

Л. Н. Снигирева



**Формирование познавательных универсальных учебных действий при установлении межпредметных связей математики и физики в условиях реализации образовательной программы среднего общего образования**

**Л.Н. Снигирева**

**ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ  
УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ  
ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ  
МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ  
СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Монография

Чебоксары  
Издательский дом «Среда»  
2020

УДК 373.5  
ББК 74.202  
С53

**Рецензенты:**

заместитель директора по УВР высшей категории,  
учитель физики и математики высшей категории,  
почетный работник общего образования Российской Федерации

*Мануфричева Наталья Владимировна;*

д-р социол., профессор кафедры философии и социологии  
ФГБОУ ВО «Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники»

*Орлова Вера Вениаминовна*

**Снигирева Л. Н.**

**С53 Формирование познавательных универсальных учебных действий при установлении межпредметных связей математики и физики в условиях реализации образовательной программы среднего общего образования : монография / Л. Н. Снигирева. – Чебоксары: ИД «Среда», 2020. – 104 с.**

**ISBN 978-5-907313-66-8**

В монографии описаны результаты анализа метапредметного подхода в обучении как условия развития познавательных универсальных учебных действий на уроках математики в 10–11 классах. Основное внимание автора обращено на содержание межпредметных связей математики и физики как основы формирования единой картины мира учащихся. В качестве рекомендаций автором приведена технология использования на уроках учебных карт действий в процессе решения типовых заданий физического содержания. В рамках системно-деятельностного подхода разработана методика изучения учебного модуля по теме «Тригонометрические тождества и функции», развиваемого на основе реальных задач из курса физики, включающего методику работы учителя с учащимися на уроках. Выводы исследования свидетельствуют о необходимости совершенствования системы образования и информационно-аналитического обеспечения в процессе реализации федеральных образовательных стандартов в части необходимости формирования метапредметных компетенций.

DOI 10.31483/a-209

ISBN 978-5-907313-66-8

© Снигирева Л. Н., 2020

© ИД «Среда», оформление, 2020

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	4
<b>ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ КУРСОВ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ 10–11 КЛАССОВ</b> .....	6
1.1. Межпредметные связи математики и физики 10–11 классов....	6
1.2. Метапредметность в обучении: организация учебно- познавательной деятельности учащихся средствами составления учебных карт действий .....	16
<b>ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД В ПРОЦЕССЕ МЕТАПРЕДМЕТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ</b> .....	25
2.1. Методика формирования познавательных универсальных учебных действий учащихся в контексте метапредметной деятельности.....	25
2.2. Реализация методических принципов метапредметности на примере учебного модуля «Тригонометрические тождества и функции», развиваемого на основе реальных задач из курса физики .....	30
<b>Заключение</b> .....	98
<b>Список литературы</b> .....	100

## Введение

В наши дни очевидной необходимостью является непрерывное образование, что требует полноценной базовой общеобразовательной подготовки. Существенную роль в концептуальной направленности школьного образования играет сформированная у человека научная картина мира. Важность этого момента была осознана, в частности, авторами ФГОС, которые наряду с предметными результатами обучения включили также личностные и метапредметные результаты, имеющие отношение непосредственно к формированию единой картины мира учащихся [26]. К метапредметным образовательным результатам относятся универсальные учебные действия (УУД): познавательные, коммуникативные, регулятивные. Овладение школьником УУД необходимо не только для успешного достижения предметных результатов, но и для решения проблем в реальных жизненных ситуациях.

В силу своего богатого общекультурного потенциала и развивающего характера, соответствия целям современного математического образования, познавательные универсальные учебные действия стали объектом пристального изучения многих математиков и методистов. В работах автора Л.И. Боженковой [4] предлагаются конкретный материал и рекомендации по формированию отдельных видов УУД на уроках математики. В работах В.В. Краевского, А.В. Хуторского приведены основные положения теории метапредметного подхода в обучении. Практическим основанием послужило внедрение «новых методик» в преподавании физики Д.А. Ивашкиной [10]. В предлагаемом курсе показано, как учащиеся под руководством учителя могут овладеть познавательными УУД с помощью созданной учителем метапредметной деятельности на уроках физики. Причём эта деятельность спланирована как в рабочей программе по физике для 7–9 классов, так и непосредственно в планировании урока нового вида – «метапредметного».

Однако пока не удаётся найти подходы к выстраиванию педагогически обоснованной системы овладения универсальными учебными действиями в межпредметных и по уровням образования связях. Кроме того, в основных результатах международного исследования образовательных достижений учащихся указывается на низкое качество понимания решения количественных задач в естественно-научной области [19]. Следовательно, необходимо найти более разнообразные пути обучения учащихся в направлении компетентности в решении проблем, т.е. способности использовать познавательные умения для решения межпредметных реальных проблем.

Исходя из задач Концепции развития математического образования в Российской Федерации [14], соответственно выделяются три направления требований к результатам изучения математики:

- 1) практико-ориентированное направление (математика для жизни);
- 2) математика для использования в профессии, не связанных с математикой (элементы типовых заданий для базового уровня);
- 3) творческое направление, на которое нацелены те обучающиеся, которые планируют заниматься творческой и исследовательской работой в области математики и физики и других областях.

Методологические идеи новых образовательных стандартов позволяют предположить, что именно формирование познавательных универсальных учебных действий (УУД) на уроках математики может создать почву для получения в дальнейшем качественного политехнического образования на уровне познавательного интереса. Поэтому, в связи с изменившимися требованиями к осуществлению образовательного процесса в средней школе к образовательным результатам выпускников школы, возникла острая необходимость разработки теоретических основ и методики обучения математическим дисциплинам учащихся старших классов в условиях преемственности между школой и вузом.

Таким образом, возникшее противоречие между состоянием традиционной методики и необходимостью поиска новых путей совершенствования изучения математики определило актуальность нашего исследования. Необходимость разрешения этого противоречия обусловило наше обращение к метапредметной деятельности в обучении, а применение на уроках межпредметных связей математики и физики способствует повышению качества усваиваемых учащимися знаний по изучаемому предмету без потери его познавательной ценности и при меньшем потреблении временных ресурсов. Она позволяет учителю представить учебный курс в виде системы уроков «Мини-проектов», взаимосвязанных по этапам процесса обучения. Учащиеся знакомятся с целями учебных занятий по новой теме, структурой программы учебного модуля, датой зачета заранее, с целью пропедевтики изучения нового материала, тем самым планируют предстоящую деятельность. Следовательно, для учащихся метапредметная деятельность – стимул самообразования, так как позволяет им видеть изучаемую тему целостно в собственных целевых действиях и самостоятельно организовывать учебно-познавательную деятельность в соответствии со своими возможностями.

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ КУРСОВ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ 10–11 КЛАССОВ

## 1.1. Межпредметные связи математики и физики 10–11 классов

В последние годы большое внимание уделяется межпредметным связям на уровне межнаучных обобщений или обобщений на уровне общенаучных методологических принципов, таких, как принцип соответствия, дополнительности, причинности, симметрии. Реализация межпредметных связей именно на этом уровне способствует выработке у учащихся представлений о единстве материального мира и научного знания о нем, позволяет использовать современную научную методологию для решения различных проблем.

Одной из причин фрагментарности знаний становится разобщённость предметов и отсутствие межпредметной связи. Именно поэтому, решающим условием повышения эффективности учебного процесса и совершенствования качества знаний учащихся является установление и реализация межпредметных связей в процессе преподавания учебных предметов, в частности математики и физики.

Часто в литературе *межпредметные связи* понимают как условие и средство повышения научного уровня знаний учащихся, повышения роли обучения в формировании их научного мировоззрения, в развитии их мышления, творческих способностей, оптимизации процесса усвоения знаний и в конечном итоге – как условие и средство совершенствования всего учебного процесса [11].

Взаимосвязь учебных предметов физики и математики отражает взаимосвязь наук физики и математики, которая определяется наличием у них общей предметной области. Взаимосвязь этих наук выражается во взаимосвязи их идей и методов, которую можно условно разделить на три вида:

1) физика ставит задачи и создает необходимые для их решения математические методы, которые в дальнейшем служат базой для развития математической теории (теория дифференциального исчисления Ньютона для решения задачи о движении тел);

2) развитая математическая теория используется для анализа физических явлений, что часто приводит к созданию новой физической теории (теория электромагнитного поля Максвелла), которая в свою очередь приводит к развитию физической картины мира (в данном примере – электродинамической) и к возникновению новых физических проблем (специальная теория относительности);

3) физическая теория в своем развитии опирается на математический аппарат, который развивается и совершенствуется по мере его использования в физике (общая теория относительности и тензорный анализ, квантовая механика и матричное исчисление, элементарные частицы и теория групп).

Прежде всего, при обучении физики происходит закрепление математических знаний. Так, в 10 классе производная используется при рассмотрении некоторых вопросов электродинамики. Но особенно широко математика используется в курсе физики 11 класса. Это выражается в систематическом применении производной при изучении колебаний, использовании и закреплении свойств тригонометрических и показательной функций, использовании интегрирования при решении задач (радиоактивный распад, поглощение излучений, и т.п.). Это не простое применение математики, а развитие и конкретизация её идей и методов на широком естественнонаучном материале. Кроме того, при изучении физики происходит формирование и развитие ряда математических предметных УУД как в технике вычислений, так и в области графических и аналитических умений.

С другой стороны, изучение физики нередко ставит определённые задачи перед математикой в сфере формирования ряда физических понятий: скорость, сила, работа, мощность и т.п., которые являются исходными для формирования таких общих математических понятий, как «вектор», «производная», «интеграл» и др. В связи с этим при изучении математики и физики в 10–11 классах особенно ценным является использование учащимися элементов математического анализа.

Рассмотрим конкретно, как реализовать, на практике межпредметные связи алгебры и начал анализа и физики в 10–11 классах. Эти направления связей физики и математики отражаются в обучении, и связи носят двусторонний характер. В таблице 1 при анализе ПОО СОО 2016 года содержания программ указанных учебных

предметов, показана реализация межпредметных связей физики и математики в 10–11 классах углубленный уровень [21]. Проблема межпредметных связей получает новое решение в условиях деятельностного подхода в обучении. Это объясняется тем, что связи физики с профильными предметами могут быть реализованы и в иных, отличных от традиционных формах, на более высоком уровне развития познавательного интереса учащихся к наукам.

Под познавательными действиями понимают такие, которые обеспечивают *познание* – умственный творческий процесс получения и постоянного обновления знаний, необходимых человеку. В психологии познание обозначает способность к умственному восприятию и переработке внешней информации, результатом процесса познавательных действий [3]. В соответствии с деятельностным подходом, действие представляет перечень операций, специально организованных для решения задач определённого типа разной степени обобщённости. В соответствии с программой формирования УУД, к *познавательным действиям относятся*: общеучебные, логические учебные действия и постановка и решение проблем. Их функция – обеспечение успешности усвоения знаний, умений и навыков. Рассмотрим схему взаимодействия познавательных учебных действий (см. рис. 1). Взаимосвязь между ПЛД, ПОД и специальными учебными действиями устанавливается посредством учебных моделей, являющихся результатом преобразования учебной информации школьного курса математики и физики.

Таблица 1

Анализ содержания межпредметных тем курса математики  
и физики 10–11 классов

Возможности использования математики на уроках физики	Содержание тем курса физики 10–11 класс	Содержание курса тем по математике 10–11 класс	Возможности использования физики на уроках математики
<p>Действия над действительными числами. Вычисления значений функции по заданной формуле и при помощи таблиц. Стандартный вид числа</p>	<p><b>Молекулярная физика.</b> 1. Основы молекулярно-кинетической теории</p>	<p>Действительные числа. Числовые функции</p>	<p>Понятие о величине и измерении. Массы молекул и атомов. Определение расстояний до небесных тел на основе измерения параллакса. Число Авогадро. Ошибки при измерении, точность. Правила вычисления погрешности при решении задач и выполнении лабораторных работ. Графики тепловых процессов и деформации, как иллюстрации функциональных зависимостей</p>
<p>Графики функции. Аналитическое задание функций. Приращение функции. Стандартный вид числа</p>	<p>2. Тепловые явления. Первый закон термодинамики. 3. Свойства паров, жидкостей и твёрдых тел</p>	<p>Предел и непрерывность</p>	<p>Графики тепловых процессов</p>

1	2	3	4
<p>Приращение функции. Функциональные зависимости. Стандартный вид числа. Задания функций аналитическими формулами и графиками. Исследование функций. Производная (для анализа характеристик кулоновского поля – напряжённости и потенциала, для определения электроёмкости). Сложение и разложение векторов для описания электрического поля</p>	<p><b>Электродинамика</b> 1. Электрическое поле. 2. Постоянный электрический ток</p>	<p>Производная и её применения</p>	<p>Определение мгновенных значений скорости, ускорения и мощности. Связь между напряжённостью и разностью потенциалов, выражение коэффициента поверхностного натяжения через поверхностную энергию. Физические задачи на нахождение экстремума функции. Понятие о величине и измерении (электроёмкость, напряжённость и др.)</p>
<p>Векторы и действия над ними. Производная (для записи закона индукции Фарадея и формулы ЭДС самоиндукции). Приближённое равенство <math>\sin \alpha \approx \alpha</math> (при малых значениях <math>\alpha</math> при решении задач)</p>	<p>3. Магнитное поле тока. 4. Электромагнитная индукция. Лабораторные работы</p>	<p>Тригонометрические функции, их графики и производные</p>	<p>Угловые измерения. Правила вычисления погрешностей при решении задач и выполнении лабораторных работ</p>

## Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
<p>Тождественные преобразования тригонометрических выражений, а также решение тригонометрических уравнений и неравенств. Графики функций синуса и косинуса, производные тригонометрических функций. Уравнения гармонических колебаний <math>y = A \cos(\omega x + \varphi)</math> и дифференциальное уравнение <math>y'' = -\omega^2 y</math>. Тригонометрические функции числового аргумента и их производные</p>	<p><b>Колебания и волны.</b>            1. Механические колебания.            2. Электромагнитные колебания. Переменный ток.            3. Производство, передача и использование электрической энергии            4. Механические волны.            Звук</p>	<p>Тригонометрические функции их графики и производные</p>	<p>Уравнение движения математического маятника. Гармонические колебания; свободные гармонические колебания: смещение, амплитуда, фаза, частота и период свободных колебаний. Период свободных электромагнитных колебаний</p>
<p>Тригонометрические функции. Приращение функции. Тождественные преобразования тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений и неравенств. Стандартный вид числа</p>	<p>5. Электромагнитные волны</p>	<p>Первообразная и интеграл</p>	<p>Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Работа переменной силы. Работа при изотермическом расширении газа. Энергия заряженного конденсатора и магнитного поля соленоида. Нахождение координаты по заданной скорости и скорости по заданному ускорению</p>

1	2	3	4
Тригонометрические функции. Приращение функции. Тождественные преобразования тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений и неравенств. Стандартный вид числа	<b>Оптика.</b> 1. Геометрическая оптика. 2. Световые волны. 3. Элементы теории относительности. 4. Излучение и спектры	Показательная, логарифмическая и степенная функции	Закон радиоактивного распада, период полураспада
Знания о показательной функции, дифференциальных уравнениях при изучении закона радиоактивного распада и периода полураспада (дифференциальное уравнение показательного роста $y' = -Cy$ )	<b>Квантовая физика.</b> 1. Световые кванты. Действие света. 2. Физика атома. 3. Атомное ядро	Системы уравнений	Разветвлённые цепи электрического тока. Кристаллические структуры.
	4. Ядерная энергия, её получение и использование. 5. Элементарные частицы. Обобщающие лекции.	Решение задач и повторение	Решение задач с физическим содержанием

Вследствие этого возрастает роль межпредметной интеграции как средства развития интеллектуальных творческих способностей учащихся. Кроме того, для успешной интеграции в социум и адаптации в нём выпускнику современной школы необходимы практико-ориентированные задания [22]. Одним из путей реализации модели «Интегрирование учебных дисциплин» (*Модели интегральных образовательных технологий по Г.К. Селевко*) [24], заключается в объединении предметных тем математики и физики, может являться исследовательская или проектная деятельность.

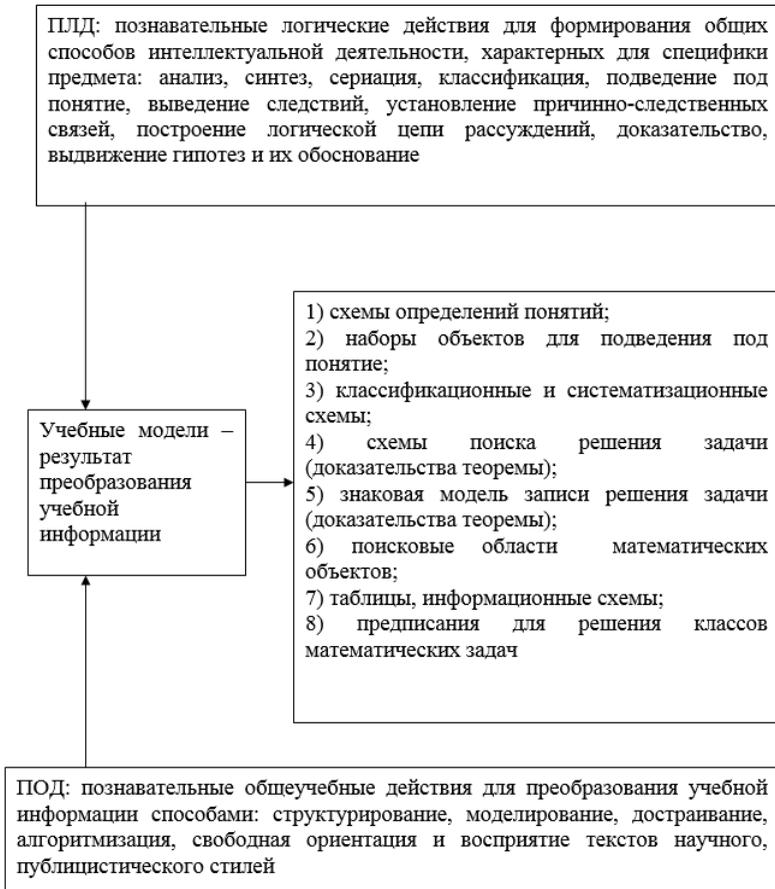


Рис. 1. Схема взаимосвязи познавательных учебных действий

Модель межпредметных связей, рассмотренных выше, даёт возможность согласовать темы уроков математики с темами уроков «Мини-исследований» или «Мини-проектов», что обусловлено содержанием наук и дидактическими целями. Проектные технологии в этом случае могут использоваться непосредственно на уроке математике в виде краткосрочных проектов, направленных на обучение школьников методом исследовательской деятельности, открытие новых фактов, установление взаимосвязи между дисциплинами [22]. Отличительной особенностью такой проектной деятельности является то, что учитель контролирует процесс разработки

проекта, более активно участвует в его создании. Это связано с тем, что время на уроке (или нескольких уроках) строго ограничено, а базовый материал должен быть усвоен каждым учащимся. Здесь присутствует определённая сложность применения метода проектов непосредственно на уроке математики. Однако при умелой организации процесса создания проекта и правильно выбранном его продукте этот метод достаточно эффективен, так как позволяет создать условия для формирования у учащихся навыков выделения проблемы, поиска способов её решения, добычи информации (это может быть учебник, дополнительные материалы; доступ к школьной электронной библиотеке, если урок проходит в компьютерном классе и т.п.), её обобщения, представление выводов в виде некоторого конечного продукта.

Таким образом, можно выстроить педагогически обоснованную систему овладения ПУУД в межпредметных связях при выполнении *типовых заданий* физического содержания. Умения, формируемые при выполнении определённых заданий, связаны с усвоением (открытием, преобразованием и применением) учебной информации школьного курса математики и с планируемыми результатами обучения математике. Такие задания относят к типовым заданиям (табл. 2).

Таблица 2

## Типовые задания и соответствующие им познавательные УУД

Названия типового задания	Познавательные УУД, необходимые для выполнения задания	
	логические	общеучебные
1. Составить схему определения понятия	анализ, сравнение, обобщение	структурирование информации
2. Составить набор объектов для подведения под понятие	анализ, синтез, сравнение, подведение под понятие	доставление информации
3. Составить схему взаимосвязи понятий	анализ, синтез, сравнение	структурирование информации
4. Составить предписание, выражающее общий метод решения задач определённого типа	анализ, синтез, сравнение, обобщение	структурирование информации, доставление, алгоритмизация

## Окончание таблицы 2

Названия типового задания	Познавательные УУД, необходимые для выполнения задания	
	логические	общеучебные
5. Составить информационную схему	анализ, синтез, сравнение, обобщение	структурирование, достраивание информации
6. Составить схему поиска решения задачи	анализ, синтез, выделение следствий	достраивание информации, моделирование

Поясняя последнее в анализе таблиц 1 и 2, можно увидеть, что универсальные учебные действия (УУД) тесно связаны с достижением *метапредметных результатов*, то есть таких способов действий, когда учащиеся могут принимать решения не только в рамках заданного учебного процесса, но и в различных жизненных ситуациях. Большая педагогическая эффективность межпредметных связей позволяет использовать их в качестве учебных задач, при организации формирования учебного действия «постановка и решение проблем», а само их использование в учебном процессе расценивать как проявление реализации новых требований ФГОС к результатам образовательной деятельности.

С помощью типовых заданий физического содержания возможно осуществление контроля сформированности логических и общеучебных познавательных УУД, направленных на освоение математики. При этом, в рамках уровневой дифференциации, организуя учебно-познавательную деятельность (УПД) учащихся, осуществлять контроль регулятивных УУД.

## 1.2. Метапредметность в обучении: организация учебно-познавательной деятельности учащихся средствами составления учебных карт действий

Выполняя типовые задания, учащиеся усваивают математику в процессе активной, самостоятельной интеллектуальной деятельности под руководством учителя, что соответствует системно-деятельностному подходу в обучении. Для выполнения типовых заданий учителю и ученику необходимы определённые метапредметные знания (знания о знаниях) и метапредметные умения – сформированные УУД. ФГОС определяет метапредметность как универсальные учебные действия (УУД) и умения [26].

Само понятие метапредметности и производные от него термины (метапредметный подход, метапредмет, принцип метапредметности и т.п.) начали активно использоваться применительно к образовательной деятельности в конце 1990-х – начале 2000-х годов. В работах В.В. Краевского, А.В. Хуторского приведены основные положения теории метапредметного подхода в обучении [28]. *Метапредметный подход* – организация деятельности учащихся с целью передачи им способов работы со знанием. Метапредметный подход подразумевает промысливание (а не запоминание!) важнейших понятий учебного предмета, наличие образовательной деятельности, формирование и развитие у учащихся предметных базовых способностей, использование способа переоткрывания знания на разном учебном материале (т. е. повторение научного открытия в учебном процессе), наличие рефлексивной деятельности. *Метапредметные результаты* – освоенные обучающимися на базе нескольких или всех учебных предметов обобщенные способы деятельности (например, сравнение, схематизация, умозаключение, наблюдение, формулирование вопроса, выдвижение гипотезы, моделирование и т. д.), применимые как в рамках образовательного процесса, так и в реальных жизненных ситуациях. *Метапредметная деятельность* – деятельность за пределами учебного предмета; она направлена на обучение обобщенным способам работы с любым предметным понятием, схемой, моделью и т. д. и связана с жизненными ситуациями.

Средством формирования метапредметных результатов учащихся средней школы является метапредметная деятельность в преподавании математики, что дает возможность развивать мышления у всех учеников на примере возможности использования

межпредметных связей на уроках математики при решении задач физического содержания.

Так, внедрение метапредметного подхода в школьное образование является острой необходимостью, т. к. традиционные средства и методы педагогической деятельности не соответствуют современным реалиям, уровню развития технического прогресса. Метапредметный подход в обучении предлагает такую реорганизацию образования, когда ученик воспринимает знания не как сведения для запоминания, а как знания, которые он осмысливает и может применить в жизни. Используя такой подход, школа способна сформировать у ребёнка представление о дисциплине, как о системе знаний о мире, выраженном в числах (математика), телах (физика), веществах (химия) и т. д. Здесь важна ориентация на результат обучения, и в качестве такового результата понимается, во-первых, способность применить полученные знания и умения, а во-вторых, мотивированность получения этих знаний и умений.

Реализация межпредметных связей формирует у учащихся метапредметные умения, основным звеном которых являются познавательные универсальные учебные действия. Именно их сформированность у учащихся, в большей степени, раскрывает смысл образующей единой картины мира.

С каждым из элементов научного знания связаны два вида деятельности учащихся, в которых данный элемент знания является опорным: это деятельность по *созданию* данного элемента знания и деятельность по его *применению*. Чтобы обучить определённому виду деятельности, необходимы следующие шаги:

1) выполнять деятельность вместе с учениками, следуя схеме деятельности (ученики со схемой пока не знакомы);

2) обобщив опыт выполнения деятельности, побудить учащихся к составлению общей схемы деятельности (россыпь фраз распределить по смыслу познавательных задач);

3) создать у учеников мотивацию на усвоение данного вида деятельности;

4) создать систему упражнений (или запланировать систему уроков) для выполнения учениками данной деятельности;

5) организовать поэтапное усвоение учащимися данной деятельности;

6) провести контроль усвоения данной деятельности.

Усвоение некоторых видов деятельности можно организовать в пределах одного урока, включая контроль усвоения. Организация

усвоения видов деятельности, связанных с научным методом познания, имеет свои особенности. Ориентировочная основа действия должна быть составлена самим учеником. При этом опять выделяются все ориентировочные знания, которые необходимы для выполнения деятельности. Деятельность выполняется учителем или учащимися с помощью учителя. Затем, обобщив свой опыт, учащиеся с помощью учителя составляют обобщённую схему деятельности, учатся её конкретизировать и применять в ходе своей дальнейшей деятельности.

Рассмотренные выше этапы организации работы по формированию отдельных видов познавательных УУД были очень похожи. И это не случайно – они отражают общечеловеческий способ получения научного знания, давно замеченный и сформулированный создателями научного метода познания Галилео Галилеем (1564–1642) и Френсисом Бэконом (1561–1626).

«Этот метод состоит в следующем:

- 1) обнаружение проблемы;
- 2) выдвижение обоснованной догадки-гипотезы о предположительном решении поставленной проблемы;
- 3) вывод из гипотезы предсказательных следствий;
- 4) экспериментальная проверка предсказательных следствий;
- 5) формулировка обобщения, которое объединяет три главные составные части: гипотезу, предсказательный вывод из гипотезы и результата экспериментальной проверки» [10, с. 86].

Сравним элементы любой схемы по организации деятельности учащихся на уроках математики: ИС (исходная ситуация) – формулирование ПЗ (познавательная задача) – выдвижение гипотез для их решения – эксперимент (идея, моделирование, установка, результаты, проверка и т. д.). Это наводит на мысль, что возможно организовать обучение исследовательским навыкам на основе эксперимента (эмпирическим путём) по обобщённому плану действий (схеме).

Для урока, на котором проводится обобщение данного вида деятельности и составление обобщённой схемы, необходимы специально подготовленные дидактические материалы. Во-первых, это схемы (таблицы) деятельности в конкретных ситуациях, выполнявшиеся учащимися на уроках предварительного этапа освоения деятельности. Во-вторых, поскольку процесс формулирования обобщённых шагов

схемы достаточно труден, учащиеся должны получить «подсказки» – россыпь фраз с названием этих шагов. Такая россыпь готовится для каждого ученика и помещается в конверт. Другой вариант – выдать учащимся распечатанную в произвольном порядке россыпь фраз с заданием сделать дома и принести её на урок.

Познавательный интерес лежит в основе позитивного отношения к жизни вообще и к учёбе в частности. Благодаря чему ПУУД особо эффективно развиваются, когда организация процесса усвоения этих схем (таблиц деятельности) способствует строгому и систематическому изложению материала и даёт учащимся не только необходимые навыки, но и ясные методологические представления.

Акцент делается не на получение отвлеченных от жизни знаний, а на необходимости познания окружающего мира, подготовке ребенка к различным жизненным ситуациям, на отработке умения находить полезную информацию и применять ее в реальной жизни. Поэтому идеальный урок – тот, на котором учитель направляет, ненавязчиво корректирует работу учащихся, так что у них создается ощущение, что они ведут урок сами. Исходя из метапредметных целей такого урока, рассмотренных ниже в табл. 3, можно сказать, что обобщённые схемы различных видов деятельности (как по созданию новых знаний, так и по их применению) могут являться основой организации урока «нового вида» – метапредметного. Рассмотрим структуру метапредметного урока по А.В. Хуторскому в таблице 4 [28]. В ней А.В. Хуторской под культурно-историческим аналогом подразумевает достижения человечества в процессе познания мира. «В нынешней системе обучения, – пишет он, – традиционно информация о чужих знаниях предшествует знаниям учеников, добываемым самостоятельно. <...> Культурно-исторические аналоги содержат в себе образцы для сопоставления с ожидаемыми или создаваемыми образовательными продуктами учеников» [27].

Таким же образом проводятся уроки обобщения для других видов деятельности, то есть на специальных уроках в рамках изучаемого курса математики, с учётом положений теории поэтапного формирования. Отметим, что рассмотренные этапы метапредметного урока хорошо «вписываются» в традиционные этапы УПД: мотивационно-ориентационный, операционно-познавательный, рефлексивно-оценочный.

Основные типы уроков остаются прежними, однако есть некоторые изменения. Согласно классификации А.Г. Дусавицкого, составим табл. 3 [8]. В ней сформулируем метапредметные цели каждого типа урока, которые помогут учителю выстраивать современный урок в зависимости от учебно-познавательной деятельности учащихся.

Таблица 3

Классификация уроков по цели организации занятий

Типы уроков	Виды уроков	Цель урока	
		Образовательная	Метапредметная
1. Урок изучения нового учебного материала	1) урок-лекция; 2) урок-беседа; 3) урок выполнения практических работ (поискового типа); 4) урок выполнения теоретических исследований; 5) смешанный урок (сочетание различных видов урока на одном уроке)	Изучение и первичное закрепление новых знаний, расширение понятийной базы учебной дисциплины	Формирование у учащихся способностей к самостоятельному построению новых способов ПУД.
2. Урок закрепления знаний	1) урок решения задач; 2) урок выполнения самостоятельных работ (репродуктивного типа – устных или письменных упражнений); 3) урок-лабораторная работа; 4) урок-экскурсия; 5) семинар; 6) собеседование; 7) консультация	Выработка умений по применению знаний	Формирование у учащихся способностей к самостоятельному выявлению и исправлению своих ошибок

## Продолжение таблицы 3

Типы уроков	Виды уроков	Цель урока	
		Образовательная	Метапредметная
3. Урок комплексного применения знаний	Сюда входят основные виды всех пяти уроков	Выработка умений самостоятельно применять знания в комплексе, в новых условиях	Формирование способностей выбора способов ПУД в конкретной ситуации и их корректировки
4. Урок обобщения и систематизации знаний	Семинар Конференции Круглый стол	Обобщение единичных знаний в систему	Формирование у учащихся способностей к обобщению, структурированию и систематизации предметного содержания изучаемой дисциплины
5. Урок контроля, оценки и коррекции знаний	1) устный опрос (фронтальный, индивидуальный, групповой); 2) письменный опрос (индивидуальный); 3) зачёт; 4) зачётная практическая (лабораторная работа); 5) контрольная работа; 6) коллоквиум; 7) смотр знаний (защита проекта, презентации); 8) смешанный урок	Контроль и самоконтроль уровня усвоения изучаемых понятий и способов деятельности	Формирование у учащихся способностей к осуществлению контрольной функции

Структура метапредметного урока

<p>Этапы урока / действия учащихся в учебной карте</p>	<p>Метапредметные знания (знания, позволяющие сформулировать целостную картину мира)</p>	<p>Метапредметные умения (универсальные учебные умения, методы познания себя и мира)</p>	<p>Критерии оценки (новизна, глубина, степень освоения, креативность, грамотность изложения и др.)</p>	<p>Форма оценки: количественная (баллы, шкалы, отметки); качественная (рецензия учителя, самооценка, рецензия одноклассников, защита)</p>
<p>Этап целе- полагания. Устано- вил:</p>	<p>Понимание учеником того, что постановка цели – неотъемле- мый эле- мент само- стоятель- ного позна- ния мира</p>	<p>Умение грамотно ставить цели: на урок, на тему, на год</p>	<p>Цель, по- ставленная учеником, достижи- мая, прове- ряемая, конкретная</p>	<p>Качественная оценка со стороны учителя, само- оценка учеником своей цели</p>
<p>Этап созда- ния образо- вательной напряжён- ности (по- становки проблемы). ПЗ: Гипо- теза</p>	<p>Вопрос – движущая сила позна- ния. Гра- мотный во- прос – по- ловина от- вета</p>	<p>Умение за- давать во- просы, вы- членять противоре- чия, выде- лять при- чинно- следствен- ные связи, удивляться фактам</p>	<p>Количество и качество заданных ребёнком вопросов</p>	<p>Может оцениваться оценкой или каче- ственно – учителем</p>

## Продолжение таблицы 4

1	2	3	4	5
Этап работы над открытым заданием, создание собственного продукта. <i>Идея эксперимента:</i>	Человек – по предназначению Творец. Человек имеет право реализовать своё творческое начало в любой области. Человек имеет право на свой взгляд на мир, если он не ущемляет при этом прав других людей	Получение опыта творческой деятельности различного рода (сочинительской, исследовательской, художественной и др.)	Продукт оценивается с точки зрения новизны идеи, глубины познания, степени освоения предметной области, креативности	Возможна оценка в баллах, например от 1 до 10, но предпочтительна качественная оценка учителя, рецензия
Этап сравнения с культурно-историческим аналогом. <i>Выводы:</i>	Понимание, что люди приходят к истине разными путями, могут существовать разные точки зрения на один вопрос, знакомство с разными позициями	Сравнение, анализ, систематизация, прогнозирование	Приближённость собственного созданного продукта к уже созданному, или наоборот – оригинальность, самобытность	Самооценка
Этап рефлексивного осмысления результатов урока	Понимание того, что самоанализ результатов – неотъемлемый элемент самостоятельного познания мира	Умение грамотно проанализировать своё приращение, осознать свои достижения и ошибки, их причины	Полная развёрнутая личностная рефлексия	Качественная оценка рефлексии со стороны учителя или одноклассников

Важным вопросом при использовании системно-деятельностного подхода является вопрос диагностики и контроля усвоения не только определённых знаний, но и действий, которыми должны

овладеть учащиеся. Как мы видим основной характеристикой типовых заданий является то, что результатом их выполнения являются схемы, предписания, таблицы, и другие образовательные продукты, созданные учащимися. В зависимости от характера познавательной деятельности на уроке, типовые задания составляются по принципу составления учебных карт действий учащихся, позволяющих организовать формирование познавательного действия «постановка и решение проблем». Поэтому усвоение отдельных действий, являющихся составляющими рассматриваемых схем деятельности и представляющих собой ПУУД (например, формулирование ПЗ – цели исследования, построение графика, формулирование вывода и т.п.), можно и нужно контролировать. Одна из самых простых форм контроля – выполнение заданий с выбором ответа. Таких заданий достаточно много в материалах для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ по физике, некоторые из них могут быть даны и на математике (например, чтение графиков, построение изображений в линзах и т. д.). Подобрать 3–5 заданий на проверку различных умений, можно провести экспресс-диагностику ПУУД.

Таким образом, изучая отдельные виды деятельности, учащиеся получают методологические навыки в наиболее естественной форме – участвуя в исследовании и открывая для себя новые знания.

## **ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД В ПРОЦЕССЕ МЕТАПРЕДМЕТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

### **2.1. Методика формирования познавательных универсальных учебных действий учащихся в контексте метапредметной деятельности**

Методическую основу педагогической концепции, представленной в нашем исследовании, составляет метапредметный подход в обучении, построенный с учетом специфики школы и учебного предмета «математика». В системе изучения учебного модуля «Тригонометрические тождества и функции», развиваемого на основе реальных задач из курса физики, дидактические цели трансформируются в целевую программу учебных действий учащихся. Учебные цели формулируются с учетом принципов деятельностного подхода и имеют двухъярусную ориентированность: на организацию учебно-познавательных действий и на перспективу использования результатов этих действий. Учебные цели ставятся не только для всей совокупности учебно-познавательной деятельности учащегося, но и для каждого познавательного действия (в начале каждого модуля, каждого учебного элемента). Это обусловлено тем, что деятельность состоит из отдельных действий.

Формулирование цели в виде конечного образовательного продукта – наиболее эффективный способ целеполагания. А по внешним «плодам» учеников всегда можно судить и о внутренних результатах обучения, то есть о развитии личностных качеств учащихся.

Алгоритм процесса целеполагания:

- формулирование целей обучения данной дисциплине на основе требований стандарта;
- конкретизация целей обучения с учетом особенностей класса, группы, каждого ученика и его личностного смысла в обучении, конкретных условий, средств и способов достижения;
- определение целей обучения по разделам, темам, модулям и т. д.
- планирование целей конкретного занятия, разложение их на микроцели (задачи каждого этапа метапредметного урока)

Как из предметного материала совершить «прорыв» в метапредметность? Ниже приведём ступени постепенной организации

учебно-познавательной деятельности. Особенного внимания, на наш взгляд, заслуживает методика К.Я. Лернера; и М.Н. Скаткина [15; 25], в основу которой положен уровень познавательной деятельности и активности учащихся.

Таблица 5

Этапы организации познавательной деятельности в школе

Характер познавательной деятельности	Содержание материала	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Психолого-педагогический результат
Репродуктивный	Факты, изложенные в логической последовательности, и готовые выводы	Создание ситуации понимания, запоминания и воспроизведения путём объяснения, демонстрации готового материала и организации самостоятельных работ тренировочного характера	Наблюдения, выполнение самостоятельных работ по образцу, ответы на вопросы репродуктивного характера	Формирование ПУУД, развитие механической и логической памяти; совершенствование приёмов логической систематизации материала
Поисково-исполнительский	Познавательная задача (условия действия даны в готовом виде, а способы решения следует найти)	Создание ситуации познавательной задачи путём поисковых заданий и организации самостоятельных работ поискового характера	Использование приёмов анализа, синтеза обобщения при выполнении самостоятельных работ с элементами поиска и нахождение ответа на вопросы поискового характера	Формирование ПУУД; развитие способности делать обобщения, выводы и осуществлять перенос знаний, умений и навыков в новые условия

## Окончание таблицы 5

1	2	3	4	5
Творчески-исследовательский	Познавательная проблема	Создание проблемной ситуации путём проблемного вопроса, проблемного задания и организации самостоятельных работ исследовательского характера	Самостоятельное формулирование и решение проблемы; конструирование, моделирование и др.	Формирование ПУУД, поиска творческого варианта решения; развитие способности и интереса к творческой деятельности

Таблица 6

## Методика формирования познавательной деятельности учащихся исходя из преемственности поколений

Познавательная деятельность – качество личности			
Качество усвоение знаний (предметные результаты обучения)	Развитие познавательных сил и способностей (метапредметные результаты обучения)	Особенности эмоциональной сферы (коммуникативные результаты обучения)	Уровни морально-волевой активности (личностные результаты обучения)
Педагогические условия			
Новизна содержания, поиск нового в уже известном, новые теоретические аспекты, идти вслед за открытием, сравнительный анализ идей, решение творческих задач, морально-этических проблем	Формирование готовности к познанию, внутреннее целеполагание, определённая мотивация, обеспечение психологической поддержки, формирование навыков самостоятельности мышления, логических и общеучебных умений, «ненасыщенность интересов»	Создание положительно-эмоциональной атмосферы (первый успех, особый микроклимат в коллективе, интеллектуальное общение), степень сосредоточенности внимания, эмоции радости познания	Интенсивный энергичный характер деятельности, стремление к самостоятельности, умение довести дело до конца, способность к длительной напряжённой работе

Познавательные УУД порождаются потребностью и предполагают устойчивый интерес и готовность интегративного свойства личности для интенсивной творческой деятельности. Поэтому, исходя из методики формирования познавательной деятельности учащихся учитель обязан создавать для учащихся педагогические условия (табл. 6).

Ниже приводится схема моделирования урока «Мини-проекта» (рис. 2).

Выбор предмета, темы, класса, распределение обязанностей (кто оформляет, кто переписывает, кто решает дидактический материал) – 10 минут. Разработка модели задуманного урока – 70 минут.

При организации групповой работы надо убедиться в том, что учащиеся обладают знаниями и умениями, необходимыми для выполнения задания. Недостаток знаний скоро даст о себе знать – школьники не станут прилагать усилий для выполнения задания. Учителю необходимо составлять учебные карты действий максимально чётко, записывать инструкции пошагового выполнения не более одной или двух на доске или карточках, предоставлять группе достаточно времени на выполнение задания.

Формирование групп может осложниться тем, что неуверенные в своих знаниях учащиеся могут отказаться переходить из привычной группы в другую. Необходимо практиковать работу групп со сменным составом. Постепенно познавательная и социальная мотивация таких учащихся повысится.

Приступая к работе со школьниками в интерактивном режиме, важно нацелить их на соблюдение правила «трёх нельзя»:

- 1) нельзя ссылаться на то, что «уже всё сказали»;
- 2) нельзя отказываться сообщать своё мнение группе;
- 3) нельзя демонстрировать своё плохое настроение.

*Методические рекомендации для учителя при организации познавательной деятельности на уроке.*

1. Дается ряд заданий по анализу изучения темы урока и инструкция по их выполнению. Пронаблюдайте, как учащиеся решают только эту задачу (строго по инструкции, выбирает более сложную задачу, ту, которую раньше не решал), предлагают свои задачи.

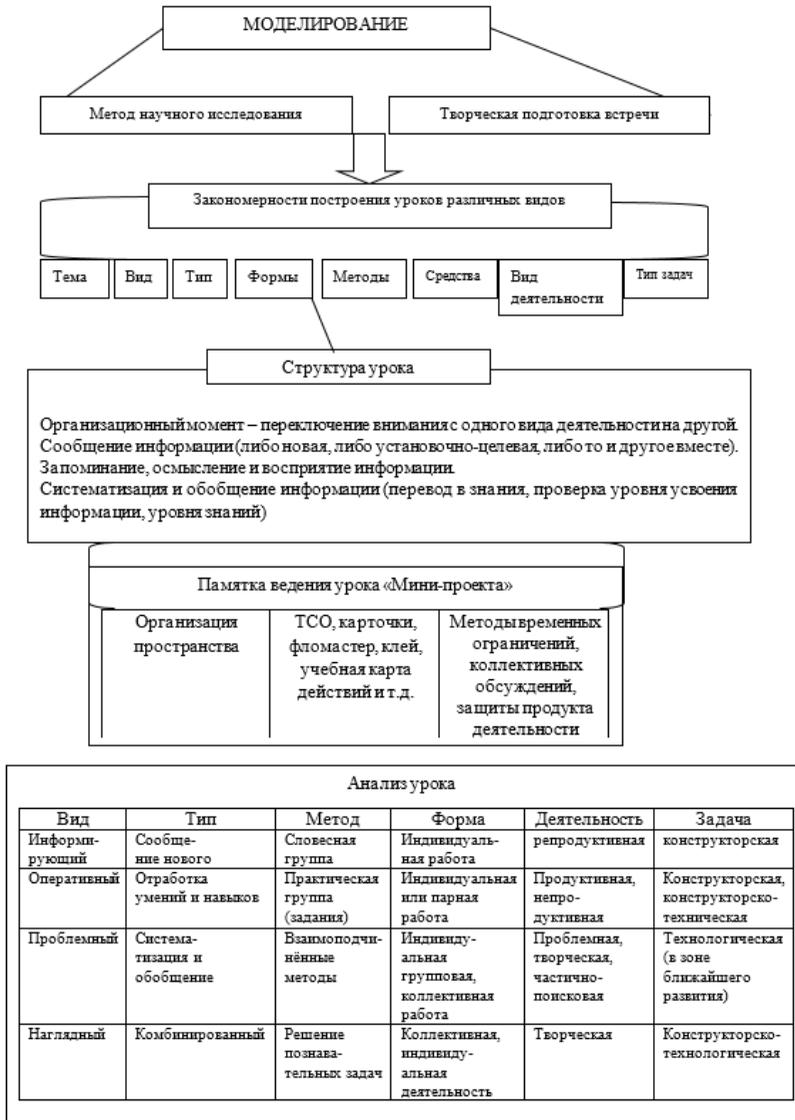


Рис. 2. Моделирование урока «Мини-проекта» (по А. Фиреру)

2. Учитель:

1-й уровень – определяет УПД от ситуации, но ею не определяется;

2-й уровень – ставит свои задачи, решает их, но на порядок выше действий, требуемых данной ситуацией;

3-й уровень – решает задание творчески (обобщённое решение, новый вариант решения).

3. Учитель соотносит интерес и активность:

1-й уровень – непосредственный интерес к задаче;

2-й уровень – интерес как средство для достижения более высокой цели;

3-й уровень – внутренне целевой интерес, направленный на средства решения заданий такого типа.

Выводы: если интересы направляют личность на создание цели деятельности и ориентируют его на новые факты, на более полное и глубокое отражение действительности, то создание условий для организации такой познавательной деятельности развивает познавательные УУД учащегося, так и его качества морально-волевого характера личности.

Таким образом, образовательная задача состоит в создании условий, провоцирующих детское действие на метапредметном уровне. Методические способы, которыми овладеет учащийся к окончанию обучения в средней школе и должны стать той фундаментальной основой непрерывного образования его в дальнейшем.

## **2.2. Реализация методических принципов метапредметности на примере учебного модуля «Тригонометрические тождества и функции», развиваемого на основе реальных задач из курса физики**

Методические особенности изучения учебного модуля «Тригонометрические тождества и функции» в контексте модульного обучения раскрывают следующие основные положения: процесс изучения тригонометрических функций представляет собой целостную систему, состоящую из следующих основных компонентов: организационного, технологического, целевого, содержательного и диагностического (рис. 3), вариантные и лично значимые знания, умения и навыки [24].

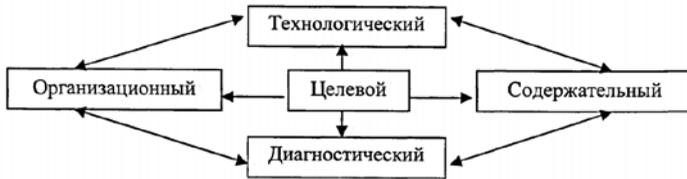


Рис. 3. Основные компоненты методической подсистемы модульного обучения

Модульной программой реализуется комплексная дидактическая цель математического образования примерной ООП СОО [20]. Дидактическая система обучения учебного модуля прогнозируется, проектируется и осуществляется на основе межпредметных связей математики и физики.

В основу модуля положены педагогические и дидактические принципы вариативного развивающего образования:

А. Личностно ориентированные принципы: принцип адаптивности; принцип развития; принцип комфортности.

Б. Культурно ориентированные принципы: принцип картины мира; принцип целостности содержания образования; принцип систематичности; принцип смыслового отношения к миру; принцип ориентировочной функции знаний; принцип опоры на культуру как мировоззрение и как культурный стереотип.

В. Деятельностно-ориентированные принципы: принцип обучения деятельности; принцип управляемого перехода от деятельности в учебной ситуации к деятельности в жизненной ситуации; принцип перехода от совместной учебно-познавательной деятельности к самостоятельной деятельности учащегося (зона ближайшего развития); принцип опоры на процессы спонтанного развития; принцип формирования потребности в творчестве и умений творчества.

Г. Принцип модульности предполагает целостность и завершённость, полноту и логичность построения единиц учебного материала в виде блока-модуля, внутри которого учебный материал структурируется в виде системы учебных элементов – глав учебника [17]. Таким образом, включая три главы УМК [12]:

- глава 1. Тригонометрические формулы;
- глава 2. Тригонометрические уравнения;
- глава 3. Тригонометрические функции.

При этом элементы содержания обучения внутри блока взаимосвязаны и подвижны. Поэтому учителю при создании рабочей программы можно использовать приведённую в учебном модуле «Тригонометрические тождества и функции» последовательность элементов содержания, равно как расположить их в другой последовательности или расширить содержание предложенных тем. В расчёт учебных часов на изучение всех учебных предметов заложен резерв учебного времени учителя, предназначенный для организации педагогического процесса с учётом индивидуальных особенностей и реальной подготовки каждого обучающегося.

Учебные часы, отведённые на изучение основного содержания курса, учитель математики распределяет по своему усмотрению между основным содержанием курса, его повторением и итоговой аттестацией. Рекомендованный вариант содержания по УМК Ю.М. Колягина, М.В. Ткачёвой, Н.Е. Фёдоровой, М.И. Шабунина, приведены в табл. 10.

Резервное время (10 часов в год) при разработке рабочей программы может быть использовано как для дополнительного содержания обучения, так и для увеличения времени на изучение отдельных тем модуля или проведения проектных и исследовательских работ для профильного уровня (уроки мини-проекты, уроки-зачёты, уроки-защиты исследовательских и проектных работ). Поэтому обучающиеся, имеющие ярко выраженную склонность к занятиям наукой, и в частности, к математике и физике, таким образом, могут получать дополнительные возможности развития своих способностей. Для этой категории обучающихся предложены темы исследовательских работ в содержании учебного модуля.

Каждый блок, состоящий из познавательных, операционных и контролирующего модулей, включает от 10 до 30 уроков. Структура познавательных и операционных модулей обуславливается целью и предопределяет логику построения учебных занятий

(табл. 7). При разработке модульных программ мы предлагаем для каждого модуля оформить:

1) технологические карты для учителя, раскрывающие содержательные и методические аспекты каждого урока (табл. 8);

2) учебные карты действий для учащегося, объединяющих целеполагание ученической деятельности, информацию, систему действий учителя и учащегося (при необходимости учителем разрабатываются конспекты лекций, методические и дидактические материалы, которые прилагаются к учебной карте действий учащихся) (табл. 10).

Составление комплектов технологических карт, разрабатываемых для каждого блока модуля на основе целеполагания, позволяют учителю отслеживать логику построения урока, уровень содержания учебного материала, заданий, упражнений при разработке моделей конкретных уроков, а также упрощает проведение их системного анализа с позиции дидактического пятиугольника (табл. 9).

*Содержание обучения учебного модуля  
в профильных 10–11 классах*

Тема учебного модуля «Тригонометрические тождества и функции» продолжает линию знакомства обучающихся с основными элементарными функциями. Содержание модуля нацелено на получение школьниками конкретных знаний о тригонометрической функции как важнейшей модели описания и исследования разнообразных реальных процессов.

Таблица 7

Технологическая карта учебного курса «Тригонометрия» (42 часа) (Алгебра и начала математического анализа. Базовый / профильный уровень: учебник / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, [и др.]; под ред. А.Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2010)

№	Учебный модуль	Кол-во часов	Метапредметные результаты изучения учебного модуля	Личностные результаты изучения учебного модуля	Внутрипредметные / межпредметные связи	Темы проектов	Литература
1	Тригонометрические формулы 10 класс	22	1) развитие умений самостоятельно определять цели деятельности по усвоению и применению знаний тригонометрии как математической модели реальной действительности; 2) формирование навыков учебно-исследовательской деятельности, готовности к поиску решения практических задач; 3) развитие умений ориентироваться в различных источниках информации, применять её в своей деятельности	1) формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики; 2) развитие готовности учащихся к самостоятельной творческой деятельности; 3) формирование навыков сотрудничества в процессе учебной, учебно-исследовательской, общественной деятельности	1) косинус, синус и тангенс углов от $0^\circ$ до $180^\circ$ в курсе геометрии 9 класса; 2) сложение и разложение сил в механике 10 класса; 3) линейная и угловая скорость, перевод в радианную меру угла в механике 10 класса; 4) гармонические колебательные движения и необходимость обобщения понятий круговых функций; 5) современное определение расстояний от Земли до небесных светил; 6) тригонометрическая форма комплексного числа	1. Расчётная работа «Основные формулы тригонометрии»	<u>Для учителя:</u> 1. Бурмистрова Т.А. Программы общеобразовательных учреждений. Алгебра 10–11 классы. – М.: Просвещение, 2009. 2. Алгебра и начала математического анализа 10 класс. Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова [и др.]; под ред. А.Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2010.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	Тригонометрические уравнения 10 класс	20	<p>1) расширение средств моделирования реальных процессов и явлений;</p> <p>2) формирование приёмов перехода от аналитической к графической модели и обратно;</p> <p>3) развитие алгоритмического и логического мышления;</p> <p>4) совершенствование приёмов точных и приближённых вычислений;</p> <p>5) знакомство с математическим толкованием понятия периодичности, имеющего важное мировоззренческое значение;</p> <p>6) знакомство с физическими явлениями, описываемыми с помощью тригонометрических уравнений</p>	<p>1) совершенствование навыков самоконтроля;</p> <p>2) развитие вычислительной и алгоритмической культуры;</p> <p>3) развитие творческой инициативы, исследовательских умений, самокритичности</p>	<p>1) косинус, синус и тангенс углов от <math>0^\circ</math> до <math>180^\circ</math> в курсе геометрии 9 класса;</p> <p>2) сложение и разложение сил в механике 10 класса;</p> <p>3) линейная и угловая скорость, перевод в радианную меру угла в механике 10 класса;</p> <p>4) гармонические колебательные движения и необходимость обобщения понятий круговых функций;</p> <p>5) современное определение расстояний от Земли до небесных светил;</p> <p>6) тригонометрическая форма комплексного числа</p>	<p>2. Практическая работа «Решение тригонометрических уравнений различными способами»</p>	<p>3. Изучение алгебры и начал математического анализа в 10 классе. Книга для учителя / Н.Е. Фёдорова, М.В. Ткачёва. – М.: Просвещение, 2008 и последующие издания.</p> <p>4. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа. Для 10 класса общеобразовательных учреждений / М.И. Шабунин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова [и др.]. – М.: Просвещение, 2008 и последующие издания.</p> <p>5. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы 10 класс. Профильный уровень / М.И. Шабунин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова [и др.]. – М.: Просвещение, 2009 и последующие издания</p>

1	2	3	4	5	6	7	8
3	Тригонометрические функции 11 класс	18	1) моделирование периодических явлений и процессов, с помощью формул и графиков тригонометрических функций; 2) исследование реальных процессов и явлений, протекающих по законам синуса (косинуса), с помощью свойств тригонометрических функций	1) развитие аналитических способностей и интуиции в ходе наблюдения за поведением угловой зависимостей; 2) развитие исследовательских умений, необходимых будущих технических профессий; 3) совершенствование культуры вычислительных и графических действий	1) косинус, синус и тангенс углов от $0^\circ$ до $180^\circ$ в курсе геометрии 9 класса; 2) сложение и разложение сил в механике 10 класса; 3) линейная и угловая скорость, перевод в радианную меру угла в механике 10 класса; 4) гармонические колебательные движения и необходимость обобщения понятий круговых функций; 5) современное определение расстояний от Земли до небесных светил; 6) тригонометрическая форма комплексного числа	3. Лабораторно-графическая работа «Изучение тригонометрических функций на основе гармонических колебаний»	<u>Для учащихся:</u> 1. Хрестоматия по истории математики. Т. I. – М.: Просвещение, 1977. – 224 с. 2. Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1984. – 176 с. 3. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач. – М.: Просвещение, 1967. – 648 с.

Таблица 8

## Технологическая карта учебного модуля (блока) «Тригонометрические формулы» (22 часа)

№	Тема (учебная тема)	Количество часов	Формируемые предметные учебные действия	Формируемые УУД (учебно-универсальные действия)	Виды контроля	Темы творческих заданий
87	Радийанная мера угла	1	Сформировать у обучающихся представление о радианной мере угла через основное понятие вращательного движения-угловой скорости. Организовать учебную деятельность, направленную на применение аппарата тригонометрии в геометрии и физике	Объяснение и иллюстрация понятия радианной меры угла. Вычисление значения радианной меры угла по определению. Перевод градусной меры угла в радианную и обратно. Нахождение угловой скорости равномерного движения по окружности. Моделирование прибора для определения радианной меры углов	Мини-тест на определение остаточных знаний из курса алгебры и геометрии 9 класса	Изготовление транспортира с радианной шкалой (до 10-х долей)

Продолжение таблицы 8

1	2	3	4	5	6	7
88	Поворот точки вокруг начала координат	1	Спроектировать учебные ситуации, наглядно и убедительно для обучающихся демонстрирующие пользу от применения приобретенных знаний и умений для решения задач практического характера, задач из других разделов математики или смежных учебных предметов	Вывод и использование правил определения угла по круговой (единичной) окружности. Нахождение координат точек на единичной окружности, соответствующей данному действительному числу. Умения применять различные методы познания	кратковременная самостоятельная работа по индивидуальным карточкам	Составление памятки закладки
89	Определение синуса, косинуса и тангенса угла	1	Сформировать у обучающихся представление о первоначальных основах тригонометрии. Ознакомить с применением определений синуса и косинуса при решении простейших тригонометрических уравнений	Определять существенные признаки понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла (числа). Находить их для чисел вида $\frac{\pi}{2}k$ , где $k \in \mathbb{Z}$ . Умение ясно и точно излагать свою точку зрения, используя терминологию, известную из курса геометрии основной школы и новые термины.	Математический диктант, самостоятельная работа	Моделирование числовой окружности

Продолжение таблицы 8

1	2	3	4	5	6	7
90	Знаки синуса, косинуса и тангенса угла.	1	Организовать учебную деятельность в процессе обучения нахождения знаков синуса, косинуса, тангенса числа	Определять знаки синуса, косинуса, тангенса числа. Уметь самостоятельно ставить цель деятельности и контролировать свою деятельность. Самоконтроль – на этапе применения знаний	Индивидуальные задания по карточкам	Задание на движение маховика двигателя внутреннего сгорания
91–92	Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	2	Спроектировать учебные ситуации в процессе обучения вывода формул и их применения на практике и доказательства основной теоремы тригонометрии	Выводить формулы зависимости между синусом и косинусом, тангенсом одного и того же угла (числа). Применять эти формулы для вычисления значений синуса, косинуса, тангенса числа по заданному значению одного из них. Уметь взаимодействовать в процессе изучения материала	Формульный диктант	Оригинальные способы выведения формул зависимости между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла
93–94	Тригонометрические тождества	2	Организовать учебную деятельность в процессе введения понятия тождества и обучения доказательству тригонометрических тождеств.	Определять понятие тождества как равенства, справедливого для всех допустимых значений букв. Доказывать тождества с использованием изученных формул. Уметь выбирать успешные стратегии в различных ситуациях	Кратковременная самостоятельная работа	Решение нестандартных задач по теме

1	2	3	4	5	6	7
95	Синус, косинус и тангенс углов $\alpha$ и $-\alpha$ .	1	Подвести под способы сведения вычислений значений синуса, косинуса, тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов	Применять формулы при вычислениях и преобразованиях. Решать простейшие уравнения, сопровождая иллюстрацией решения на единичной окружности. Уметь самостоятельно контролировать и корректировать свою деятельность	Тестирование	Тригонометрия в логических упражнениях
96–98	Формулы сложения	3	Организовать учебную деятельность по обучению вывода формул сложения из основной теоремы тригонометрии	Доказывать теорему, опираясь на формулу расстояния между двумя точками из 9 класса или на свойства скалярного произведения. Выводить формулы сложения. Применять их при вычислении и выполнении преобразований тригонометрических выражений	Формульный диктант	Доказать, что во всяком треугольнике синус любого угла равен синусу суммы двух других углов
99	Синус, косинус и тангенс двойного угла.	1	Подвести учащихся к доказательству вывода формул используя теорему сложения. Организовать проектную деятельность по выполнению расчётной работы «Основные формулы тригонометрии», используя опорный конспект, составленный совместно с учащимися	Выводить формулы. Применять формулы двойного угла при преобразовании тригонометрических выражений, в частности при выводе формул половинного угла. Уметь продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности. Уметь самостоятельно определять цели проектной деятельности по усвоению и применению знаний тригонометрии как математической модели реальной действительности	Тренаж по применению основных формул тригонометрии	Разработка интересного задания по теме расчётной работы
100	Синус косинус и тангенс половинного угла. <i>Расчётная работа</i>	1				

Продолжение таблицы 8

1	2	3	4	5	6	7
101–102	Формулы приведения	2	Организовать исследовательскую деятельность с использованием исторической справки по теме. Подвести под выведение мнемонического правила	Уметь решать устные упражнения по теме: «Поворот точки вокруг начала координат». Применять правила, позволяющие заменить синус, косинус, тангенс, котангенс любого числа $\alpha$ , если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Развивать навыки познавательной рефлексии как осознание совершаемых действий и мыслительных процессов.	Самостоятельная работа – самоконтроль	Моделирование карты исторического маршрута тригонометрии.
103–104	Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов	2	Организовать соревновательную деятельность учащихся на решение задач по применению формул суммы и разности синусов (косинусов) при вычислениях и разложении на множители.	Доказывать тригонометрические тождества разными способами. Уметь понижать степень выражения и находить полусумму и полуразность углов. Преобразовывать левую и правую части к одинаковому виду. Владеть приёмами выполнения разложения на множители с различными целями: вычисления, нахождения наибольшего или наименьшего значения и др. Устно выполнять упражнения по теме.	Взаимозачёт по теме	Применение теорем и формул тригонометрии в механике
105–106	Произведение синусов и косинусов	2	Спрогнозировать ситуации применения формул замены произведения суммой в частном применении при решении уравнений и исследовании функций.	Выводить формулы произведения синусов и косинусов с помощью формул сложения. Применять формулы при решении уравнений и задач на оптимизацию как составляющие осуществления моделирования самых разных процессов	Самостоятельная работа	

## Окончание таблицы 8

1	2	3	4	5	6	7
107	Обобщающий урок по теме «Тригонометрические формулы». <i>Зачёт</i>	1	Совместно с учащимися провести анализ результатов зачёта и коррекцию знаний, повторить все формулы и вспомнить допустимые значения букв в каждом отдельном случае	Уметь представлять все формулы в системе: формулы, связующие тригонометрические функции одного аргумента, затем суммы аргументов, откуда следует формулы двойного и половинного аргумента, формулы разложения на множители суммы и разности одноимённых функций разных аргументов, формулы замены произведения одноимённых функций разных аргументов, формулы замены произведения одноимённых функций или синуса и косинуса их суммой	Круглый стол	Представление результатов исследований учащихся.
108	Контрольная работа №7 «Тригонометрические формулы»	1	Провести контроль и самоконтроль уровня усвоения изучаемых понятий и способов деятельности.	Самооценка – на этапе контроля знаний	проверочная работа в форме ЕГЭ	

Таблица 9

Технологическая карта темы «Синус, косинус и тангенс двойного угла.  
Синус косинус и тангенс половинного угла» (2 часа)

№	Тема урока	Цель урока	Изучаемые понятия, утверждения, алгоритмы (правила), методы рассуждений и решения задач (с указанием этапа формирования)	Технология обучения (или тип технологии обучения)		Форма обучения	Тип, формы и методы контроля	ТСО (технологические средства обучения)
				Метод обучения				
99	Синус, косинус и тангенс двойного угла. Синус, косинус и тангенс половинного угла	Подвести учащихся к доказательству вывода формул используя теорему сложения	Формулы двойного угла. Формулы понижения степени	Следствия теоремы сложения. Алгоритм вывода формул. Правила вычисления значений $\sin \frac{\alpha}{2}$ , $\cos \frac{\alpha}{2}$ , $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , если известно, в какой четверти лежит угол $\alpha$	Метод организации и осуществления учебно-познавательной деятельности, технология проблемного диалога	Кластер	Тип урока: Урок изучения нового учебного материала. Форма УПД: работа индивидуальная и в парах. Метод контроля: устные задания – самоконтроль – на этапе применения знаний	Интерактивная доска с проектором.

Окончание таблицы 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	Расчётная работа	Организовать проектную деятельность по выполнению расчётной работы «Основные формулы тригонометрии», используя опорный конспект, составленный совместно с учащимися	Формулы двойного угла. Формулы понижения степени	Алгоритмы опорного конспекта	Метод решения проблемных задач. Технология интегрированного обучения	Практическая работа	Тип урока: Урок закрепления знаний. Форма УПД: индивидуальная работа при выполнении разноуровневых заданий по теме. Метод контроля: Тренаж по применению основных формул тригонометрии – взаимный контроль.	Интерактивная доска с проектором

Таблица 10

Технологическая карта урока по теме: «Синус, косинус и тангенс двойного угла.

Синус косинус и тангенс половинного угла»

## Часть 1

Дата 15.03.2018 г.	Урок №100	Класс 10 «Б»	Предмет «Алгебра и начала анализа»	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей №3» КБР г. Прохладный
Тема урока «Синус, косинус и тангенс двойного угла. Синус косинус и тангенс половинного угла»			УМК учебник 10 класс. Базовый / профильный уровень / Ю.М. Колягин [и др.]. 2011. – § 9–10, с. 322	
Место урока в системе уроков по теме (всего уроков на тему / номер урока по теме): 22/12				
Тип урока: урок изучения нового учебного материала				
Дидактические единицы учебного материала, которыми ученик должен владеть для успешной работы на уроке			Понятия, утверждения, алгоритмы, методы, которые ученик изучит на уроке	
Представлять, понимать	Знать	Уметь	<p><u>Понятия</u>: синус, косинус и тангенс двойного угла. Синус косинус и тангенс половинного угла как математические модели, позволяющие описывать процессы, изучающие физикой.</p> <p><u>Утверждения (теоремы, аксиомы)</u>: следствия теоремы сложения.</p> <p><u>Алгоритмы (правила)</u>: алгоритм преобразования тригонометрических выражений с помощью формул.</p> <p><u>Методы (рассуждений, решения задач)</u>: формирование отдельных составляющих исследовательской деятельности, алгоритмический метод решения задач</p>	
Преобразования тригонометрических выражений с помощью формул	Формулы двойного угла. Формулы понижения степени	уметь использовать формулы при выполнении упражнений 1047, 1050–1052. Пользуясь справочным материалом, выполнять упражнения 1064, 1067		

Планируемые предметные результаты урока						
Ученик должен знать			Ученик должен уметь			Ученик научится представлять и понимать
Уровень А	Уровень В	Уровень С	Уровень А	Уровень В	Уровень С	1. Как, зная формулы сложения для синуса, косинуса и тангенса, получить формулы двойного угла? Записать эти формулы. 2. Как записать формулы синуса, косинуса, тангенса половинного аргумента. 3. Как вывести формулы тройного аргумента? 4. Связь тригонометрических функций с тангенсом половинного аргумента
Знать Формулы двойного угла. Формулы понижения степени	Оперировать понятиями: синус, косинус и тангенс двойного угла. Синус косинус и тангенс половинного угла	владеть понятиями: Синус, косинус и тангенс двойного угла. Синус косинус и тангенс половинного угла (тройного угла)	Находить значения синуса, косинуса и тангенса угла одним из способов	Выявлять зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	Применять при преобразованиях и вычислениях формулы двойных и половинных углов	
Метапредметная направленность урока заключается в формировании у учащихся способностей к самостоятельному построению новых способов ПУД посредством решения проблемных задач						
Личностная направленность заключается в развитии умений продуктивно общаться в процессе совместной деятельности кластера						
Технология обучения		Форма обучения			Метод обучения	
Метапредметные технологии по Д.А. Ивашкиной		проблемное изложение			проблемно-исследовательский	

Дидактические средства обучения	
Вербальные (устное слово, учебник), наглядные (чертежи), графики на экране (интерактивной доске)	
Оборудование: доска магнитная с координатной сеткой, линейка, транспортир, угольник, экран с компьютером.	
Источники информации:	
1) для учителя	2) для обучающихся
<p>1. Изучение алгебры и начал математического анализа в 10 классе. Книга для учителя / Н.Е. Фёдорова, М.В. Ткачёва. – М.: Просвещение, 2015.</p> <p>2. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы 10 класс. Профильный уровень / М.И. Шабунин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова [и др.]. – М: Просвещение, 2009 и последующие издания</p>	<p>Алгебра и начала математического анализа 10 класс. Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова [и др.]; под ред. А.Б. Жижченко. – М: Просвещение, 2010.</p> <p>2. Учебная карта действий.</p>
Цель урока: определяется планируемыми результатами и способами их достижения	
предметная	деятельностная
Обучить учащихся определять следствия теоремы сложения и применять их на практике	Подвести учащихся к доказательству вывода формул используя теорему сложения.
<p>Задачи урока: конкретизация цели.                      Подвести учащихся к следствиям теоремы сложения.                      Обучать применению формул двойного угла при преобразованиях тригонометрических выражений.                      Развивать умения продуктивно общаться в процессе совместной деятельности.</p>	

Часть 2

Характеристики этапов урока							
Этап урока, время	Цель этапа	Формируемые УУД	ФОРУД (индивидуальная, парная, групповая, коллективная, фронтальная)	Деятельность учителя (с указанием конкретных методов и приемов обучения, а также учебно-познавательных и учебно-практических задач, решаемых на данном этапе)	Деятельность обучающихся	Продукт деятельности учащихся	Используемые на этапе СО
1. 2 мин.	Создание в классе атмосферы сотрудничества	личностные	Ф	Приветствие. Проверка готовности учащихся к уроку. Оформление доски по теме: Как? Формы сложения... Что ещё?	Распределяются по парам интереса	Сформированы пары	вербальные

Продолжение таблицы 10

II. 3 мин	Актуализация знаний и жизненного опыта	регулятивные	П–Г	Организует работу по проверке домашнего задания (разбор нерешённых задач) и закреплению пройденного. Задаёт устные задачи на рефлексию по теме: «Формулы сложения»	Проверка домашнего задания – на обмен тетрадями с оценкой (ответы выводятся на интерактивной доске). Решение устных заданий – групповая – соревновательная – оценка балльно-рейтинговая)	Способ выражения Понятий: о пределе функции в точке, приращение аргумента, приращение функции	Вербальные и наглядные
III. 3 мин.	Мотивация учебной деятельности	регулятивные	П	формирование отдельных составляющих исследовательской деятельности, создания образовательной напряжённости (постановки проблемы) по теме. Задачи на целеполагание урока	Отвечают письменно на вопросы текста	Отличили гипотезу от факта	вербальные
IV. 2 мин.	Подвести к названию темы	познавательные	И	Уточняет тему, вместе с учащимися определяет цель и задачи урока	Сообщают тему урока и свою цель. Записывают в тетрадь	В тетради записана тема и цель	вербальные

Продолжение таблицы 10

V.15 мин.	Изучение нового материала	предметные, личностные, познавательные	П	Объясняет, как заполнять карту «Маршрут урока кластера», создаёт ситуацию по формированию понятий Синус, косинус и тангенс двойного угла. Синус косинус и тангенс половинного угла как математические модели, позволяющие описывать процессы, изучающие физикой с помощью демонстрации опыта воронки с песком. Кластеры формируются по группам сложности. Если сильный класс, то применяется технология обратного кластера	Выполняют задания группового кластера. Распределяют роли в группе. Применяют следствие теоремы сложения на стадии осмысления, после просмотра текста учебника, анализируют и добавляют новыми задачами	В тетради вывод формул $\sin 2\alpha$ , $\cos 2\alpha$ , $\operatorname{tg} 2\alpha$ , $\sin 3\alpha$ , $\cos \frac{\alpha}{2}$ , $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ , $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , $\cos \frac{2\alpha}{2}$ , $\operatorname{tg} \frac{2\alpha}{2}$ , $\operatorname{ctg} \frac{2\alpha}{2}$ , $\operatorname{tg} \frac{2\alpha}{2}$ с применением формулы суммы и основного тригонометрического тождества	вербальные, наглядные
VI. 12 мин.	Закрепление изученного материала	Предметные	И	По окончании работы выходят по одному ученику заполняют и объясняют вывод формул. Затем следующее решение задач. Затем следующие интересные задачи. Создаёт ситуацию соревнования. Вместе с учащимися участвует в обсуждении результатов и дополнительных вопросов	Решают задания по выбору. Задают вопросы оппонентам. Проверяют свои решения	Решения заданий по уровню сложности в тетради	Вербальный, наглядный

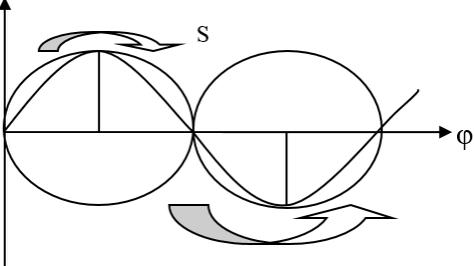
Продолжение таблицы 10

VII. 3 мин.	Дать дифференцированное домашнее задание	Предметные, коммуникативные	Г	раздаёт разноуровневые задания	Записывают домашние задания	Сформировано структурирование знаний	вербальная
VIII. 5 мин.	Подвести итоги урока, сделать рефлексю	Регулятивные, личностные	И	Задаёт задачи на самоконтроль	Самооценка. Отвечают на вопросы по выбору	Сформировано ритмичность мышления, структурирование знаний	Вербальная, наглядная

Часть 3  
Ход урока

№	Название и описание	Время
I	Организационный момент. Приветствие. Проверка готовности учащихся к уроку. Создание в классе атмосферы сотрудничества	2 мин.
II	Актуализация знаний и жизненного опыта. <b>Устные задания (Сборник задач и упражнений для устных занятий по математике В.А. Игнатьев, Математика в логических упражнениях А.Г. Гайшут).</b> 1. Упростить: 1) $\sin 10^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 10^\circ \cdot \sin 40^\circ = \sin 50^\circ$ ; 2) $\sin 70^\circ \cdot \cos 20^\circ + \cos 70^\circ \cdot \sin 20^\circ = \sin 50^\circ$ ; 3) $\cos 55^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 55^\circ \cdot \sin 20^\circ = \cos 35^\circ$ ; 4) $\sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ - \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ = \cos 20^\circ$ ; 5) $\frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 8^\circ}{1 + \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 8^\circ} = \operatorname{tg} 7^\circ$ ; 6) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$ ; 7) $\cos(\alpha + 70^\circ) - \cos(\alpha - 70^\circ) = -2\sin\alpha \cdot \sin 70^\circ$	3 мин.

<p>II</p>	<p>2. Вычислить:                  1) <math>\sin 5^\circ \cdot \cos 25^\circ + \cos 5^\circ \cdot \sin 25^\circ = \frac{1}{2}</math>; 2) <math>\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ - \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ = \frac{1}{2}</math>;                  3) <math>\sin 20^\circ \cdot \cos 80^\circ - \sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math>; 4) <math>\frac{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}</math>                  5) <math>\frac{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ - 1} = -\sqrt{3}</math></p> <p>3. Вставить пропущенное выражение:</p> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; text-align: center;"><math>2\sqrt{12}</math></div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; text-align: center;"><math>7\sqrt{3}</math></div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; text-align: center;"><math>\sqrt{27}</math></div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; text-align: center;"><math>\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\alpha</math></div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; text-align: center;">?</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; text-align: center;"><math>\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha</math></div> </div> <p>(1/2)</p> </div>	<p>3 мин.</p>
<p>III</p>	<p>Мотивация учебной деятельности.  <i>Формирование отдельных составляющих исследовательской деятельности</i>                  Приём «Продолжи предложение»  <i>Предположительные ответы учащихся</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Я знаю, что синус суммы двух углов равен... (сумме произведений синуса и косинуса соответствующих углов).</li> <li>2. Я понял, что если отнять две формулы синуса суммы и синуса разности двух углов, то... (получится двойное произведение синуса <math>\beta</math> и косинуса <math>\alpha</math>).</li> <li>3. Из этой формулы, если два угла будут равны, то (<math>\sin 2\alpha</math> или <math>2\sin\alpha \cdot \cos\alpha</math>)</li> </ol>	<p>3 мин.</p>
<p>IV</p>	<p>Сообщение темы. <b>Синус, косинус и тангенс двойного угла. Синус косинус и тангенс половинного угла,</b>                  § 29, 30 (§9, 10, с. 287).                  Постановка цели и задач урока.                  Задачи урока:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Выводить и применять формулы двойного угла при преобразованиях тригонометрических выражений.</li> <li>2. Развивать умения продуктивно общаться в процессе совместной деятельности.</li> </ol>	<p>2 мин.</p>

V	<p>Изучение <i>нового материала</i>.  <i>Рассказ учителя.</i>          Итак, мы уже отмечали в начале изучения раздела математики тригонометрии, что этот раздел полностью раскрывается в XVI веке, когда в физике начинают изучать колебательные системы. Посмотрим, как изменяется картина колебательного движения при разных углах отклонения.  <i>Демонстрационный эксперимент с движущимся листком при разных отклонениях маятника.</i></p>  <p>Редукция. Модель задачи</p> <p>Все три модели: при <math>\varphi &lt; 2\varphi</math>, <math>\varphi &lt; \frac{\varphi}{2}</math> вывешиваются на доску (песок клеится на бумаге за счёт проклеенного листа)</p>	15 мин.
VI	Закрепление изученного материала. Решить задания учебника 1056, 1074 (3, 5), 1059 (3, 5), 1070 (1, 3)	12 мин.
VII	<p>Домашнее задание.          Повторить определения урока и алгоритм применения формул, выполнить аналогичные задания из урока.          ДМ § 10 № 10, 11, 12, 13; 1061, 1062, ДМ § 11 № 4, 5, 8; 1075, 1076</p>	2 мин.
VIII	<p><b>Самооценка.</b>          1. Что изучили на уроке? (показать на доске формулы).          2. Закончить запись формулы двойного угла:          1) <math>\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha</math> _____;    2) <math>\sin 5\alpha = 2\sin</math> _____          3. Что не получилось? Оценки за урок. У доски, Д/з, см/р.</p>	3 мин.

**Маршрут урока-кластера (§ 9, 10, с. 287)**  
**Синус, косинус и тангенс двойного угла.**  
**Синус косинус и тангенс половинного угла**

ФИО \_\_\_\_\_  
 (группы) \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_



Связь между синусом и косинусом  
гораздо глубже, чем между  
операцией и кооперацией.  
Неизвестный автор

<p><b>IX. Формулы двойного угла</b></p>	<p>1) <math>\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha</math>                  2) <math>\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha</math>                      или                      <math>\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha</math>                      или                      <math>\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1</math>                  3) <math>\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}</math></p>	<p>Найдите <math>\sin 2\alpha</math> и <math>\cos 2\alpha</math>, если <math>\sin\alpha = 0,6</math>; <math>\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)</math>.</p> <p align="center"><i>Решение.</i></p>
---	--	--

<p><b>X. Формулы понижения степени. Формулы половинного угла</b></p>	<p>1) <math>\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}</math>                  2) <math>\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}</math>                  3) <math>\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}</math>                      или                      <math>\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}</math>                  4) <math>\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}</math>                      или                      <math>\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}</math></p>	<p>Упростите выражение <math>\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)</math>.</p> <p align="center"><i>Решение.</i></p> <p>Найдите <math>\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}</math>.</p> <p align="center"><i>Решение.</i></p>
--	---	---

4. Выведите формулу, используя текст учебника.

- 1)  $\cos 2\alpha =$  \_\_\_\_\_  
 2)  $\operatorname{tg} 2\alpha =$  \_\_\_\_\_  
 3)  $\operatorname{tg} \frac{2\alpha}{2} =$  \_\_\_\_\_

5. Докажите тождество:

- 1)  $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$   
 2)  $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего (полного) общего образования [26] основные цели изучения модуля состоят:

Предметные цели:

– развитие представлений и способов описания явлений реального мира на математическом языке, в частности в терминах тригонометрии;

– формирование представлений о понятиях тригонометрии как математических моделях, позволяющих описывать процессы, изучаемые другими науками, в частности физикой;

– формирование умений определять и исследовать свойства тригонометрических функций, используя однозначное соответствие между точками числовой прямой и точками окружности;

– формирование умений применять различные методы решения тригонометрических уравнений и неравенств, в процессе исследования тригонометрических функций и решения практических задач.

Метапредметные цели:

– развитие умений самостоятельно определять цели своей деятельности по исследованию процессов и явлений, моделями которых являются тригонометрические функции; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать эту деятельность;

– формирование навыков учебно-исследовательской деятельности, готовности к поиску решения практических задач;

– развитие умений ориентироваться в различных источниках информации.

Личностные цели:

– формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки;

– развитие готовности учащихся к самостоятельной творческой деятельности;

– формирование навыков сотрудничества в процессе учебной деятельности.

*Задачи модуля.*

1. Сформировать у обучающихся систему знаний о тригонометрических функциях и их свойствах.

2. Организовать учебную деятельность, направленную на освоение тождественных преобразований и методов решения тригонометрических уравнений и неравенств, а также на формирование

физических представлений, с помощью которых можно дать наглядные объяснения сущности стандартных и эвристических приёмов решения соответствующих математических задач.

3. Спроектировать учебные ситуации, наглядно и убедительно для обучающихся демонстрирующие пользу от применения приобретённых знаний и умений для решения задач практического характера, задач из других разделов математики или физики.

### *Содержание.*

Глава V. Тригонометрические формулы (27 часов).

Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат. Определение синуса, косинуса и тангенса угла. Знаки синуса, косинуса и тангенса. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла. Тригонометрические тождества Синус, косинус и тангенс углов  $\alpha$  и  $-\alpha$ . Формулы сложения. Синус, косинус и тангенс двойного угла. Синус косинус и тангенс половинного угла. Формулы приведения. Сумма и разность косинусов.

### Дидактические единицы.

*Понятия:* радиан, поворот точки единичной окружности вокруг начала координат на угол  $\alpha$ , синус, косинус, тангенс и котангенс угла (числа), тождество как равенство, справедливое для всех допустимых значений букв.

*Алгоритмы:* вывод основных тригонометрических формул через тригонометрическую единицу. Доказательство тождеств и теоремы сложения. Вычисления значений синуса, косинуса, тангенса отрицательных углов. Применение основных тригонометрических формул, мнемонического правила формул приведения.

Основные образовательные идеи. От тригонометрии острого угла к тригонометрии любого действительного числа. Круговые функции при изучении вращательных движений.

Виды деятельности обучающихся (требования к результатам освоения программы – предметные результаты обучения).

*Ученик научится.* Переводить градусную меру в радианную и обратно. Находить на окружности положение точки, соответствующей данному действительному числу. Находить знаки значений синуса, косинуса, тангенса числа. Выявлять зависимость между синусом, косинусом тангенсом одного и того же угла. Применять данные зависимости для доказательства тождества, в частности, на

определённых множествах. Применять при преобразованиях и вычислениях формулы связи тригонометрических функций углов  $\alpha$  и  $-\alpha$ , формулы двойных и половинных углов, формулы приведения, формулы суммы и разности синусов, суммы и разности косинусов, произведения синусов и косинусов.

*Ученик получит возможность научиться.* Доказывать тождества, применяя различные методы, используя все изученные формулы. Применять все изученные свойства и формулы при решении прикладных задач и задач повышенной сложности.

4. Урок мини-проект по теме. Расчётная работа «Основные формулы тригонометрии».

5. Урок обобщения и систематизации знаний.

6. Контрольная работа №5.

Глава VI. Тригонометрические уравнения (18 часов).

Уравнение  $\cos x = a$ . Уравнение  $\sin x = a$ . Уравнение  $\operatorname{tg} x = a$ . Решение тригонометрических уравнений. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств.

Дидактические единицы.

*Понятия:* арккосинус, арксинус и арктангенс числа.

*Алгоритмы.* Решение простейших тригонометрических уравнений.

Метод введения нового неизвестного и разложения на множители.

Основные образовательные идеи. Гармонические колебательные движения и необходимость обобщения понятий круговых функций. От графического приёма решения уравнений к аналитическому приёму решения тригонометрических уравнений с помощью единичной окружности.

Виды деятельности обучающихся (требования к результатам освоения программы – предметные результаты обучения).

*Ученик научится.* Уметь находить арксинус, арккосинус, арктангенс действительного числа, грамотно формулируя определение. Применять свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа. Применять формулы для нахождения корней уравнений  $\cos x = a$ ,  $\sin x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ . Уметь решать тригонометрические уравнения: линейные относительно синуса, косинуса, тангенса угла (числа), сводящиеся к квадратным и другим алгебраическим уравнениям после замены неизвестного, сводящиеся к простейшим тригонометрическим уравнениям после разложения на множители. Ре-

шать однородные (первой и второй степени) уравнения относительно синуса и косинуса, а также сводящиеся к однородным уравнениям. Использовать метод вспомогательного угла. Применять метод предварительной оценки левой и правой частей уравнения.

*Ученик получит возможность научиться.* Уметь применять несколько методов при решении уравнения. Решать несложные системы тригонометрических уравнений. Решать тригонометрические неравенства с помощью единичной окружности. Применять все изученные свойства и способы решения тригонометрических уравнений и неравенств, при решении прикладных задач и задач повышенной сложности.

7. Урок мини-проект по теме. Практическая работа «Решение тригонометрических уравнений различными способами».

8. Урок обобщения и систематизации знаний.

9. Контрольная работа №5.

Глава VII. Тригонометрические функции (20 часов)

Область определения и множество значений тригонометрических функций. Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций. Свойство функции  $y = \cos x$  и её график. Свойство функции  $y = \sin x$  и её график. Свойство и графики функций  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$ . Обратные тригонометрические функции.

Дидактические единицы.

*Понятия:* тригонометрические функции, периодическая функция.

*Алгоритмы:* определения области определения и множество значений функций, нахождение периода функций, построения графиков основных тригонометрических функций и обратными им, использование свойств тригонометрических функций и их графиков при решении уравнений и неравенств.

Основные образовательные идеи. Простейшие периодические процессы. Сравнение процессов, выраженных тригонометрическими функциями и обратными им на примере механизма, на котором происходит преобразование вращательного движения в прямолинейное.

Виды деятельности обучающихся (требования к результатам освоения программы – предметные результаты обучения).

*Ученик научится.* По графикам функций описывать их свойства (монотонность, ограниченность, чётность, нечётность, периодичность). Приводить примеры функций (заданных с помощью или

графика), обладающих заданными свойствами (например, ограниченности). Разъяснять смысл перечисленных свойств. Изображать графики сложных функций с помощью графопостроителей, описывать их свойства. Решать простейшие тригонометрические неравенства, используя график функции.

*Ученик получит возможность научиться.* Распознавать графики тригонометрических функций, графики обратных тригонометрических функций. Применять и доказывать свойства обратных тригонометрических функций. Строить графики элементарных функций, используя графопостроители, изучать свойства элементарных функций по их графикам, формулировать гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих элементарные функции, и проверять их. Выполнять преобразования графиков элементарных функций: параллельный перенос, растяжение (сжатие) вдоль оси ординат. Применять другие элементарные способы построения графиков. Уметь применять различные методы доказательств истинности.

10. Урок мини-проект по теме. Лабораторно-графическая работа «Изучение тригонометрических функций на основе гармонических колебаний».

11. Урок обобщения и систематизации знаний.

12. Контрольная работа №6.

*Рекомендованная тематика исследовательских (проектных работ)*

13. Исследование гармонических колебательных движений в поисках формулы жизни на примерах тригонометрических функций.

14. Как применяется тригонометрия в авиации и гидравлике.

15. Использование тригонометрической формы комплексных чисел для обобщения теоремы сложения.

16. Уравнения и системы уравнений, рассматриваемые в тригонометрии.

*Системный блок типовых заданий физического содержания*

Модель межпредметных связей, рассмотренных выше, даёт возможность на примере изучения курса «Тригонометрия» согласовать темы уроков математики с темами уроков «Мини-исследований» или «Мини-проектов», что обусловлено содержанием наук и дидактическими целями. Тема «Тригонометрия» одна из самых сложных в курсе школьной математики, так же она имеет большое

практическое применение в курсе физики. Необходимо отметить, что курс тригонометрии основной школы продолжает иметь большую практическую направленность, требующую от учащихся прочного овладения основными понятиями, умения выполнять различного рода преобразования всевозможных выражений, исследовать функции и строить графики и т. д. Изучение понятий тригонометрии не ограничивается рамками одного школьного предмета, поскольку они отражают достаточно широкую область человеческого бытия, причинно-следственные связи. Школьники должны иметь прочные знания по тригонометрии, т. к. они являются звеном огромной цепи понятий и имеют большое значение в реализации межпредметных связей. Изучение элементов тригонометрии в средней школе связано с рядом трудностей: высокий уровень абстракции понятий, сложная логическая структура их определений, недостаточность учебного времени для осмысления сложности вопросов и др.

Формирование метапредметной деятельности целесообразно начинать с овладения учащимися отдельными компонентами, составляющими этапы исследования при выполнении заданий физического содержания на уроках математики.

Этапы исследовательской деятельности и возможные направления работы с учащимися на каждом из них предложены А.Г. Асмоловым [3]. Реализация каждого из компонентов в исследовании предполагает владение учащимися определёнными умениями, которые реализуются через способы составления типовых заданий (табл. 11).

## Компоненты исследовательской деятельности

Этапы исследования	Виды умений	Типовые задачи
I. Постановка проблемы, создание проблемной ситуации, обеспечивающей возникновение вопроса, аргументирование актуальности проблемы	<b>Умение видеть проблему</b> приравнивается к проблемной ситуации и понимается как возникновение трудностей в решении проблемы при отсутствии необходимых знаний и средств	на умение задавать вопросы, на смысловое чтение и овладение приёмами осмысления, на структурирование текста и его озаглавливание, на подбор эпитетов к тексту, понимание метафор
	<b>Умение ставить вопросы</b> можно рассматривать как вариант, компонент умения видеть проблему	Учебные тексты позволяют формировать это умение начиная с 1 класса, постепенно усложняя проблемные ситуации и вопросы <i>от анализа простых текстов к вопросам, направленным на анализ способов решения проблем</i>
	<b>Умение выдвигать гипотезы</b> – это формулирование возможного варианта решения проблемы, который проверяется и в ходе проведения исследования	возможны теоретические и эмпирические способы проверки гипотезы
	<b>Умение структурировать тексты</b> является частью общего умения работать с текстами, которые включают достаточно большой набор операций	определённая последовательность работы с текстом при его чтении с использованием различных схематических средств (таблицы, «дерево» и др.), выполняющих функцию логических опор текста

Этапы исследования	Виды умений	Типовые задачи
<p>I. Постановка проблемы, создание проблемной ситуации, обеспечивающей возникновение вопроса, аргументирование актуальности проблемы</p>	<p><b>Умение работать с метафорами</b> предполагает переносный смысл выражений, понимать и применять обороты речи, построенные на скрытом уподоблении, образном сближении слов</p>	<p>Умение создавать и понимать метафоры предполагает работу с вербальными текстами. Тексты могут быть представлены и графическими средствами, в качестве которых рассматриваются схемы и пиктограммы как наиболее важные и распространённые и в когнитивной, и в социальной практике. Умение их создавать и считать относится к средствам интеллектуальной деятельности и способствует её развитию</p>
	<p><b>Умение давать определение понятиям</b> – это логическая операция, которая направлена на раскрытие сущности понятия либо установление значения термина</p>	<p>умения выделять существенные признаки понятия через анализ и синтез</p>
<p>II. Выдвижение гипотезы, формулировка гипотезы и раскрытие замысла исследования</p>	<p>Для формулировки гипотезы необходимо проведение предварительного анализа имеющейся информации</p>	<p>умение прогнозировать ожидаемый результат исследования</p>
<p>III. Планирование исследовательских (проектных) работ и выбор необходимого инструментария</p>	<p>В соответствии с уровнем исследования возможны теоретические и эмпирические способы</p>	<p>– выделение материала, который будет использован в исследовании; – параметры (показатели) оценки, анализа (количественные и качественные); – вопросы, предлагаемые для обсуждения, и пр.</p>

## Продолжение таблицы 11

Этапы исследования	Виды умений	Типовые задачи
IV. Поиск решения проблемы, проведение исследований (проектных работ) с поэтапным контролем и коррекцией результатов	умение наблюдать	используются различные средства (включающие как программу, параметры наблюдения, так и различного рода инструменты, приборы и др.).
	умения и навыки проведения экспериментов	метод исследования, предполагающий воздействие на объект исследования. Кроме того, при поиске решения проблемы могут использоваться умение делать выводы, умозаключения и умение классифицировать.
	умение делать выводы и умозаключения	работа со схемами умозаключений (метод математической индукции, дедуктивным методом доказательств или по аналогии)
	Умение классифицировать	Выделяются правила классификации, к основным из которых относятся следующие: – члены деления должны быть непересекающимися; – деление на каждом этапе должно осуществляться только по одному основанию; – деление должно быть соразмерным (объёмы должны совпадать); – в основание деления должен быть положен признак, существенный для решения задачи. Выделяют особый вид классификации – дихотомическое деление (деление на два класса, один из которых строится через отрицание другого: «красные» – «не красные»)

Этапы исследования	Виды умений	Типовые задачи
V. Представление (изложение) результатов исследования или продукта проектных работ, его организация с целью соотнесения с гипотезой, оформление результатов деятельности как конечного продукта	умение структурировать материал	Умение ёмко отвечать на поставленный вопрос
	обсуждение, объяснение, доказательство, защиту результатов, подготовку, планирование сообщения о проведении исследования, его результатах и защите (подготовка включает не только составление текста, но и презентацию материалов, иллюстрирующих, объясняющих, демонстрирующих как сам процесс исследования и его средства, так и результаты)	задания на формирование тех или иных приёмов (умение задавать вопросы, смысловое чтение и др.) могут использоваться на разных этапах исследовательской деятельности в соответствии с их целями и задачами.
	оценку полученных результатов и их применение к новым ситуациям	Умение планировать ситуацию в будущем

Рассмотрим типовые задачи на формирование познавательных УУД на уроках математики с применением метапредметного подхода в решении заданий физического содержания по теме «Тригонометрические функции». Эти задания составлены на основе анализа изучения содержательных линий математики в школе, рассмотренных коллективом авторов теорий и методики обучения в средней школе, таких как: И.Е. Малова, С.К. Горохова, Н.А. Малинникова, Г.А. Яцковская по данной теме и учебно-познавательной деятельности из области физики, направленной на его усвоение [16]. В этих работах методика изучения тригонометрии рассматривается как самостоятельный блок после изучения функциональной линии в отличие от других частных методик. Благодаря чему, изучение тригонометрических функций в старших классах вводится через анализ физических задач о колебательном движении или примеров из реальной жизни, науки, технике, приводящих к данной функции. Поэтому осознание важности изучаемого материала приходит к ученикам не в процессе его изучения, а в процессе его применения при решении других заданий, т.е. тогда, когда он становится средством для решения других задач. Также в

статьях А.Г. Мордковича [18] определен приоритет содержательно-методической линии курса математики как функционально-графической линии. Это выражается, прежде всего, в том, что какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала практически всегда следует осуществлять по жесткой схеме: *функция – уравнения – преобразования*. При этом методическая схема изучения тригонометрических функций в старших классах системно выстраивается по этапам.

1 этап изучения. Определение рассматриваемой функции, её запись с помощью формулы, исследование параметров, входящих в эту формулу в процессе решения типовых заданий физического содержания *на формирование умений проводить эмпирическое исследование*.

Эмпирическое исследование – это установление новых фактов, на основе их обобщения формулируются эмпирические закономерности. Овладение учащимися приёмами и способами, необходимыми для подготовки и реализации эмпирического исследования, а также следования этапам его проведения (на разном материале с учётом его специфики, ситуаций, задач) должно осуществляться при организации работы малыми группами. Это предполагает не только освоение умений, непосредственно связанных с исследованием, но и ориентировку в предметно-специфических областях, а также развитие регулятивных действий, т. е. умения организовывать совместную работу (распределение функций, задач), и развитие коммуникативных действий, т. е. умения взаимодействовать (выслушивание, анализ, оценка, принятие других точек зрения, других способов решения).

#### **Этапы проведения исследования:**

1. Создание проблемной ситуации, формулирование проблемы, гипотезы.
2. Подготовка к проведению исследования:
  - выделение материала, который будет использован в исследовании;
  - параметры (показатели) оценки, анализа (количественные и качественные).
3. Поиск решения проблемы.
4. Проведение исследования.
5. Изложение результатов исследования, их представление.
6. Обсуждение, оценка полученных результатов.

Задания можно составлять таким образом: от простых видов деятельности, как составление плана исследования и распределение ролей в группе, к более сложным, где деятельность учащихся будет расширяться и обогащаться. Это касается показателей оценок, вопросов, которые предлагаются учащимся для обсуждения, и др.

Для этого можно с большой эффективностью использовать элементы ТРИЗ (теория решения изобретательских задач) Г.С. Альтшуллера [1]. Весь мета-алгоритм уложится в четыре крупных этапа, которые вполне понятны и которые на самом деле имеют намного больше деталей для описания всех практических действий эмпирического исследования. Можно дать названия этим этапам, например, в следующем виде: диагностика (проблемной ситуации, исследование задачи), редуцирование (приведение к известным моделям: алгебраической, аналитической и др.), трансформация (получение идей на основе направляющих правил трансформации, выбор метода решения или вычисления модели) и верификация (проверка потенциальной достижимости целей, проверка решения).

Для решения практических задач производства, планирования, проектирования, управления, исследований разработаны и разрабатываются тысячи математических моделей и вычислительных алгоритмов. Для каждого класса задач существуют определённая обобщённая схема решения любой задачи, принадлежащей этому классу. Эта обобщённая схема и есть «мета-алгоритм». При этом данная схема совпадает с методикой организации решения учебной математической задачи соблюдением формально-логической схемы рассуждения «анализ – построение – доказательство – исследование» при решении геометрических задач на построение и т. п.

### Задание «Математический маятник»

*Цель:* формирование умения осуществлять эмпирическое исследование.

*Возраст:* 16–17 лет.

*Учебные дисциплины:* физика, математика.

*Форма выполнения задания:* работа в группах по 4–5 человек.

*Описание задания:* перед учащимися ставится задача исследовать колебательное движение математического маятника с помощью сухого песка и картонной воронки, подвешенной на двух длинных нитях к штативу (рис. 4). Получить аналитическое выражение закона такого движения. После этого учащиеся переходят к

подготовительному этапу (диагностика), на котором обсуждаются вопросы организации исследования:

- определение функции каждого участника (собирающего установку, отвечающего на вопросы, анализирующего информацию и др.);
- решение вопросов о том, как будет осуществляться алгоритм решения экспериментального задания, с чем будем сравнивать и что анализировать.

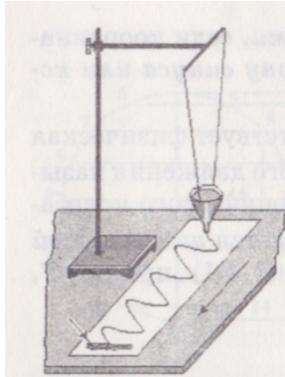


Рис. 4. Схема установки [20, с. 14]

На основном этапе осуществляется построение модели задания (редукция), её способы решения (трансформация), анализ и сравнение с данными, полученными в других источниках информации (верификация). Подведение итогов. Формулирование выводов.

Решение представлено на рис. 5.

Необходимо сравнить движение тела по окружности с колебательным движением математического маятника.

На этапе диагностики проблемы было установлено, что непосредственное сравнение затруднительно. На этапе редукции была построена функция (обобщение по двум её значениям). На этапе трансформации была выбрана модель единичной окружности как характеристика положения вращающейся точки по её координатам. На этапе верификации, доказали правильность выражения закона колебательного движения, с помощью наложения графика зависимости изменения круговой функции синуса с изменением его аргумента и волнистой линией математического маятника, оставленного песком на движущейся бумаге. Сделали вывод о характере гармонических колебаний.

Таким образом, при использовании мета-алгоритма появляется возможность более наглядно представлять ход решения математических задач, развиваемых на основе физических заданий. Здесь же возможно в органической связи с графиками ввести понятия периода, частоты колебания, амплитуды и смещения фазы на уроках физики. Всё это может быть рассмотрено на задачах механики, электротехники, оптики, астрономии и др. В результате чего даётся повышенная и логическая обоснованная теория в единстве с практикой, способствующая развитию творческого математического мышления.

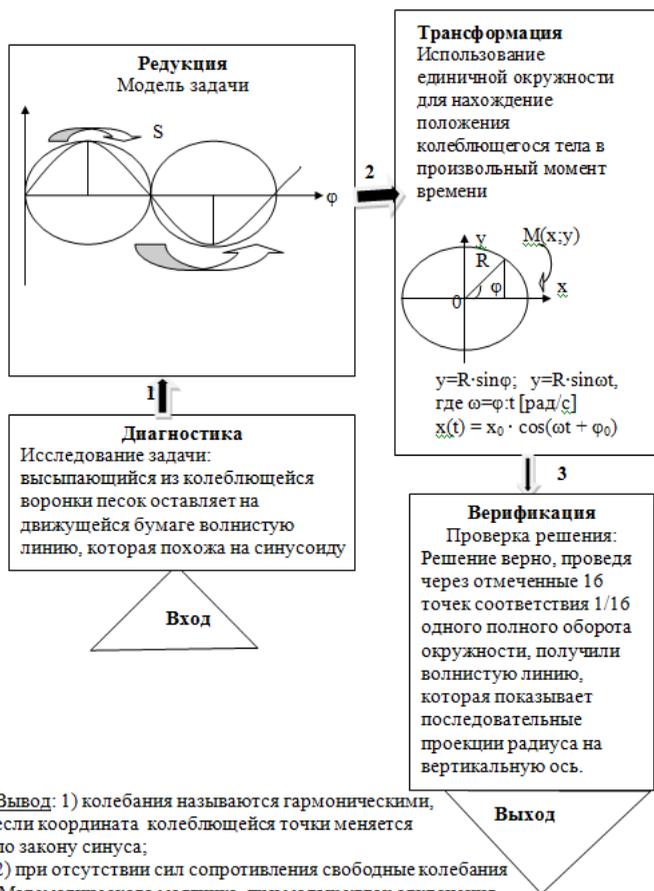


Рис. 5

Используя на уроках математики, мета-алгоритм ТРИЗ, ребёнок особенно учится использовать разные составляющие инновационного мышления и все составляющие в единстве тесной связи между собой в науках физика и математика. Переходы 1 и 3 требуют знания теории моделей и прикладных областей её применения. Переход 2 требует умения строить и решать модели теории.

2 этап изучения. Примеры из реальной жизни науки, техники, приводящие к данной функции в процессе решения типовых заданий физического содержания *на формирование умений отдельных составляющих исследовательской деятельности.*

Понятия угла и круговой дуги, данные в геометрии, оказываются недостаточными при изучении вращательных и круговых движений. В самом деле, рассмотрим следующее практическое задание из механики.

#### Задание «Умение выстраивать стратегию поиска решения задач»

*Цель:* формирование умения выдвигать гипотезы (предположение – что получится в результате) и проверять их.

*Возраст:* 16–17 лет.

*Учебная дисциплина:* математика и физика.

*Форма учебно-познавательной деятельности:* работа в группах по 4–5 человек.

*Описание задания [2]:* маховик дизеля делает 40 оборотов в минуту.

1. Какой угол опишет его спица  $OA$  (рис. 6) в течение  $t$  с?
2. Какую дугу опишет конец спицы  $A$  за это время?
3. Какое положение займёт спица  $OA$  через  $t = 1/2$  с.?

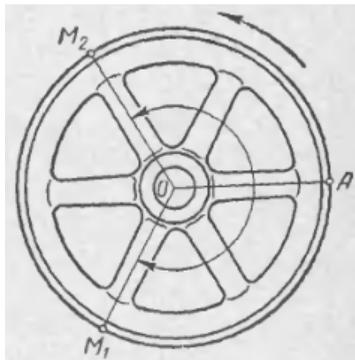


Рис. 6. Схема установки [2, с. 99]

*Инструкция:* учащимся предлагается решить задачу различными способами (кто быстрее?). Для этого необходимо:

1) сравнить между собой время, затраченное каждым учеником на выполнение задания;

2) описать способы выстраивания последовательности решения задачи (математическим способом, физическим способом);

3) найти оптимальную стратегию выстраивания последовательности по затраченному времени;

4) проверить эту стратегию на представленных ниже заданиях.

Кто быстрее? Решите задачу физическим способом. Для этого на единичной окружности проведите получившейся угол. У конца диаметра укажите углы поворотов в градусной и радианной мере. Относительно, какой оси они симметричны?

5) сделать вывод о наиболее эффективном способе выстраивания последовательности решения задачи – базовый уровень;

6) \* найти оптимальный способ решения задач такого вида содержания – повышенный уровень;

7) \*\* проверить свою последовательность решения, задач на вращательное движение – высокий уровень.

*Ожидаемый результат* [2, с. 112]

1) пусть за  $t$  с. материальная точка проходит по окружности радиуса  $R$  путь, равный  $l$ , и совершает при этом поворот вокруг центра окружности на угол  $\varphi$ . Тогда угловая скорость точки  $\omega = \frac{\varphi}{t}$ .  $\Leftrightarrow \varphi = \omega \cdot t$ . Искомый угол (дуга)  $\varphi = \frac{360^\circ \cdot 40 \cdot t}{60} = 240^\circ t$ ; с возрастанием  $t$  увеличивается угол (дуга)  $\varphi$ , что показано в табл. 12.

Таблица 12

t, с	0	1/2	1	2	5	10	60
$\alpha^\circ$	0°	120°	240°	480°	1200°	2400°	14 400°
$\varphi$ , рад	0	$2\pi/3$	$4\pi/3$	$8\pi/3$	$20\pi/3$	$40\pi/3$	$240\pi/3$

2) таким образом, величина угла (дуги) выразилась функцией времени  $t$

$$\varphi = 240^\circ t.$$

Вывод: в геометрии углом называют фигуру, образованную двумя лучами, имеющими общее начало, круговой дугой называют часть окружности, ограниченной двумя точками. При таких

определениях величины углов и дуг могут изменяться только в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Следовательно, встаёт необходимо обобщить определение угла и круговой дуги так, чтобы их величины не были ограничены;

3) чтобы ответить на третий вопрос задачи о положении спицы ОА через  $t = 1/2$  с надо знать направление вращения маховика.

Если направление вращения маховика совпадает с направлением вращения часовой стрелки, то спица ОА опишет угол в  $120^\circ$  и займёт положение  $ОМ_1$ , при противоположном вращении маховика спица ОА опишет также угол в  $120^\circ$ , но займёт симметричное положение точки  $М_1$  относительно оси абсцисс –  $ОМ_2$ .

*Вывод: полный ответ на третий вопрос задачи требует указания величины угла, описанного спицей, и направления движения спицы. То же самое можно сказать и о круговой дуге, описываемой концом спицы ОА.*

Нет ли других подобных поворотов с той же начальной стороной ОА и той же конечной стороной  $ОМ_2$ ?

Очевидно, что существует бесконечное много подобных поворотов.

Условились считать углы поворота против часовой стрелки положительными, а по часовой стрелке отрицательными.

Такое соглашение имеет свою историю. Как известно, механические и солнечные (теньевые) часы устроены так, что их стрелки вращаются «по солнцу», т.е. в таком же направлении в каком мы видим кажущееся нам движение Солнца вокруг Земли. Но, с открытием Коперником (1473–1543) истинного (положительного) движения Земли вокруг Солнца, видимое нами, т. е. кажущееся движение Солнца вокруг Земли является фиктивным (отрицательным). Коперник его отрицал, поэтому и считают направление вращения по часовой стрелке или по солнцу отрицательным, а противоположное направление – положительным.

Понятно, что для наблюдателя, находящегося по другую сторону маховика, угол  $АОМ_1$  окажется равным  $+120^\circ$ , а угол  $АОМ_2$  – равным  $-120^\circ$ , поэтому при исследовании данного вопроса надо выбрать определённое положение для наблюдателя (рис. 7).

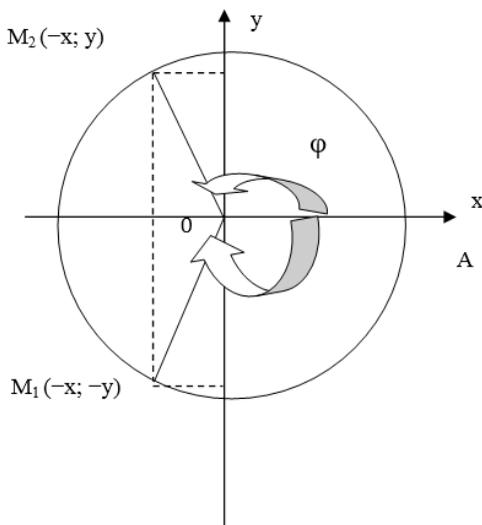


Рис. 7

Возвращаясь к задаче о вращении маховика, можем теперь сказать, что за время  $t = 1/2с$  спица  $OA$  опишет  $\angle AOM_1 = -120^\circ$ , если маховик вращается по часовой стрелке, или  $\angle AOM_2 = +120^\circ$ , если маховик вращается в противоположном направлении.

Понятно, что 10 с, вращения маховика по часовой стрелке та же спица опишет угол в  $-2400^\circ$ , а при противоположном направлении вращения опишет угол в  $+2400^\circ$ .

Так как при каждом обороте маховика спица  $OA$  описывает угол в  $360^\circ$ , а именно если маховик вращается против часовой стрелки, то за  $t = 2с$  спица  $OA$  опишет угол  $\angle AOM_2 = 120^\circ + 360^\circ$ , т. е.  $\varphi = 2\pi/3 + 2\pi$ , за  $t = 5с$  спица  $OA$  опишет угол  $(\angle AOM_2)_2 = 120^\circ + 360^\circ \cdot 3$ , т.е.  $\varphi = 2\pi/3 + 6\pi$ .

Встаёт вопрос: нельзя ли все такие углы записывать одной формулой?

С помощью метода математической индукции нетрудно заметить, что

$$(\angle AOM)_n = \varphi + 2\pi n,$$

где  $n$  любое натуральное число.

Если луч из своего исходного положения  $OA$  начнёт вращение по часовой стрелке, то первый раз он придёт в положение  $OM_1$ ,

описав отрицательный угол  $\text{АОМ}_1 = -(360^\circ - \alpha^\circ) = \alpha^\circ - 360^\circ$ . Поэтому формула будет выглядеть следующим образом:

$$(\text{АОМ})_m = \varphi + 2\pi(-m).$$

Нетрудно видеть, что все положительные и отрицательные углы с общей начальной стороной ОА общей второй стороной ОМ можно записать одной формулой:

$$\text{АОМ} = \varphi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

3 этап изучения. Исследование свойств функции из определения конкретной тригонометрической функции в процессе решения типовых заданий физического содержания *на формирование умений проводить теоретическое исследование.*

**Задание «Исторические сведения».**

*Цель:* формирование умения оценивать факты, события, явления и процессы с помощью разных критериев, выделять причинно-следственные связи.

*Возраст:* 17–18 лет.

*Учебные дисциплины:* математика и физика.

*Форма учебно-познавательной деятельности:* работа индивидуальная и в группах по 4–5 человек.

*Описание задания:* учащимся предлагается провести теоретическое исследование. Теоретическое исследование – это формулирование общих закономерностей, позволяющих объяснить ранее открытые факты и эмпирические закономерности. Оно направлено на формирование таких умений структурировать и достраивать учебную информацию, которые способствуют её пониманию. Исследуя проблему, связанную с пониманием смысла новой информации, психологи установили, что о понимании текста свидетельствует способность преобразовывать изученный материал из одной формы в другую; интерпретировать изученный материал; предположить дальнейший ход развития действий, явлений и др. [29].

#### **Этапы проведения исследования**

1. Формулирование проблемы.
2. Подготовка к проведению исследования:
  - предварительный анализ имеющейся информации, выдвижение гипотез;
  - отбор материала, который будет использован в исследовании.
3. Проведение исследования: анализ и обобщение результатов исследования.

4. Изложение результатов исследования, их представление.

5. Обсуждение, оценка полученных результатов.

*Материал:* текст на карточке.

*Текст.* [6, с. 55].

На пороге XVII в., в развитии тригонометрии намечается новое направление – аналитическое. Если до этого главной целью тригонометрии считалось решение треугольников, вычисление элементов геометрических фигур и учение о тригонометрических функциях строилось на геометрической основе, то в XVII–XIX вв. тригонометрия становится из глав математического анализа. Она находит широкое применение в механике, физике и технике, особенно при изучении колебательных движений и других периодических процессов. О свойстве периодичности тригонометрических функций знал ещё Виет, первые математические исследования которого относились к тригонометрии. Швейцарский математик Иоганн Бернулли (1642–1727) уже применял символы тригонометрических функций. И если развитие алгебраической символики, введение отрицательных чисел и направленных отрезков содействовали расширению понятия угла и дуги, то развитие учения о колебательных движениях, о звуковых, световых и электромагнитных волнах привело к тому, что основным содержанием тригонометрии стало изучение и описание колебательных процессов. Из физики известно, что уравнение гармонического колебания (например, колебания маятника, переменного электрического тока) имеет вид

$$y = A \sin (\omega t + \alpha),$$

где  $A$  – амплитуда отклонения маятника из положения равновесия,  $\omega$  – циклическая частота,  $\alpha$  – угол отклонения от положения равновесия. Графиками гармонических колебаний являются синусоиды, поэтому в физике и технике сами гармонические колебания часто называют синусоидальными колебаниями (рис. 8).

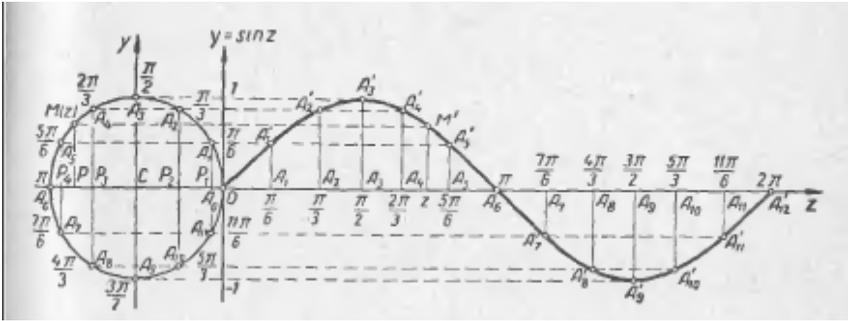


Рис. 8. Синусоида [2, с. 145]

В первой половине XIX в. французский учёный Ж. Фурье доказал, что всякое периодическое движение может быть представлено (с любой степенью точности) в виде суммы простых гармонических колебаний.

В наше время тригонометрия больше не рассматривается как самостоятельная ветвь математики. Важнейшая её часть – учение о тригонометрических функциях – является частью более общего, построенного с единой точки зрения учения о функциях, изучаемых в математическом анализе; другая же часть – решение треугольников – рассматривается как глава геометрии (плоской и сферической).

*Вопросы:*

1. Назовите имена учёных, которые участвовали в создании тригонометрических функций. Что их к этому подвигло?

2. На рис. 8 исследуйте синусоиду, для этого заполните сравнительную таблицу (табл. 13).

3. Подведите итоги наблюдений в виде таблицы результатов (табл. 14).

4. Постройте график функции  $y = \sin z$  полностью путём параллельного переноса уже построенной части вдоль оси абсцисс на отрезки, кратные  $2\pi$ .

5\*. Что является графиком функции  $y = \sin z$ ?

6\*\*. При каких значениях  $z$  на отрезке от 0 до  $2\pi$  выражение  $\sqrt{\frac{1}{2} + \sin z}$  имеет действительное значение?

*Примечание: задание можно предложить решать при создании на уроке проблемной ситуации (на уроке – изучение нового материала, работая в парах по 2 человека, как и, при проведении обобщающего урока).*

*Ожидаемый результат.*

Таблица 13

Сравнительный результат

№	План сравнения	на единичной окружности	на графике
1.	Пока $z$ возрастает от $0$ до $\frac{\pi}{2}$ ,	<i>точка <math>M(z)</math> описывает первую четверть числовой окружности, а её ордината <math>y = \sin z</math> возрастает от <math>0</math> до <math>1</math></i>	<i>график функции <math>y = \sin z</math> плавно поднимается вверх от оси <math>O_z</math> до прямой, параллельной оси <math>O_z</math> и отстоящей от неё на расстоянии <math>R=1</math>, следовательно, функция в промежутке <math>[0; \frac{\pi}{2}]</math> возрастает от <math>0</math> до <math>1</math>.</i>
2.	Дальше $z$ возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до $\pi$	<i>точка <math>M(z)</math> описывает вторую четверть числовой окружности, а её ордината <math>y = \sin z</math> убывает от <math>1</math> до <math>0</math></i>	<i>График функции <math>y = \sin z</math> опускается до оси <math>O_z</math>, следовательно, функция в промежутке <math>[\frac{\pi}{2}; \pi]</math> убывает от <math>1</math> до <math>0</math>.</i>
3.	С возрастанием $z$ от $\pi$ до $\frac{3\pi}{2}$	<i>точка <math>M(z)</math> описывает третью четверть числовой окружности, а её ордината <math>y = \sin z</math> убывает от <math>0</math> до <math>-1</math></i>	<i>График функции <math>y = \sin z</math> продолжает опускаться ниже оси <math>O_z</math> до параллели к этой оси, отстоящей от неё на расстоянии <math>-1</math>, следовательно, функция в промежутке <math>[\pi; \frac{3\pi}{2}]</math> убывает от <math>0</math> до <math>-1</math></i>
4.	Пока $z$ возрастает от $\frac{3\pi}{2}$ до $2\pi$	<i>точка <math>M(z)</math> описывает последнюю четверть числовой окружности и возвращается снова в своё исходное положение, а её ордината <math>y = \sin z</math> возрастает от <math>-1</math> до <math>0</math></i>	<i>График функции <math>y = \sin z</math> снова поднимается вверх до оси <math>O_z</math> и, следовательно, функция в промежутке <math>[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]</math> возрастает от <math>-1</math> до <math>0</math>.</i>

## Итог наблюдений

Характер изменения	I четверть	II четверть	III четверть	VI четверть
абсциссы $z$ возрастает	от 0 до $\frac{\pi}{2}$	от $\frac{\pi}{2}$ до $\pi$	от $\pi$ до $\frac{3\pi}{2}$	от $\frac{3\pi}{2}$ до $2\pi$
функции $y = \sin z$	возрастает от 0 до 1	убывает от 1 до 0	убывает от 0 до -1	возрастает от -1 до 0

5\*. Что является графиком функции  $y = \sin z$ ?

*Графиком функции  $y = \sin z$  является бесконечная непрерывная периодически волнообразная кривая, расположенная между двумя прямыми, параллельными оси абсцисс и отстоящими от неё на расстоянии равном 1; эту кривую называют синусоидой.*

6\*\*. При каких значениях  $z$  на отрезке от 0 до  $2\pi$  выражение  $\sqrt{\frac{1}{2} + \sin z}$  имеет действительное значение?  
 $(0 \leq z \leq \frac{7}{6}\pi$  и  $\frac{11}{6}\pi \leq z \leq 2\pi)$ .

4 этап изучения. *Применение свойств функций для решения уравнений и неравенств, доказательства тригонометрических тождеств, в процессе решения типовых заданий физического содержания на формирование смыслового чтения.*

Вторым направлением исследования является читательская грамотность, в том числе чтение математических текстов – определяется, как способность человека понимать и использовать письменные тексты, размышлять о них и заниматься чтением для того, чтобы достигать определённых целей, расширять свои знания и возможности, участвовать в социальной жизни. Поэтому, необходимо находить более разнообразные пути обучения учащихся работе с текстами различного содержания, характера и формата при освоении каждой учебной дисциплины. Следовательно, учебная информация школьного курса математики должна быть представлена в различных формах и использоваться не только в качестве иллюстраций, но и в виде учебных задач, решение которых предполагает самостоятельную интерпретацию текстов, выдвижение гипотез о его содержании, рефлексии, оценку и др.

Задания для освоения приёмов логического запоминания информации, извлечённой из текстов.

*Цель:* освоение приёмов логического запоминания информации, извлечённой из текстов.

*Возраст:* 16–17 лет.

*Учебные дисциплины:* физика, математика.

*Форма выполнения задания:* работа индивидуальная, в парах и группах.

*Описание задания:* после чтения и составления плана текста и графических схем учащимся предлагаются следующие варианты выполнения задания:

- взаимная проверка по вопросам учебника с опорой на план текста;
- пересказ в парах с опорой на план и графическую схему;
- составление устной и письменной аннотации с опорой на план и графическую схему;
- подготовка учебных докладов с подбором иллюстративного материала.

*Критерии оценивания:*

- адекватность и точность воспроизведения текста;
- адекватность отражения и аннотации основных положений текста;
- адекватность отражения в графической схеме логических и смысловых связей фрагментов текста.

Рассмотрим работу с текстом математического содержания на примере задания **«Доказательство математических теорем с помощью физических понятий»**.

**Текст** [2, с. 120].

Каждому приходилось наблюдать за движением различных частей всевозможных машин и станков.

Характерной особенностью часто встречающихся движений является их повторяемость через один и тот же промежуток времени. Такие движения называются периодическими.

Периодические процессы и явления изучаются физиками, механиками, астрономами, математиками и другими учёными. Закономерности тех или иных периодических явлений учёные записывают в виде функции, а затем, исследуя эти функции, раскрывают внутреннее содержание таких явлений и указывают пути практического использования на благо человека.

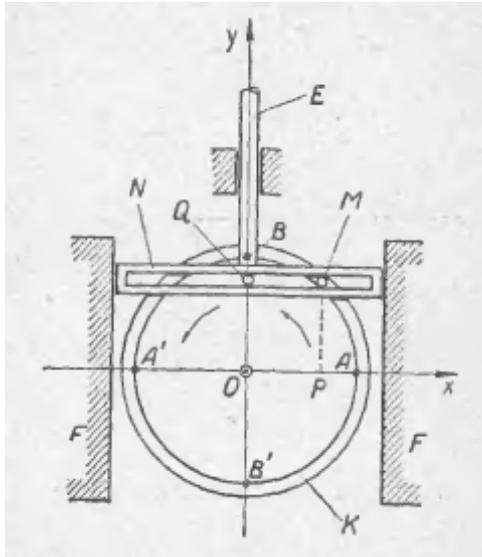


Рис. 9. Схема установки

Рассмотрим более подробно из периодических процессов на примере простого механизма, в котором круговое движение преобразуется в прямолинейное (рис. 9).

Насаженное на ось  $O$  колесо  $K$  соединено посредством «пальца»  $M$  и рамкой  $N$ . При вращении колеса вокруг его оси палец  $M$  совершает круговое движение, увлекая за собой рамку, последняя скользит вдоль направляющих тисков  $F$  и совершает колебательное периодическое движение. Если рамку  $N$  соединить посредством штока  $E$  с какой-нибудь деталью (например, с поршнем насоса), то последняя будет совершать такое же движение, которое делает рамка.

Представим движение вращательного механизма, а именно: колесо вместе с пальцем  $M$  вращается равномерно вокруг оси с центром в точке  $O$ , а рамка, увлекаемая пальцем  $M$ , двигалась прямолинейно вверх и вниз, а вместе с ней прямолинейно двигался шток  $BE$ . Рассмотрим две закономерности наблюдаемого движения:

I. Пусть колесо вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega = 1$  рад/с, тогда шток (любая его точка) будет двигаться прямолинейно неравномерно по закону:  $s = OQ = MP = y = \sin t$  (рис. 10):

а) вращение колеса равномерное;

б) шток движется прямолинейно неравномерно – сначала замедленно, когда  $t$  изменяется от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , а потом ускоренно, когда  $t$  изменяется от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi$ .

II. Пусть шток движется прямолинейно равномерно со скоростью  $y = 1$  рад/с, тогда обод колеса будет вращаться неравномерно по закону:  $s = MA = z = \arcsin t$  (рис. 11).

а) движение штока равномерное прямолинейное;

б) вращение обода неравномерное – сперва замедленное, когда  $t$  изменяется от  $-1$  до 0, а потом ускоренное, когда  $t$  изменяется от 0 до 1.

Доказать, что график функции  $y = \sin t$  и обратной ей функции  $z = \arcsin t$  ( $x = f(y)$ ) симметричны относительно биссектрисы I и III координатной углов.

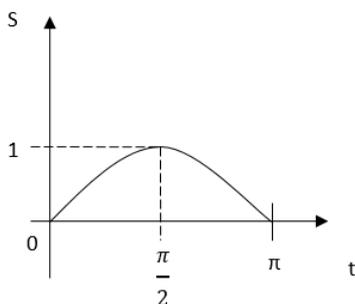


Рис. 10

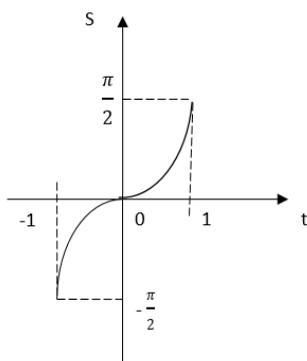


Рис. 11

*Материал:* карточки со схемой организации деятельности при доказательстве теорем по Л.И. Боженковой [4].

Схема организации деятельности при доказательстве теорем.

- 1) постановка учебной цели;
- 2) работа с формулировкой теоремы и выявление средств, необходимых для доказательства теоремы;
- 3) соотнесение выявленных средств выполнения УПД с собственными знаниями и умениями;
- 4) поиск доказательств теоремы;
- 5) составление плана доказательства теоремы;
- 6) реализация плана;
- 7) контроль доказательства теоремы;
- 8) самооценка результатов выполненной деятельности;
- 9) самокоррекция собственных учебных действий при работе с теоремой.

*Ожидаемый результат:*

- 1) доказать теорему обратимости функций и осознать приёмы, которые для этого использовались;
- 2) нужно знать приёмы обращения данной функции в обратную, признаки равенства и подобия треугольников, движение точки, выбрать подходящую формулу;
- 3) принять решение о помощи;
- 4) вывести следствия из равенства треугольников;
- 5) записать нужные отношения и преобразовать их, можно воспользоваться приёмами записи доказательства теоремы.

Задание на формирование ПУД и РУД. Организуйте свою учебную деятельность, направленную на доказательство того, что график любой обратной функции строится зеркальным отражением графика прямой функции относительно биссектрисы I–III координатных углов.

Первый уровень (базовый)	Второй уровень (повышенный)	Третий уровень (высокий)
<p>а) прочитайте доказательство теоремы;</p> <p>б) выполните пошаговую запись доказательства теоремы; составьте план, выполните обоснование каждого шага доказательства;</p> <p>в) попытайтесь сформулировать правило построения графиков обратных функций</p>	<p>а) воспользуйтесь главной идеей, планом поиска доказательства и перечислите обоснования для каждого шага;</p> <p>б) запишите доказательство теоремы, используя приём и план;</p> <p>в) сравните обоснования, указанные в доказательстве текста, и в своей записи доказательства;</p> <p>г) сформулируйте правило построения графиков обратных функций</p>	<p>а) используя главную идею доказательства, осуществите поиск, составьте план доказательства и запишите его;</p> <p>б) сравните доказательство с текстом со своим доказательством;</p> <p>в) сформулируйте правило построения графиков обратных функций, другие виды утверждений на примере задания и установите их истинность;</p> <p>г) подготовьте выступление с доказательством задачи у доски;</p> <p>д) примените правило к построению графиков обратных функций: линейной, квадратичной, логарифмической</p>

Таким образом, диагностика, контроль и оценка метапредметных образовательных результатов, в которые включены познавательные УУД, проводятся на основании создаваемой учеником образовательной продукции – текстов, суждений, моделей, мета-алгоритмов, образов, исследований, проектов, выполненных тестов, выводов, полученных в результате наблюдения или эксперимента и т. п. Планировать создание такой продукции необходимо на этапе целеполагания как при постановки образовательной цели, так и метапредметной. Необходимым условием достижением этих результатов является выполнение учениками типовых учебных заданий, которые иллюстрируются на содержании курса математики и физики десятых и одиннадцатых классов.

*Оценка достижений учащихся*

Важным при метапредметном подходе в обучении является то, что содержание, методы, формы, средства обучения и методы оценки достигаемых результатов выступают как педагогические

средства для реализации целей обучения. Мы предлагаем это реализовывать различными путями: на одних уроках через создание учителем условий для самостоятельной формулировки проблемного вопроса учащимися; на других – выход на постановку целей учащимися в ходе анализа домашнего задания; на третьих - составление целостной картины целей учащимися на основе типовых заданий физического содержания, предложенного учителем, содержащего ключевые вопросы и слова, побуждающие к действиям (Что общего? Почему? Какие отличительные признаки? Как связаны элементы? Определить..., продолжить..., найти закономерность..., доказать ... и т. д.) [17].

Комплексно подходу к решению вопроса организационных форм, при организации метапредметной деятельности возможны индивидуальная, парная, групповая формы организации. Форма обучения может быть определена на основе прохождения входного контроля. Для выявления школьников с творческими способностями и склонностью к научным исследованиям предлагаем методику [30], которая позволяет определить стили обучения школьников (табл. 16, 17). По итогам входного контроля все ученики делятся (условно) на три группы, которые характеризуются тремя уровнями: высокий, средний и низкий. Ученики первой группы изучают базовое содержание образования преимущественно визуальным способом переработки информации познавательного стиля обучения. Ученики второй группы занимаются материалом, который содержит дополнительные сведения аудиальным способом переработки информации. Ученики третьей группы изучают, помимо указанного выше, вариативный материал (задания часто носят творческий характер) кинестетическим способом переработки информации [27]. Эти стили кодирования информации, присущие в той или иной степени каждому ученику, необходимо учитывать в процессе обучения математике. Поэтому учащимся должна быть предоставлена возможность выбора заданий, в результате выполнения которых они получают возможность обогащения собственных когнитивных стилей. Задания, представленные в данной диагностике, выявлены в результате анализа содержания школьного курса математики и учебно-познавательной деятельности (УПД), направленной на его освоение.

Такая организация способствует учету индивидуальных возможностей учеников. Организация обучения в малых группах имеет свои особенности. Обучение в малых группах отличается коллективностью, взаимодействием, целесообразной деятельностью. Для «коллективности» характерно, что все обучают каждого, и каждый обучает всех [7]. Обучение других – это самый надежный способ глубоко и прочного овладения изучаемым материалом.

Успешность работы учащихся в малых группах может оцениваться на основе критерия хорошей группы: активное участие всех; занятие в группе доставляют удовольствие; содержание обучения усваивается эффективно.

При организации парной работы пары могут быть статические и динамические. Статические пары формируются по желанию учеников. Здесь партнеры могут обучать друг друга, меняясь ролями. Успешно работают вместе и два сильных, и два слабых ученика, и сильный со слабым, при условии их взаимного расположения друг к другу. После совместной работы в течение какого-либо времени может происходить смена партнеров. Это дает возможность перейти к работе в динамической паре. Динамическая пара функционирует в условиях постоянной смены партнеров. Динамическая пара дает возможность каждому участнику поработать с каждым. При подготовке материалов для взаимообучения в динамической паре необходимо учитывать, что материал будет прорабатываться каждым учеником в различной последовательности. Работа по таким материалам должна обязательно завершаться совместной работой по обобщению и систематизации изучаемого материала. Подводя итог проблеме организационных форм обучения нельзя не отметить их разнообразие при метапредметном подходе.

Широкие возможности для реализации требований ФГОС даёт организация метапредметной деятельности на уроках математики. На первом этапе изучения математики учителю необходимо разработать календарно-тематическое планирование с включением урока «Мини-проекта» в каждый модульный блок изучаемого курса тем. Это могут быть не только работы исследовательского характера, но и практические, лабораторно-графические, расчётные работы, где продуктом проектной деятельности является защита или творческое оформление работы в виде буклета, бро-

шюры, чертежа-схемы. Поэтому любой алгоритм их осуществления начинается с анализа цели и ответа на вопрос: «Зачем?». Далее все темы учебного модуля каждого урока математики становятся шагами к достижению цели – получения проектного продукта. Уроки зачёты могут превратиться в уроки защиты, что способствует формированию у учащихся способностей к обобщению, структурированию и систематизации предметного содержания изучаемой темы модуля. Такие виды работ на уроке сформировывают политехнические навыки учащихся, а именно вырабатывают умение правильно, аккуратно и чётко выполнять чертежи, проводить вычисления. Причём, само оформление работы и предоставление её результатов полностью зависит от творческого подхода учащегося. Это даёт возможность школьникам совершенствовать приобретённые ПУУД в процессе изучения того или другого раздела математики. Идеи организации таких видов деятельности на уроках математики можно почерпнуть из трудов современников прошлого века Г.Т. Юртаева, А.Г. Гайштута, Ю.В. Савченко [5; 23; 31]. Пример разработки урока «Мини-проекта» по технологии тренинга приведён в табл. 18.

Для выявления школьников с творческими способностями и склонностью к научным исследованиям предлагаем методику [42], которая позволяет определить стили обучения школьников.

Задание. Ниже предложены девять блоков, каждый из которых содержит четыре высказывания. Обдумайте, какое из каждых четырех высказываний точнее всего характеризует ваше поведение в учебных условиях и сложных ситуациях. Расположите эти высказывания в каждой группе по порядку. Тому высказыванию, которое в наибольшей мере характеризует ваше поведение, придайте оценку 4 и далее в убывающем порядке – оценки 3, 2, 1. Внесите оценки в клеточки таблицы.

Определение стилей обучения

№	А. Блоки высказываний			
	А	Б	В	Г
1	Вы ищете различие и разнообразие	Сначала вы любите попробовать	Вы чувствуете себя вовлеченным	Вы нацелены на практическую сторону дела
2	Вы принимаете вещи такими, какие они есть, и не пытаетесь на них влиять	Вы сосредоточены на том, что имеет перво-степенное значение	Вы анализируете ситуацию	Вы не выносите оценок и не становитесь на определенную точку зрения
3	Ваше внимание прежде всего направлено на собственные эмоции и ощущения	Прежде всего вы наблюдаете и фиксируете замеченное	Вы предпочитаете сначала все продумать	Вы прежде всего сосредотачиваетесь на проблеме и хотите найти ей применение
4	Вы принимаете вещи такими, какие они есть	Что бы вы ни делали и ни говорили, вы всегда идете на риск	Вы выносите оценочные суждения	Вы всегда стремитесь отдать себе отчет в том, что происходит
5	Вы главным образом действуете интуитивно	Вы в первую очередь нацелены на результаты	Вы преимущественно стараетесь рассуждать логически	Вы задаете много вопросов самому себе
6	Вы придаете большое значение абстрактным и концептуальным понятиям	Вы преимущественно наблюдаете и слушаете	Вы предпочитаете конкретные проблемы	Вы любите прежде всего быть активным и практичным
7	Вы направлены на настоящее, на «здесь» и «сейчас»	Перед принятием решения тщательно все обдумываете	Направлены на то, что должно произойти в будущем	Вы прагматичный человек

## Продолжение таблицы 16

8	Вы сосредоточены на приобретении нового опыта	Собираете данные, наблюдая за происходящим и слушающая	Пытаетесь объединить множество явлений в одну концепцию	Стремитесь проверить идеи и предположения – поэкспериментировать в различных ситуациях
9	Происходящее вы ощущаете эмоционально и остро	Держитесь немного на расстоянии	Избираете рассудочный подход, точку зрения здорового смысла	Чувствуете наряду с другими свою собственную ответственность за происходящее

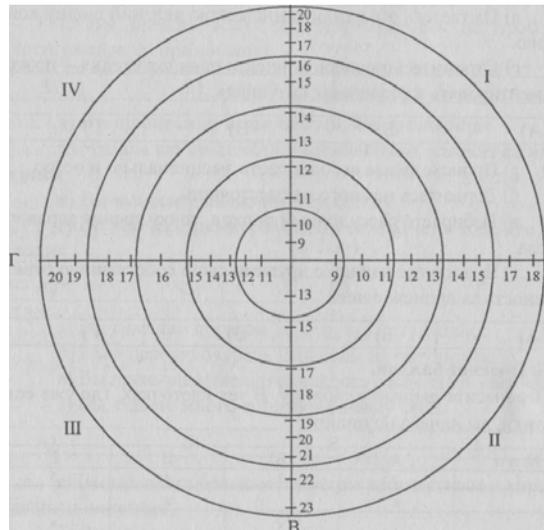
**Б. Подсчет баллов**

Перенесите данные в таблицу. В тех клеточках, где уже есть крестики, вы ничего не пишете.

№ п/п	А	Б	В	Г
1	X		X	
2		X		X
3				
4		X		X
5		X		X
6	X		X	
7			X	
8				
9	X			
Итого				

Просуммируйте числа в каждой колонке. Отложите на осях полученные результаты.

А



**В. Анализ (сумма пересечения сегментов в четвертях – по 4 в каждом)**

**1–3. Аналитики.**

Предпочитают изучение явлений на конкретном опыте, обдумывая и анализируя. Аналитики рассматривают конкретную ситуацию с нескольких точек зрения, после чего обобщают возникшие образы. У них богатое воображение. Им нравятся ситуации, в которых могут проявиться новые идеи. Интересуются природой человека, эмоциональны, с богатой фантазией, иногда им трудно принять решение. Одна из сильных сторон – интерес к культуре. Хорошо работают в сфере искусств и социальной сфере. На уроках предпочтение: ролевая игра, работа в группе

**3–6. Ученые.**

У них ярко выражены такие умения, как наблюдение, рефлексия, формулировка понятий и обобщение. Им свойственны способности к построению теоретических моделей и индукции. Природой человека интересуются меньше, чем абстрактными понятиями. Практическое использование теоретических знаний у ученых на втором месте. Важно, чтобы теория была недвусмысленной, логичной и точной. Предпочитают работать в одиночестве и полную свободу действий. Нуждаются в ясном представлении о предмете, с которым они работают. Эти люди часто занимаются научно-исследовательской работой, планированием и администрированием. Предпочтения: фильмы и видео, экскурсии, лекции, доказательства с использованием наглядных примеров

**6–9. Практики.**

Им особенно удается формулировка понятий и обобщение идей, примененных на практике. Нравятся такие ситуации, в которых есть лишь один правильный ответ на поставленный вопрос. Им необходим ясный план или описание проблемы, которая изучается. Цели должны быть им понятны: надо знать наперед практическое значение новых целей. Практики по сравнению с учеными и аналитиками не очень эмоциональны, большинство из них предпочитают работать с предметами, а не с людьми. Предпочитают учиться у экспертов. Часто интересуются техническими методами и наукой. Предпочтения: лекции, работа с литературой, структурные упражнения, программные инструкции

**9–12. Испытатели.**

Любят эксперименты, конкретные опыты, легко вырабатывают планы и любят новое. Постоянно экспериментируют, пытаются найти решение методом проб и ошибок. Хорошо ориентируются в новой ситуации и целиком полагаются на информацию, полученную от других. Испытатели нуждаются в понятных заданиях и строят образы посредством всех видов опыта. Никогда не начинать с теории – их девиз. Работают в сфере бизнеса, маркетинга, управления. Предпочтения: неструктурированные методы обучения, эксперименты

**Обобщённые задания, учитывающие стили обучения  
и кодирования информации**

<b>Преимущественно «визуалам»</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Составить набор объектов к готовой схеме определения понятия (в рисунках).</li> <li>2. Составить классификацию (схематизацию) понятий, используя модели – изображения понятий.</li> <li>3. Составить граф-схему поиска доказательства.</li> <li>4. Заполнить пропуски в блок-схеме доказательства теоремы, решения задачи.</li> <li>5. Дать рецензию на письменный ответ товарищей (на доске или в тетради).</li> <li>6. Решить задачи на готовых чертежах</li> </ol>
<b>Преимущественно «аудиалам»</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Сформулировать определение понятия, используя какую-либо модель.</li> <li>2. Объяснить классификацию (схематизацию) понятий, используя какую-либо модель.</li> <li>3. Доказать теорему, решить задачу, используя средства помощи.</li> <li>4. Выступить с устным ответом как представителю от группы.</li> <li>5. Прокомментировать содержание образовательного продукта, составленного одноклассниками.</li> <li>6. Выслушать ответ одноклассника и дать рецензию на его устный ответ.</li> <li>7. Используя готовую граф-схему поиска доказательства, провести доказательство</li> </ol>
<b>Преимущественно «кинестетикам»</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Составить схему определения понятия.</li> <li>2. Составить классификацию (систематизацию), родословную понятий.</li> <li>3. Разбить текст на части и озаглавить их.</li> <li>4. Составить план решения задач, план поиска доказательства, схему структуры теоремы, решения задачи.</li> <li>5. Сконструировать необходимый изучаемый объект.</li> <li>6. Подобрать чертежи, рисунки, соответствующие изучаемому содержанию.</li> <li>7. Составить информационную схему элементов учебного содержания школьного курса геометрии</li> </ol>

Расчётная работа «Основные формулы тригонометрии»,  
по технологии тренинга

*Вы систематизируете ваши знания определения синуса, косинуса и тангенса, и основные формулы, выражающие зависимость между ними.*

*Вы отработываете умения: решать задания по уровням сложности и самостоятельно корректировать свою деятельность.*

**1. Опорный конспект.**

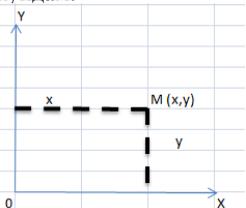
**Вопросы для составления опорного конспекта.**

1. Как строится угол на числовой окружности?
  2. Определение основных тригонометрических функций.
  3. Используя числовую окружность, дайте определение  $\sin t$ ,  $\cos t$ ,  $\operatorname{tg} t$ ,  $\operatorname{ctg} t$ .
  4. На примерах поясните формулы сложения, формулы двойного угла, формулы понижения степени.
  5. Используя опорный конспект, выполните тренировочные задания.
2. Тренаж по применению основных формул тригонометрии.

Таблица 18

Уровни сложности	Задания	Комментарии
А	1. Найти $\sin \alpha$ , если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}$ и $810^\circ < \alpha < 900^\circ$ 2. Вычислить без таблиц: $\frac{\cos 70^\circ + \sin 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ}{2\cos^2 35^\circ - \cos 70^\circ} - \frac{1}{\sin^2 45^\circ}$ 3. Упростить выражение: $\frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha - 1} - \frac{3 \cos^2 \alpha}{1 - 2\cos^2 \alpha}$ 4. Доказать тождество: $\frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4}{1 - 8\sin^2 \alpha - \cos 4\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^4 \alpha$ 5. Синусы двух острых углов треугольника соответственно равны $\frac{4}{5}$ и $\frac{12}{13}$ . Найти синус третьего угла	1. Учесть знак $\sin \alpha$ и связать функции $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ ( $\frac{7}{25}$ ). 2. Использовать соотношения $2\cos^2 35^\circ =$ $1 + \cos 70^\circ$ , $\sin 70^\circ = 2 \sin 35^\circ \cos 35^\circ$ $2\sin^2 35^\circ = 1 - \cos 70^\circ$ (-1) 3. В знаменателях дробей использовать $1 =$ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ (1) 4. Использовать формулы приведения. 5. Применить формулы суммы синусов и основное тригонометрическое тождество ( $\frac{56}{65}$ )

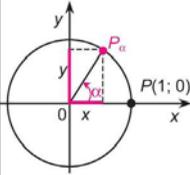
Продолжение таблицы 18

<p>В</p>	<p>1. Найти <math>\sin 2\alpha</math>, если <math>\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}</math> и <math>\alpha</math> принадлежит четвёртой четверти.                  2. Вычислить без таблиц: <math>128 \sin^2 20^\circ \cdot \sin^2 40^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \sin^2 80^\circ</math>.                  3. Упростить выражение: <math>\frac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}</math>.                  4. Доказать тождество: <math>\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = -\frac{2}{\cos \alpha}</math>, при <math>\frac{\pi}{2} &lt; \alpha &lt; \frac{3\pi}{2}</math>.                  5. Синус острого угла прямоугольного треугольника равен <math>\frac{5}{13}</math>. Найти синус другого острого угла. (Найти двумя способами)</p>	<p>1. Возвести <math>\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}</math> в квадрат и найти <math>\sin \alpha</math>, а затем и <math>\cos \alpha</math> (<math>-\frac{3\sqrt{7}}{8}</math>)                  2. Превратить произведение синусов в сумму, сгруппировав слагаемые синусов углов суммы и разности под общим квадратом и 128. (4,5)                  3. Возвести поочерёдно тригонометрическую единицу в квадрат, а затем в куб. (1,5)                  4. Поочерёдно возвести в квадрат обе части тождества, а в конце извлечь квадратный корень с условием знака косинуса во второй четверти.                  5. Первый способ по заданию А. Второй геометрический. (<math>\frac{12}{13}</math>)</p>
<p>С</p>	<p>1. Найти, <math>a = \cos(70^\circ + \alpha)</math>, если <math>\sin(40^\circ + \alpha) = b</math>, <math>0^\circ &lt; \alpha &lt; 45^\circ</math>.                  2. Вычислить без таблиц: <math>tg^2 36^\circ \cdot tg^2 72^\circ</math>.                  3. Докажите, что <math>\sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta</math>, если <math>\alpha, \beta, \gamma</math> – углы треугольника.                  4. Числа <math>a, b, c, d</math> удовлетворяют условиям <math>a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1</math>. Доказать, что <math> ac - bd  \leq 1</math>.                  5. На плоскости движется точка <math>M(x, y)</math> (см. рис), так что её прямоугольные координаты <math>x</math> и <math>y</math> изменяются по закону: <math>x = a \cos^2 t</math> и <math>y = a \sin^2 t</math>, где <math>t</math> – время движения в секундах. Определить траекторию и характер движения точки <math>M</math>, а также путь пройденной точкой за время <math>t = 2\pi</math> секундам.</p> 	<p>1. Представить угол <math>70^\circ</math> в виде суммы углов, один из которых табличный. <math>(a = \frac{\sqrt{3(1-b^2)-b}}{2})</math>                  2. Привести <math>tg^2 2 \cdot 18^\circ \cdot tg^2 4 \cdot 18^\circ</math> к общему знаменателю, используя формулу двойного угла. Раскрыв скобки и приведя подобные члены найти <math>\sin 18^\circ</math> и <math>\cos 18^\circ</math> (5).                  3. Представить третий угол через сумму углов треугольника в радианах.                  4. Для доказательства использовать тригонометрическую единицу и формулы сложения.                  5. Для определения траектории движения точки надо исключить из уравнения параметр <math>t</math> сложением этих уравнений. Используя формулы понижения степени написать уравнения колебательного движения. (Траектория – прямая, характер движения – колебательное, <math>S = 4a\sqrt{2}</math>)</p>

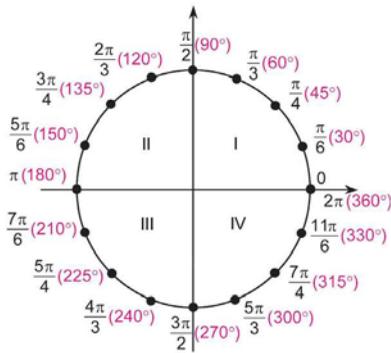
Примечание: в комментариях представлен один из вариантов логического поиска решения заданий.

Образец оформления расчётной работы учеником [13].

**Тригонометрия**



$x = \cos \alpha$ ;  $y = \sin \alpha$   
**Синусом**  $\alpha$  называется ордината точки  $P_\alpha$ , полученной поворотом точки  $P(1; 0)$  вокруг начала координат на угол  $\alpha$ .  
**Косинусом**  $\alpha$  называется абсцисса точки  $P_\alpha$ , полученной поворотом точки  $P(1; 0)$  вокруг начала координат на угол  $\alpha$ .  
 $P_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$ .  
**Тангенсом**  $\alpha$  называется отношение синуса угла  $\alpha$  к косинусу угла  $\alpha$ .  
 $\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

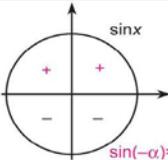
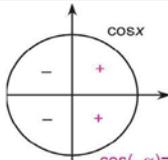
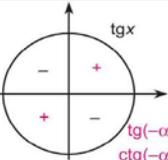


	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
sinx	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosx	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgx	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$
ctgx	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

**Основное тригонометрическое тождество**

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ;  $1 + \text{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ;  $\text{tg} \alpha \cdot \text{ctg} \alpha = 1$

 <p>sinx</p> <p><math>\sin(-\alpha) = -\sin \alpha</math></p>	 <p>cosx</p> <p><math>\cos(-\alpha) = \cos \alpha</math></p>	 <p>tgx</p> <p><math>\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg} \alpha</math>  <math>\text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg} \alpha</math></p>
--	---	--

Формулы сложения	Примеры
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \alpha \cdot \sin \beta$	$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$	$\cos 50^\circ \sin 80^\circ - \sin 50^\circ \cos 80^\circ = \sin(80^\circ - 50^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg} \alpha \pm \text{tg} \beta}{1 \pm \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta}$	$\text{tg} 150^\circ = \text{tg}(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\text{tg} 60^\circ + \text{tg} 45^\circ}{1 - \text{tg} 60^\circ \cdot \text{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -(1 + \sqrt{3})$

Формулы двойного угла	Примеры
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	$\sin 10x = 2\sin 5x \cdot \cos 5x$ $8\cos 3x \cdot \sin 3x = 4 \cdot (2\sin 3x \cos 3x) = 4\sin 6x$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$	$\cos 7x = \cos^2 \frac{7x}{2} - \sin^2 \frac{7x}{2}$ $\cos 16x = 2\cos^2 8x - 1; \cos 12x = 1 - 2\sin^2 6x$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$	$\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \operatorname{tg} 4x$

Формулы понижения степени	Примеры
$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$	$\sin^2 5x = \frac{1}{2}(1 - \cos 10x)$
$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$	$(1 + \cos 8x) = 2 \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) \right] = 2 \cos^2 4x$

Формулы суммы и разности синусов и косинусов	Примеры
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ) =$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	$= \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$= 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} = -2 \sin \frac{11\pi + 5\pi}{2} \cdot \sin \frac{11\pi - 5\pi}{2} =$
	$= -2 \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

*Примечание.* Наиболее часто употребляемыми формулами являются «тригонометрическая единица» и формулы понижения степени (читаются слева направо), а с право налево – как преобразование суммы  $1 + \cos 2\alpha$  и разности  $1 - \cos 2\alpha$  в произведение. Дополнительно формулы тройного угла:

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

*Решение задач.*

*Категория сложности С.*

$$1. \cos(70^\circ + \alpha) = [\cos(30^\circ + (40^\circ + \alpha))] = \cos 30^\circ \cdot \cos(40^\circ + \alpha) - \sin 30^\circ \cdot \sin(40^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(40^\circ + \alpha) - \frac{1}{2} \sin(40^\circ + \alpha)$$

Таким образом, необходимо вычислить  $\cos(40^\circ + \alpha)$ . Так как  $\cos^2(40^\circ + \alpha) = 1 - \sin^2(40^\circ + \alpha) = 1 - b^2$ , то  $|\cos^2(40^\circ + \alpha)| = \sqrt{1 - b^2}$

Учитывая, что при  $\alpha \in (0^\circ; 45^\circ)$ , угол  $40^\circ + \alpha \in (40^\circ, 85^\circ)$ ;

$$\cos(40^\circ + \alpha) = \sqrt{1 - b^2} > 0. \text{ Тогда } a = \frac{\sqrt{3(1-b^2)} - b}{2}.$$

2. 1) упростим выражение через формулу двойного угла.

$$tg^2 36^\circ \cdot tg^2 72^\circ = tg^2 2 \cdot 18^\circ \cdot tg^2 4 \cdot 18^\circ = (tg 2 \cdot 18^\circ \cdot tg 4 \cdot 18^\circ)^2$$

$$\text{Пусть } A = tg 2\alpha \cdot tg 4\alpha = \frac{tg^2 2\alpha}{1 - tg^2 2\alpha} = \frac{2 \left( \frac{tg^2 \alpha}{1 - tg^2 \alpha} \right)^2}{1 - \left( \frac{tg^2 \alpha}{1 - tg^2 \alpha} \right)^2} = \frac{8tg^2 \alpha}{(1 - tg^2 2\alpha)^2 - 4tg^2 \alpha}$$

2) вычислим  $\sin 18^\circ$ , т.к.  $tg 18^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}$ . Воспользуемся формулами двойного и тройного аргументов. Для этого рассмотрим аргументы  $36^\circ$  и  $54^\circ$  и соответственно учтём, что  $\sin 36^\circ = \sin(90^\circ - 54^\circ) = \cos 54^\circ$ . Из формул двойного и тройного аргумента следует, что  $\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ$ ,  $\cos 54^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$ . Получим:  $2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$ ,  $2 \sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3$ .

Таким образом,  $\sin 18^\circ$  – корень квадратного уравнения

$$4x^2 + 2x - 1 = 0, \text{ т. е. } X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}, \text{ откуда } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

3)  $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4}$  из этого следует, что

$$tg 18^\circ = \frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}, \quad (1 - tg^2 18^\circ)^2 = \frac{4}{5}$$

$$A = \frac{8 \frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}}{\frac{4}{5} - 4 \frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot (3 - \sqrt{5})}{2 \cdot (3\sqrt{5} - 5)} = \frac{5 \cdot (3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} \cdot (3 - \sqrt{5})} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

$$A^2 = (\sqrt{5})^2 = 5.$$

То есть  $tg^2 36^\circ \cdot tg^2 72^\circ = 5$ .

3. Если  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы треугольника, то  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , следовательно,  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = \cos \pi \cdot \cos(\alpha + \beta) + \sin \pi \cdot \sin(\alpha + \beta) = \\ &= -\cos(\alpha + \beta) = -(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta). \end{aligned}$$

Тогда

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

4. Поскольку  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $c^2 + d^2 = 1$ , то существуют такие  $\alpha$  и  $\beta$ , что  $a = \sin \alpha$ ,  $b = \cos \alpha$ ,  $c = \sin \beta$ ,  $d = \cos \beta$ . Следовательно,  $|ac - bd| \leq 1$  ■

5. Для определения траектории движения точки надо исключить из уравнения параметр  $t$  сложением этих уравнений. Используя формулы понижения степени написать уравнения колебательного движения.

Уравнение траектории точки  $M$ :  $x + y = a$ , где  $x < a$  и  $y < a$ . Следовательно траекторией будет отрезок прямой, ограниченный точками  $A(a; 0)$  и  $B(0; a)$ . На этом отрезке точка  $M(x; y)$  совершает колебательное движение с периодом  $\pi$ , так как  $x = \frac{1}{2}a \cdot (1 + \cos 2t)$ ,  $y = \frac{1}{2}a \cdot (1 - \cos 2t)$ . За время  $t = 2\pi$  секунд она проходит путь  $S = 4AB = 4a\sqrt{2}$ ,  $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ ,  $\cos 2t = \cos 4\pi$ .

В формировании индивидуального стиля учебной деятельности большую роль играет осознание каждым учащимся собственного успеха в достижении целей, чему способствует использование оценочной системы стимулирующего поощрения активной учебной деятельности школьника, целью которой служит активизация мыслительной деятельности учащихся, повышение его познавательного интереса к проблемам изучаемого курса.

Данная система предполагает накопление баллов в течение занятия, модуля, темы. В работах Л.И. Боженкова (4, с. 198) предлагает организовывать процесс контроля достижения реализуемых результатов с помощью индивидуального листа по темам учебного модуля. В нём, в соответствии планируемыми результатами изучения темы фиксируются номера учебных типовых заданий. Оценка результатов достижений в старших классах балльно-рейтинговая, т.к. они уже готовятся к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ (табл. 19).

Лист достижений по теме изучения учебного модуля  
«Тригонометрические тождества и функции»

Учебные задачи модуля	Максимальный балл	Самооценка
Оценка за математический диктант	5	
Оценка за знание формул	5	
Типовое задание №1	6	
Расчётная работа	7	
Навыки решения задач по теме (самостоятельная работа)	5	
Практико-ориентированные задачи	6	
Контрольная работа №5	5	
Исследовательская (проектная деятельность)	10	
Типовое задание №2	6	
Практическая работа	7	
Контрольная работа №6	5	
Типовое задание №3	6	
Типовое задание №4	6	
Лабораторно-графическая работа	7	
Проверочная работа в тестовой форме ЕГЭ	15	
Зачёт	10	
Контрольная работа №7	5	
Итого	116	
Средний балл	6,8	
оценка «3»	50% – 58–69	
Оценка «4»	60% – 69,6–86	
Оценка «5»	75% – 87–116	

Чтобы активизировать учащихся, определяется минимальная сумма баллов от максимального итога – 30–50%, т. е. 34,8 балла. Если к концу изучения учебного модуля ученик наберёт сумму, меньшую этого числа, он считается не освоившим тему учебного модуля «Тригонометрические тождества и функции». Реализуемые результаты могут достигаться учащимися по средствам создания

различных образовательных продуктов (отчёта о практической работе, буклета по расчётной работе, брошюры к лабораторно-графической работе) по изучаемой теме не только в урочное время, но и во внеурочное, что также подлежит оцениванию различными способами.

Учитель ведёт учёт деятельности учащихся, фиксируя их продвижение в освоении темы в своём журнале достижений. Достигнутые результаты освоения учебного модуля подлежат итоговому тематическому оцениванию: ученик получает отметки за проверочную работу в форме ЕГЭ и зачётную работу.

Такой поход к оцениванию позволяет всем участникам образовательного процесса отслеживать достижения планируемых результатов. Процесс обучения в этом случае движется к направлению от планируемых результатов обучения к достигаемым результатам и, наконец, к достигнутым, что соответствует требованиям Стандарта. При этом основной задачей и критерием оценки выступает уже не освоение обязательного минимума содержания образования, а овладение системой учебных действий с изучением учебным материалом.

## Заключение

В целях совершенствования методики изучения тригонометрии курса алгебры и начала анализа, из различных методических и технологических подходов был выбран метапредметный подход в изучении на примере учебного модуля «Тригонометрические тождества и функции», развиваемого на основе реальных задач из курса физики. В работе представлена и методически обоснованная организация метапредметной деятельности учащихся в виде развернутой системы принципов модульного обучения; программы учебного модуля, в которых объединены различные виды самостоятельной учебно-познавательной деятельности, система мониторинга усвоения учебного материала.

В монографии представлены методические рекомендации по организации познавательной деятельности в школе при изучении учебного модуля «Тригонометрические тождества и функции», развиваемого на основе реальных задач из курса физики (модульные программы, технологические карты, дидактические материалы), предусматривающие:

- изучение свойств тригонометрических функций по схеме: функции – свойства функций – преобразования графиков – уравнения – неравенства;

- систему типовых заданий физического содержания, способствующую повышению уровня сформированности функционально-графических и аналитических знаний и учебных действий школьников;

- включение рейтинговой системы контроля результатов;

- организацию самостоятельной учебно-познавательной деятельности учащихся через программу учебного модуля, средствами составления учебных карт действий в профильной школе.

Преимущество программы учебного модуля, заключается в том, что материал размещается в так называемой линейной последовательности раскрывая, таким образом, логику познания, характерную для математики как науки, которая часто не согласуется с субъективной логикой усвоения этих знаний учащимися на уроках физики. Лучше понимается и усваивается то, что представлено в целостности, так при этом легче устанавливаются связи между отдельными частями целого.

Важным условием успешного решения задач исследования является достижение преемственности главных компонентов учебно-воспитательной системы. Обеспечению преемственности всех звеньев системы образования способствует внедрение федеральных государственных образовательных стандартов общего и высшего образования. В основе ФГОС СОО лежит системно-деятельностный подход, который предполагает обеспечение преемственности дошкольного, начального общего, основного и среднего (полного) общего образования.

Межпредметные связи математики и физики в курсе алгебры и начала анализа 10–11 классах оказывают значительное влияние на формирование личности ученика: его познавательной активности, потребностей в овладении знаниями на более высоком качественном уровне.

Сейчас, учитывая непростые задачи, которые ставит XXI век, нужно по возможности восстанавливать популярность научной деятельности. Это помогает не только в воспитании индивидуальности, но и сохранить уже во взрослом возрасте детскую способность удивляться таким простым вещам, как падение яблок и лифтов – способность, которая была свойственна Эйнштейну и другим великим физикам-теоретикам. А. Эйнштейн смог выводить сложные уравнения ещё в школьном возрасте, но главное он понимал: «Математика – это, язык, который природа использует для описания своих чудесных тайн... Воображение важнее знаний» [30]. Позже, когда он стал физиком-теоретиком, успех к нему пришел не из-за его выдающихся мыслительных способностей, а из-за необычайной силы воображения и креативности.

В соответствии с современными тенденциями реформирования школьного математического образования, в работе представлена система формирования и развития познавательных УУД учащихся. В этом случае научно-проектная деятельность учащихся стимулирует творческий подход и воображение.

## Список литературы

1. Альтшуллер Г.С. Найти идею. Введение в теорию решения изобретательских задач. – Новосибирск: Наука, 1991. – 225 с.
2. Андронов И.К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач / И.К. Андронов, А.К. Окунечев. – М.: Просвещение, 1986 – 648 с.
3. Асмолов А.Г. Формирование УУД в основной школе: от действия к мысли / А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская [и др.]. – М.: Просвещение, 2010. – 159 с.
4. Боженкова Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении алгебре [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://avidreaders.ru/download/metodika-formirovaniya-universalnyh-uchebnyh-deystviy-pri-1.html?f=pdf>
5. Гайштут А.Г. Математика в логических упражнениях. – Киев: Рад. шк., 1985. – 192 с.
6. Глейзер И.Г. История математики в школе. – М.: Просвещение, 1983. – 352 с.
7. Гончаров В.Л. Математика как учебный предмет // Известия АПН РСФСР. – 1958. – Вып. 2. – С. 53–67.
8. Дусавицкий А.К. Урок в развивающем обучении: книга для учителя / А.К. Дусавицкий, Е.М. Кондратюк, И.Н. Толмачева. – М.: Вита-пресс, 2008.
9. Зив Б.Г. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10–11 классов / Б.Г. Зив, В.А. Гольдич. – СПб.: Петроглиф; Виктория плюс, 2013. – 216 с.
10. Ивашкина Д.А. Эксперимент как метапредметная деятельность: реализация ФГОС на примере курса физики: курс лекций УМП – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2014. – 250 с.
11. Каменецкий С.Е. Теория и методика обучения физики в школе: Общие вопросы: учебное пособие / С.Е. Каменецкий, Н.С. Пурышева [и др.]. – М.: Академия, 2000. – 366 с.
12. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа 10 класс). Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова [и др.]; под ред. А.Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2017.
13. Коноплева О.А. Весь курс школьной программы в схемах и таблицах: математика. – СПб.: Тритон, 2007. – 103 с.

14. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (утв. распоряжением Правительства РФ от 24.12.2013 г. №2506-р).
15. Лернер И.Я. Процесс обучения и его закономерности. – М.: Знание, 1980. – С. 10.
16. Малова И.Е. Теория и методика обучения математике в средней школе: учебное пособие для студентов вузов / И.Е. Малова, С.К. Горохова, Н.А. Малинникова [и др.]. – М.: Владос, 2009. – 445 с.
17. Модульно-рейтинговая технология обучения (опыт применения в вузе и средней школе). – Барнаул: Изд-во АТУ, 2003. – 183 с.
18. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2002. – №6. – С. 32–38.
19. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.centeroko.ru>
20. Петросян В.Г. Физика: учебное пособие для 9 кл. общеобразовательных учреждений / В.Г. Петросян, Х.Б. Хоконов [и др.]. – Нальчик, 2000. – 194 с.
21. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования – одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 28 июня 2016 г. №2/16-з). – С. 20.
22. Романовская М.Б. Метод проектов в учебном процессе: метод. пособ. – М.: Педагогический поиск, 2006. – 160 с.
23. Савченко Ю.В. Опорные конспекты по математике: справочник по теории и методам решения задач алгебры и начал анализа. – 1991 – 64 с.
24. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий: в 2 т. – М.: НИИ школьные технологии, 2006. – Т. 1. – С. 479.
25. Скаткин М.Н. Совершенствование процесса обучения. – М.: Педагогика, 1971. – 206 с.
26. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего (далее – ФГОС СОО) (утв. приказом Министерства образования и науки РФ (далее – МоиН РФ) от 17.05.2012 №413).
27. Холодная М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. – Томск: Изд-во ТГУ; М.: Барс, 1997. – 392 с.

28. Хуторской А.В. Работа с метапредметным компонентом нового образовательного стандарта. Практический аспект // Народное образование. – 2013. – №4. – С. 159–160.

29. Хуторской А.В. Что такое современный урок // Эйдос. – 2012. – №2[Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.eidos.ru/journal/2012/0529-10.htm>

30. Экономика для старших классов. Активные формы обучения / М. Уаттс, С. Маккоркл, Б. Мезарос [и др.]. – М.: МЦЭБО, 2011. – 246 с.

31. Юртаева Г.Т. Лабораторно-графические работы по алгебре и началам анализа в средней школе. – М.: Просвещение, 1978. – 81 с.

32. Rawson K.A. Are performance predictions for text based on ease of processing? / K.A. Rawson, J. Dunlosky // Journal of experimental psychology: learning, memory and cognition. – 2002. – V. 28. – №1.

33. Thomas Friedman, Learning to Keep Learning // New York Times. – 13.12.2006.

*Выражаю благодарность за поддержку и ценные замечания  
заслуженному учителю России, отличнику народного просвещения,  
учителю-методисту, награждённому медалью «За труд. Доблесть»  
и единомышленнику по многим жизненным вопросам*

***Петрашовой Таисии Петровне.***

*За генерирование идей, реализованных в творческой профессии  
учителя, благодарю директора заочного физико-математиче-  
ского лицея «Авангард» **Евгения Николаевича Филатова**,  
канд. пед. наук, доцента **Владимира Николаевича Фрундина**.*

*Научное издание*

*Снигирева Людмила Николаевна*

**ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ  
ДЕЙСТВИЙ ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ  
МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ  
СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Монография

Чебоксары, 2020 г.

Редактор *Л.Н. Снигирева*  
Компьютерная верстка и правка *Е.В. Кузнецова*  
Дизайн обложки *Н.В. Фирсова*

Подписано в печать 16.09.2020 г.

Дата выхода издания в свет 22.09.2020 г.

Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Гарнитура Times. Усл. печ. л. 6,045. Заказ К-708. Тираж 500 экз.

Издательский дом «Среда»  
428005, Чебоксары, Гражданская, 75, офис 12  
+7 (8352) 655-731  
info@phsreda.com  
<https://phsreda.com>

Отпечатано в Студии печати «Максимум»  
428005, Чебоксары, Гражданская, 75  
+7 (8352) 655-047  
info@maksimum21.ru  
[www.maksimum21.ru](http://www.maksimum21.ru)