиб в начале координат,  $\theta_0$  – угол поворота сечения в начале координат,  $z$  – расстояние от начала до точки, где определяется прогиб,  $a_i$  – расстояние от начала до сечения, в котором приложен изгибающий момент ( $m_i$ ),  $b_i$  – расстояние от начала до сечения, где действует сосредоточенная сила ( $F_i$ ),  $c_i$  – расстояние от начала до начала равномерно распределенной нагрузки ( $q_i$ ).

Также в этих изданиях не приведены рекомендации в каком варианте подставить треугольную нагрузку в уравнение прогибов методом начальных параметров. При использовании студентами формулы (1) в данной редакции, у них сразу возникает вопрос, в какую из двух ( $\sum F_i$ ,  $\sum q_i$ ) составляющих подставить треугольную нагрузку.

Анализ проверки контрольных работ и расчетно-графических работ позволяет сделать вывод о том, что обычно студенты треугольную нагрузку сразу представляет в виде равномерно распределенной нагрузки величиной  $(1/2) \cdot 2q = q$  (первый вариант) рис. 2.

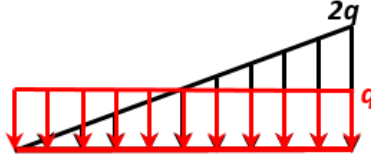


Рис. 2. Треугольная нагрузка, представленная в виде равномерно распределенной нагрузки

Решая данную задачу из рассуждений, указанных выше студент определяет прогиб в точке  $K$ .

$$EI_X \cdot y_K = EI_X \cdot y_0 + EI_X \cdot \theta_0 \cdot z_K - \frac{m(z_K - 0)^2}{2} + \frac{R_A(z_K - 0)^3}{6} - \frac{q(z_K - 0)^4}{24} + \frac{q(z_K - a)^4}{24}. \quad (2)$$

Т.к. выражение (2) имеет два неизвестных  $y_K$  и  $\theta_0$ , то составляется еще одно уравнение прогибов в точке  $B$ .

$$EI_X \cdot y_B = EI_X \cdot y_0 + EI_X \cdot \theta_0 \cdot z_B - \frac{m(z_B - 0)^2}{2} + \frac{R_A(z_B - 0)^3}{6} - \frac{F(z_B - 2a)^3}{6} - \frac{q(z_B - 0)^4}{24} + \frac{q(z_B - a)^4}{24} - \frac{q(z_B - 2a)^4}{24}. \quad (3)$$

Из граничных условий известно, что прогиб в точке  $B$  и в точке  $A$  (в начале координат) равны нулю. Из выражения (3) определяется  $EI_X \cdot \theta_0$ :

$$EI_X \cdot \theta_0 = \frac{\frac{qa^2(3a)^2}{2} - \frac{29}{18} \cdot \frac{qa(3a)^3}{6} + \frac{qa(a)^3}{6} + \frac{q(3a)^4}{24} - \frac{q(2a)^4}{24} + \frac{q(a)^4}{24}}{3a} = \frac{1}{18} \cdot qa^3.$$

Тогда из выражения (2) определяется прогиб в точке  $K$ .

$$y_K = \frac{\frac{1}{18} qa^3 \cdot 2a - \frac{qa^2(2a)^2}{2} + \frac{29}{18} \frac{qa(2a)^3}{6} - \frac{q(2a)^4}{24} + \frac{q(a)^4}{24} + \frac{q(a)^4}{24}}{EI_X} = -0,366 \frac{qa^4}{EI_X}. \quad (4)$$

Знак «минус» указывает на то, что прогиб направлен вниз.

Решим эту же задачу, если студенты треугольную нагрузку представляют в виде сосредоточенной силы  $Q = (1/2) \cdot 2q \cdot a = q \cdot a$



(второй вариант) рис. 3. Сосредоточенная сила  $Q$  приложена в центре тяжести треугольной нагрузки.

$$EI_X \cdot y_K = EI_X \cdot y_0 + EI_X \cdot \theta_0 \cdot z_K - \frac{m(z_K-0)^2}{2} + \frac{R_A(z_K-0)^3}{6} - \frac{qa(z_K-\frac{2}{3}a)^3}{6} \quad (5)$$

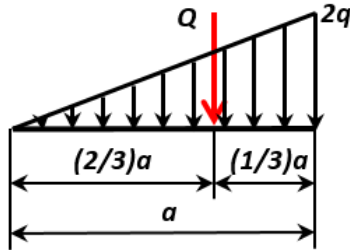


Рис. 3. Треугольная нагрузка, представленная в виде сосредоточенной силы

Так как выражение (5) имеет два неизвестных, то составляется еще одно уравнение прогибов в точке  $B$ .

$$EI_X \cdot y_B = EI_X \cdot y_0 + EI_X \cdot \theta_0 \cdot z_B - \frac{m(z_B-0)^2}{2} + \frac{R_A(z_B-0)^3}{6} - \frac{F(z_B-2a)^3}{6} - \frac{qa(z_B-\frac{2}{3}a)^3}{6} - \frac{q(z_B-2a)^4}{24}. \quad (6)$$

В выражении (6) прогиб в точке  $B$  и в точке  $A$  (в начале координат) равны нулю. Из выражения (6) определяется  $EI_X \cdot \theta_0$ :

$$EI_X \cdot \theta_0 = \frac{\frac{qa^2(3a)^2}{2} - \frac{29}{18} \cdot \frac{qa(3a)^3}{6} + \frac{qa\left(\frac{9a-2a}{3}\right)^3}{6} + \frac{qa(a)^3}{6} + \frac{q(a)^4}{24}}{3a} = -0,141qa^3.$$

Тогда из выражения (5) определяется прогиб в точке  $K$ .

$$y_K = \frac{-0,141 \cdot qa^3 \cdot 2a - \frac{qa^2(2a)^2}{2} + \frac{29}{18} \cdot \frac{qa(2a)^3}{6} - \frac{qa\left(\frac{4}{3}a\right)^3}{6}}{EI_X} = -0,529 \frac{qa^4}{EI_X}.$$

При решении данной задачи двумя вариантами представления треугольной нагрузки получаются разные значения прогибов. Возникает вопрос, какой из двух вариантов, решенных студентами, правильный?

Для того чтобы ответить на этот вопрос определим прогиб в точке  $K$ , используя интеграл Мора (рис. 1).

Для этого вначале определим ординату треугольной нагрузки  $q_I$  в сечении  $I$  исходя из подобия треугольников  $ACD$  и  $ALM$  (рис. 1).

$$\frac{2q}{a} = \frac{q_I}{z_1}; \Rightarrow q_I = \frac{2q}{a} \cdot z_1.$$

Тогда, используя интеграл Мора определим прогиб в точке  $K$ .

$$\begin{aligned} y_K = & \frac{1}{EI_X} \left[ \int_0^a -m \cdot \frac{1}{3} \cdot z_1 \cdot dz_1 + \int_0^a R_A \cdot z_1 \cdot \frac{1}{3} z_1 \cdot dz_1 \right. \\ & + \int_0^a -\frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{a} z_1 \cdot z_1 \cdot \frac{1}{3} z_1 \cdot \frac{1}{3} z_1 dz_1 + \\ & + \int_0^a -m \cdot \frac{1}{3} (a + z_2) \cdot dz_2 + \int_0^a R_A \cdot (a + z_2) \cdot \frac{1}{3} (a + z_2) \cdot dz_2 + \\ & + \int_0^a -\frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{a} a \left( \frac{1}{3} a + z_2 \right) \cdot \frac{1}{3} (a + z_2) dz_2 + \int_0^a R_B \cdot z_3 \cdot \frac{2}{3} z_3 \cdot dz_3 \\ & \left. + \int_0^a -\frac{qz_3^2}{2} \cdot \frac{2}{3} z_3 \cdot dz_3 \right] = 0,524 \cdot \frac{qa^4}{EI_X}. \end{aligned}$$

Знак «плюс» указывает на то, что направление прогиба совпадает с направлением единичной силы, т.е. вниз.

Относительная погрешность вычислений первого варианта по сравнению расчета, с использованием интеграла Мора составляет

$$\Delta = \frac{0,524 - 0,366}{0,366} \cdot 100\% = 43,17\%.$$

Погрешность вычислений составляет больше 5%, что недопустимо.

Относительная погрешность вычислений второго варианта по сравнению расчета с использованием интеграла Мора составляет

$$\Delta = \frac{0,529 - 0,524}{0,524} \cdot 100\% = 0,95\%.$$

Погрешности, связанные с округлением значений прогибов малы. Значит, задача по второму варианту решена правильно.

Подобные неточности (ошибки), совершаемые студентами в решении задач данного типа, связаны с тем, что не во всех учебных пособиях присутствуют рекомендации и примеры решения при действии треугольной нагрузки.

**Список литературы:**

1. Кирсанова Э.Г. Сопротивление материалов: учеб. пособ. / Э.Г. Кирсанова. – Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2012. – 110 с. – 978-5-904000-57-8 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/733.html>\_(дата обращения: 06.06. 2019)

2. Сопротивление материалов: учеб. пособ. / сост. Ю.С. Бахрачева. – Волгоград: Волгоградский институт бизнеса, Вузовское образование, 2009. – 170 с. – 2227-8397 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/11346.html> (дата обращения: 06.06.2019).

3. Сопротивление материалов: учеб. пособ. / Н.М. Атаров, П.С. Вардамян, Д.А. Горшков [и др.]. – Ч. 2. – М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2010. – 80 с. – 5-7264-0484-X [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/19269.html> (дата обращения: 06.06.2019).

4. Подскребко М.Д. Сопротивление материалов: практикум по решению задач. Учебное пособие / М.Д. Подскребко. – Минск: Вышэйшая школа, 2009. – 688 с. – 978-985-06-1458-2. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20139.html> (дата обращения: 06.06.2019).

5. Агаханов М.К. Сопротивление материалов: учеб. пособ. / М.К. Агаханов, В.Г. Богопольский. – М.: Московский государственный строительный университет; Ай Пи Эр Медиа; ЭБС АСВ, 2016. – 268 с. – 978-5-7264-1252-8 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/42912.html> (дата обращения: 06.06.2019).

6. Атапин В.Г. Практикум по сопротивлению материалов: учеб. пособ. / В.Г. Атапин. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2012. – 216 с. – 978-5-7782-1889-5 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45426.html> (дата обращения: 06.06.2019).

7. Атапин В.Г. Сопротивление материалов. Базовый курс. Дополнительные главы: учебник / В.Г. Атапин, А.Н. Пель, А.И. Темников. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 507 с. – 978-5-7782-1750-8 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45435.html> (дата обращения: 06.06.2019).

8. Подгорный А.С. Сопротивление материалов: методические рекомендации по выполнению расчетно-проектировочных работ / А.С. Подгорный. – М.: Московская государственная академия водного транспорта, 2009. – 59 с. – 2227-8397 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47955.html> (дата обращения: 06.06.2019).

9. Межецкий Г.Д. Сопротивление материалов: учебник / Г.Д. Межецкий, Г.Г. Загребин, Н.Н. Решетник; под ред. Г.Д. Межецкий, Г.Г. Загребин. – М.: Дашков и К, 2016. – 432 с. – 978-5-394-02628-7 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/60621.html> (дата обращения: 06.06.2019).

10. Калиновская Т.Г. Сопротивление материалов: учеб. пособ. / Т.Г. Калиновская, Н.А. Дроздова, А.Т. Рябова-Найдан. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2016. – 164 с. – 978-5-7638-3580-9 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/84132.html> (дата обращения: 06.06.2019).

11. Иванычев Д.А. Сопротивление материалов: учеб. пособ. / Д.А. Иванычев, О.П. Бузина. – Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. – 90 с. – 2227-8397 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/83176.html> (дата обращения: 06.06.2019).

12. Валишвили Н.В. Сопротивление материалов и конструкций: учебник для академического бакалавриата / Н.В. Валишвили, С.С. Гаврюшин. – М.: Юрайт, 2019. – 429 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/viewer/soprotivlenie-materialov-i-konstrukciy-433489#page/2> (дата обращения: 06.06.2019).

### Раздел 3. Механика сплошных сред в образовании

---

13. Атапин В.Г. Сопротивление материалов. Практикум: учеб. пособ. для академического бакалавриата / В.Г. Атапин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2019. – 218 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/viewer/soprotivlenie-materialov-praktikum-438000#page/2> (дата обращения: 06.06.2019).

14. Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С.Н. Кривошапко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2019. – 397 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/viewer/soprotivlenie-materialov-431926#page/2> (дата обращения: 06.06.2019).

15. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов с использованием вычислительных комплексов: учеб. пособие для академического бакалавриата / Е.Г. Макаров. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2019. – 413 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/viewer/soprotivlenie-materialov-s-ispolzovaniem-vychislitelnyh-kompleksov-438313#page/2>

16. Асадулина Е.Ю. Сопротивление материалов: учеб. пособ. для вузов / Е.Ю. Асадулина. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2019. – 279 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/viewer/soprotivlenie-materialov-438068#page/2> (дата обращения: 06.06.2019).

17. Атапин В.Г. Сопротивление материалов: учебник и практикум. для академического бакалавриата / В.Г. Атапин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2019. – 342 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/viewer/soprotivlenie-materialov-433217#page/2> (дата обращения: 06.06.2019).

18. Александров А.В. Сопротивление материалов: учебник и практикум для академического бакалавриата / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. – 9-е изд., перераб. и доп. – В 2 ч. Ч. 1. – М.: Юрайт, 2019. – 293 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/viewer/soprotivlenie-materialov-v-2-ch-chast-1-444948#page/2>(дата обращения: 06.06.2019).

Петров Михаил Васильевич, д-р техн. наук, профессор, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», пр-т Московский, 15, г Чебоксары, 428015, Россия, e-mail: 21pmv@mail.ru

Михайлов Борис Васильевич, канд. техн. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», пр-т Московский, 15, г Чебоксары, 428015, Россия, e-mail: boris.mihaylov.63@mail.ru

Гоник Екатерина Григорьевна, старший преподаватель кафедры строительных конструкций, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», пр-т Московский, 15, г Чебоксары, 428015, Россия, e-mail: katya.gonik@mail.ru

Аринина Надежда Николаевна, старший преподаватель кафедры строительных конструкций, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», пр-т Мос-

ковский, 15, г Чебоксары, 428015, Россия, e-mail: mirontik@mail.ru

Яковлева Ольга Станиславовна, старший преподаватель кафедры строительных конструкций, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», пр-т Московский, 15, г Чебоксары, 428015, Россия, e-mail: konstryktor9@yandex.ru

*Petrov Mikhail Vasilievich, Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: 21pmv@mail.ru*

*Mikhailov Boris Vasilievich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: boris.mihaylov.63@mail.ru*

*Gonik Ekaterina Grigoryevna, senior lecturer of the «Chuvash State University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: kattya.gonik@mail.ru*

*Arinina Nadezhda Nikolaevna, senior lecturer of the «Chuvash State University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: mirontik@mail.ru*

*Yakovleva Olga Stanislavovna, senior lecturer of the «Chuvash State University named I.N. Ulyanov», Cheboksary, Russia, e-mail: konstryktor9@yandex.ru*

Для цитирования:

Петров М.В. Анализ расчетов прогибов элементов конструкций методом начальных параметров / М.В. Петров, Б.В. Михайлов, Е.Г. Гоник [и др.] // Современные вопросы механики сплошных сред – 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием. Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 180–188.

Citation:

Petrov M.V. Analysis of calculations of deflections of structural elements by the method of initial parameters / M.V. Petrov, B.V. Mikhailov, E.G. Gonik [et al.] // Modern problems of continuum mechanics–2019: a Collection of articles on materials of the conference with international participation». – Cheboksary: Sreda Publishing House LLC, 2019. – P. 180–188.

Для заметок

Для заметок

Для заметок



*Научное издание*

**СОВРЕМЕННЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ  
СПЛОШНЫХ СРЕД – 2019**

Сборник статей по материалам конференции  
с международным участием

Чебоксары, 7 июня 2019 г.

Редактор *М.В. Петров*  
Компьютерная верстка и правка *Е.В. Кузнецова*  
Дизайн обложки *Н.В. Фирсова*

Подписано в печать 20.12.2019 г.

Дата выхода издания в свет 30.12.2019 г.

Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 11,16. Заказ К-574. Тираж 500 экз.

Издательский дом «Среда»  
428005, Чебоксары, Гражданская, 75, оф. 12  
+7 (8352) 655-731  
info@phsreda.com  
https://phsreda.com

Отпечатано в Студии печати «Максимум»  
428005, Чебоксары, Гражданская, 75  
+7 (8352) 655-047  
info@maksimum21.ru  
www.maksimum21.ru